ΕΜΠ–ΣΗΜΜΥ 02-03-2011

Εξέταση στο Στοχαστικό Έλεγχο

Ονοματεπώνυμο Σπουδαστή:

Αριθμός Μητρώου:

Θέμα 1ο(Μονάδες 7). Θεωρούμε το σύστημα

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + w_k,$$

όπου $k = 0, 1$ και τις τυχαίες μεταβλητές w_0, w_1, v_0, v_1, x_0 οι οποίες είναι ανεξάρτητες και Γκαουσσιανές με μηδενικό μέσο, και για τις οποίες είναι γνωστό ότι $\mathbb{E}\left[x_0 x_0^T\right] = I,\ \mathbb{E}\left[w_0 w_0^T\right] = \mathbb{E}\left[w_1 w_1^T\right] = \sigma_1 I,\ \mathbb{E}\left[v_0 v_0\right] = \mathbb{E}\left[v_1 v_1\right] = \sigma_2$. Έστω ότι το κριτήριο προς ελαχιστοποίηση είναι

$$J = \mathbb{E}\left\{ x_1^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1 + x_2^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_2 + u_1^2 + u_0^2 \right\}.$$

I. Αν $y_0 = \varepsilon[1\ 1]x_0 + v_0,\ y_1 = [1\ 1]x_1 + v_1,\ \varepsilon \neq 0$ και $u_0 = \gamma_0(y_0),\ u_1 = \gamma_1(y_0, y_1)$, να βρεθεί το

$$J_1^*(\varepsilon) = \inf_{\gamma_0, \gamma_1} J.$$

Πώς συμπεριφέρεται το $J_1^*(\varepsilon)$ καθώς μεταβάλλεται το ε; (Μονάδες 3).

II. Αν τώρα $y_0 = \varepsilon[1\ 1]x_0 + \varepsilon v_0,\ y_1 = [1\ 1]x_1 + v_1,\ \varepsilon \neq 0$ και $u_0 = \gamma_0(y_0),\ u_1 = \gamma_1(y_0, y_1)$, να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή $J_2^*(\varepsilon) = \inf_{\gamma_0, \gamma_1} J$. (Μονάδα 1).

III. Έστω ότι $y_0 = [1\ 1]x_0 + v_0,\ y_1 = [1\ 1]x_1 + v_1$, αλλά $u_0 = \gamma_0(y_0),\ u_1 = \gamma_1(\varepsilon y_0, y_1),\ \varepsilon \neq 0$. Να ευρεθεί το $J_3^*(\varepsilon) = \inf_{\gamma_0, \gamma_1} J$ για την περίπτωση αυτή και το

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_3^*(\varepsilon).$$

(Μονάδα 1).

IV. Στην περίπτωση που $y_0 = [1\ 1]x_0 + v_0,\ y_1 = [1\ 1]x_1 + v_1$ και $u_0 = \gamma_0(y_0),\ u_1 = \gamma_1(y_1)$, αν $J_4^* = \inf_{\gamma_0, \gamma_1} J$, να συγκριθεί το J_4^* με το $\lim_{\varepsilon \to 0} J_3^*(\varepsilon)$. (Μονάδες 2).

Θέμα 2ο(Μονάδες 3). Να λυθεί το infinite time average cost πρόβλημα αν

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{2u}{4+2u+u^2} & \dfrac{4+u^2}{4+2u+u^2} \\[2ex] \dfrac{1+u^2}{3+5u^2} & \dfrac{2+4u^2}{3+5u^2} \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} x^2+u+ux^2+x^3 \\[2ex] x^3+u+u^2x \end{bmatrix},$$

με $x \in \{-1, 2\},\ u \in \{1, 3\}$.

Διάρκεια εξέτασης: 3:00′
Όλες οι απαντήσεις πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες.
Καλή Επιτυχία.