Ε.Μ.Π. ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ: Σ. Ε. Ρ.
ΜΑΘΗΜΑ: Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο **Κ-Ω**
ΕΞΑΜΗΝΟ: 5ο

Ονοματεπώνυμο

ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ: Τ. Γ. Κουσιουρής
Γ. Παπαβασιλόπουλος
ΠΕΡΙΟΔΟΣ: Φεβρουαρίου 2007
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/7/2007 **ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ**
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2.5 ώρες

Α

Θέμα 1ο

Δίδεται σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 2a \\ 5+a & -2 \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}$$

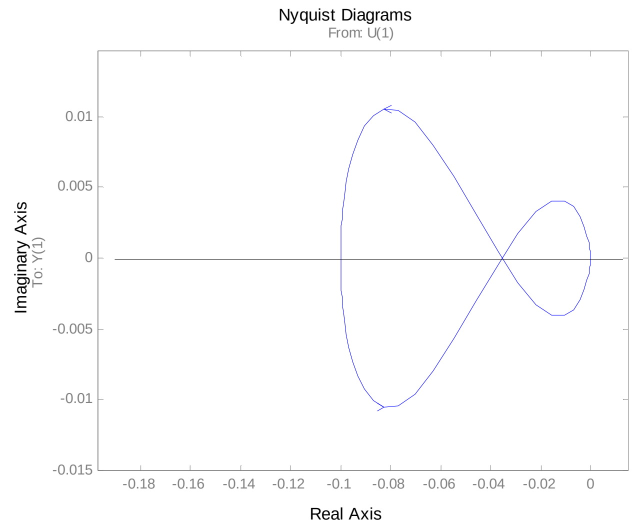
1) Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα του συστήματος για τις διάφορες τιμές του a.
2) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς.
3) Εάν a=0, να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος με τη μέθοδο Lyapunov.

Θέμα 2ο

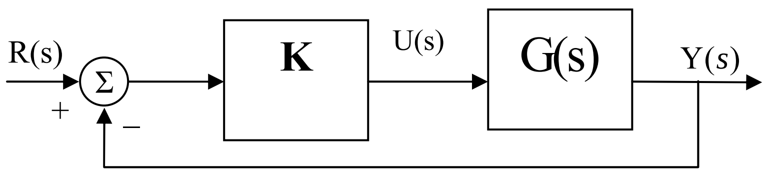
Δίδεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{3}{s^3 + 11s^2 + 14s - 80}$$

1) Να εξεταστεί το σύστημα ως προς την ευστάθεια με τη μέθοδο Routh.
2) Εάν το διάγραμμα Nyquist της G(s) έχει τη μορφή του Σχήματος (α) και εφαρμοστεί ο έλεγχος του Σχήματος (β), χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Nyquist να ευρεθεί για ποιές τιμές του K
   - το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές
   - το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασταθές προσδιορίζοντας τον αριθμό των ασταθών πόλων.
3) Εάν το K μεταβάλλεται κατά ±β%, β>0, να επιλεγεί το K ώστε το αντισταθμισμένο σύστημα να παραμένει ευσταθές για τη μέγιστη δυνατή μεταβολή του K. Να καθοριστεί ποιά είναι η μέγιστη μεταβολή που μπορεί να αντιμετωπίσει το αντισταθμισμένο σύστημα χωρίς να γίνει ασταθές.



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)

Θέμα 3ο

Δίδεται σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s)=\frac{s+3}{s^2(s+35)}$$

1. Να ευρεθούν τα σημεία θλάσης του γεωμετρικού τόπου των ριζών.
2. Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος αφού προσδιοριστούν
   - Περιοχές του πραγματικού άξονα που ανήκουν στον τόπο.
   - Γωνίες των ασυμπτώτων
   - Σημείο τομής των ασυμπτώτων
   - Σημεία τομής με το φανταστικό άξονα
3. Να προσδιοριστούν οι τιμές του K ώστε οι μιγαδικοί πόλοι p_i του αντισταθμισμένου συστήματος να έχουν

$$|\mathrm{Im}(p_i)| = \sqrt{3}\,|\mathrm{Re}(p_i)|.$$

4. Να εκτιμήσετε την επι τοις εκατό υπερπήδηση του αντισταθμισμένου συστήματος. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΡΟΣΟΧΗ

Κάθε ερώτημα βαθμολογείται μία (1) μονάδα.

Επιτρέπεται η χρήση του βιβλίου των Dorf & Bishop ή τυπολογίου δικής σας κατασκευής μεγέθους ενός φύλλου A4.

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

1) Η μήτρα ελεγξιμότητας είναι

$$P_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2a\text{-}10\\ 1 & 3+a\end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\det(P_c)=\det\begin{bmatrix}1 & 2a\text{-}10\\ 1 & 3+a\end{bmatrix}=13\text{-}a$$

η περιγραφή είναι ελέγξιμη για όλα τα a εκτός της τιμής a=13.
Η μήτρα παρατηρησιμότητας είναι

$$P_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \text{-}10 & 2a\end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\det(P_o)=\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ \text{-}10 & 2a\end{bmatrix}=2a$$

η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη για όλα τα a εκτός της τιμής a=0.

2) Θα είναι

$$G(s)=C[sI\text{-}A]^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+10 & \text{-}2a\\ \text{-}5\text{-}a & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{(s+10)(s+2)\text{-}2a(5+a)}\begin{bmatrix}s+2 & 2a\\ 5+a & s+10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{s+2+2a}{(s+10)(s+2)\text{-}2a(5+a)}$$

3) Εάν a=0, η μήτρα A γίνεται

$$A=\begin{bmatrix}\text{-}10 & 0\\ 5 & \text{-}2\end{bmatrix}$$

Η εξίσωση Lyapunov θα είναι

$$A^TP+PA=\begin{bmatrix}\text{-}10 & 5\\ 0 & \text{-}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{-}10 & 0\\ 5 & \text{-}2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{-}20p_1+10p_2 & -12p_2+5p_3\\ -12p_2+5p_3 & \text{-}4p_3\end{bmatrix}=-Q=-\begin{bmatrix}q_1 & q_2\\ q_2 & q_3\end{bmatrix}$$

Εάν ληφθεί

$$Q=4I_2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

προκύπτει το σύστημα

$$-20p_1 + 10p_2 = -4$$
$$-12p_2 + 5p_3 = 0$$
$$-4p_3 = -4$$

Από την Τρίτη εξίσωση προκύπτει

$$p_3=1$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$p_2 = \frac{5p_3}{12} = \frac{5}{12}$$

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$p_1 = \frac{10p_2 + 4}{20} = \frac{98}{240}$$

Η λύση της εξισώσεως Lyapunov συνεπώς είναι

$$P = \begin{bmatrix} \frac{98}{240} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\Delta_1 = \frac{98}{240} > 0$$

$$\Delta_2 = \det(P) = \frac{98}{240} - \frac{25}{144} > 0$$

η P είναι θετικά ορισμένη και το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

ΘΕΜΑ 2ο

1) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος ανοικτού βρόχου είναι

$$\psi(s)=s^3+11s^2+14s-80$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^3	1	14
s^2	11	-80
s	(11*14+80)/11=234/11	
s^0	-80	

Επειδή στην πρώτη στήλη υπάρχει μία αλλαγή προσήμου, το πολυώνυμο έχει μία ρίζα στο δεξιό ημιεπίπεδο και επομένως το σύστημα είναι ασταθές.

2) Θα ευρεθούν τα σημεία τομής του διαγράμματος Nyquist με τον πραγματικό άξονα. Θα είναι

$$G(j\omega)=\frac{3}{(-11\omega^2-80)+j(14\omega-\omega^3)}=\frac{3\left[(-11\omega^2-80)-j(14\omega-\omega^3)\right]}{(-11\omega^2-80)^2+(14\omega-\omega^3)^2}$$

Για να είναι Im{G(jω)}=0 πρέπει

$$14\omega-\omega^3=0$$

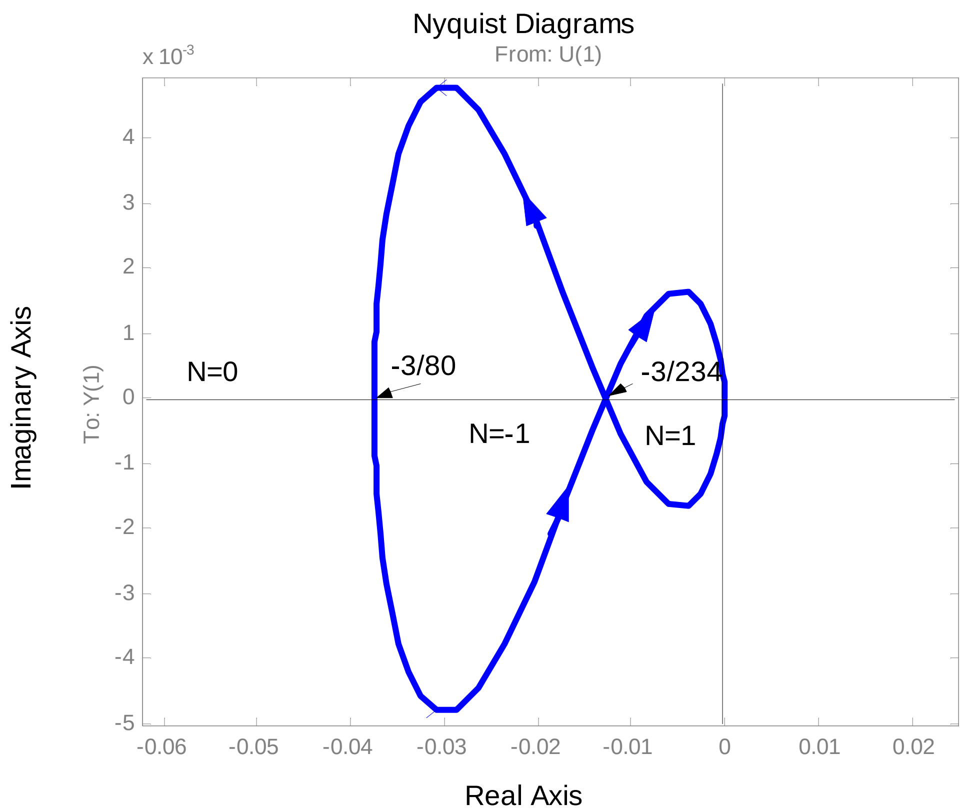
Για τη λύση ω=0, θα είναι

$$G(j0)=-\frac{3}{80}$$

Για τη λύση $\omega=\sqrt{14}$, θα είναι

$$G(j\sqrt{14})=\frac{3}{-11*14-80}=-\frac{3}{234}$$

Το διάγραμμα Nyquist της G(s) φαίνεται στο Σχήμα



Για

$$-\frac{1}{K}<-\frac{3}{80}$$

ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων του σημείου –1/K από το διάγραμμα Nyquist είναι N=0. Επειδή το N είναι ίσο με τον αριθμό των ασταθών πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου μείον τον αριθμό των ασταθών πόλων τού συστήματος ανοικτού βρόχου, δηλαδή

$$N=N_c-N_o$$

και N_o=1, προκύπτει

$$N_c = N_o + N = 1$$

και το σύστημα είναι ασταθές με ένα πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Για

$$-\frac{3}{80} < -\frac{1}{K} < -\frac{3}{234}$$

ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων του σημείου –1/K από το διάγραμμα Nyquist είναι N=-1. Επομένως

$$N_c = N_o + N = 0$$

και το σύστημα είναι ευσταθές μη έχοντας πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Για

$$-\frac{3}{234} < -\frac{1}{K} < 0$$

ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων του σημείου –1/K από το διάγραμμα Nyquist είναι N=1. Επομένως

$$N_c = N_o + N = 2$$

και το σύστημα είναι ασταθές έχοντας δύοπόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο.
Συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές εάν

$$-\frac{3}{80} < -\frac{1}{K} < -\frac{3}{234}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{80}{3} < K < \frac{234}{3}$$

3) Έστω K_N η ονομαστική τιμή του K. Θα είναι επομένως

$$K = K_N \left(1 + \frac{\beta}{100}\right)$$

Για τη μεγιστοποίηση του μέτρου του β θα πρέπει να είναι

$$\frac{80}{3} = K_N \left(1 - \frac{|\beta|}{100}\right)$$

$$\frac{234}{3} = K_N \left(1 + \frac{|\beta|}{100}\right)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις λαμβάνεται

$$K_N = \frac{\frac{234}{3} + \frac{80}{3}}{2} = \frac{314}{6}$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις κατά μέλη λαμβάνεται

$$K_N \frac{|\beta|}{100} = \frac{\frac{234}{3} - \frac{80}{3}}{2} = \frac{154}{6}$$

ή

$$\frac{|\beta|}{100} = \frac{154}{6} * \frac{6}{314} = 0.49$$

Επομένως η μέγιστη μεταβολή μπορεί να είναι ±49% για την κατάλληλη επιλογή της ονομαστικής τιμής του K.

ΘΕΜΑ 3^{o}

1) Τα σημεία θλάσης προκύπτουν από τους μηδενισμούς της συνάρτησης dG/ds. Θα είναι

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{s^2(s+35)-(s+3)(3s^2+70s)}{s^4(s+35)^2} = \frac{-2s^3-44s^2-210s}{s^4(s+35)^2}$$

Οι ρίζες του αριθμητή είναι

$$s_1=0$$

$$s_2=\frac{44-\sqrt{44^2-4*2*210}}{-4}=-7$$

$$s_2=\frac{44+\sqrt{44^2-4*2*210}}{-4}=-15$$

Για να είναι το s_i σημείο θλάσης του γεωμετρικού τόπου πρέπει

$$G(s_i)=-\frac{1}{K_i}, \quad K_i \geq 0.$$

Θα είναι

$$G(s_1)=\infty=-\frac{1}{K_i}, \quad K_i = 0.$$

$$G(s_2)=\frac{s+3}{s^2(s+35)}\Big|_{s=-7} = \frac{-4}{49*28} = -\frac{1}{343}, \quad K_2 = 343 \geq 0.$$

$$G(s_3)=\frac{s+3}{s^2(s+35)}\Big|_{s=-15} = \frac{-12}{225*20} = -\frac{1}{375}, \quad K_3 = 375 \geq 0.$$

Επομένως και οι τρείς ρίζες είναι σημεία θλάσης του γεωμετρικού τόπου.

2) Οι περιοχές του πραγματικού άξονα που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο είναι το διάστημα [-35,-3] επειδή προς τα δεξιά του έχει περιττό αριθμό πόλων και μηδενικών και το σημείο 0.
Οι γωνίες των ασυμπτώτων θα είναι

$$\theta_k = \frac{-180+k*360}{n-m} = \frac{-180+k*360}{2}, \quad k=0,1$$

οπότε

$$\theta_1=-90^o \quad \text{για} \quad k=0$$

$$\theta_2=90^o \quad \text{για} \quad k=1$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων θα είναι

$$\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i-\sum_{k=1}^{m} z_k}{n-m}=\frac{-35-(-3)}{2}=-16$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi_c(s)=D(s)+KN(s)=s^2(s+35)+K(s+3)=s^3+35s^2+Ks+3K$$

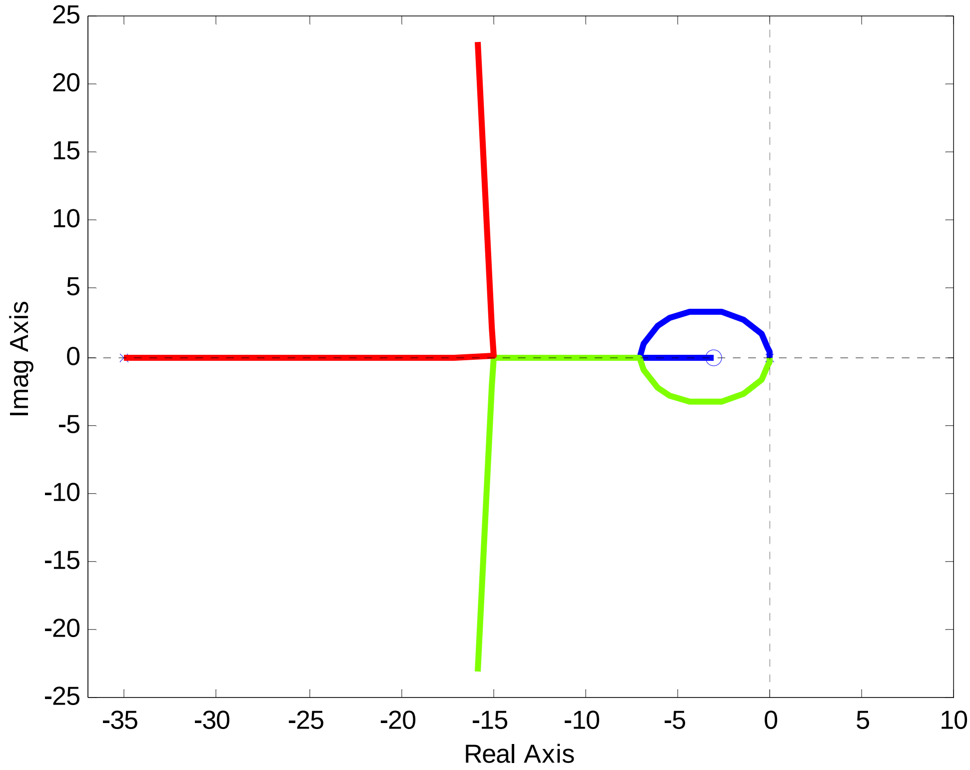
Εφαρμόζεται η διάταξη Routh

s^3	1	K
s^2	35	3K
s	32K/35	
s^0	3K	

Ο μηδενισμός της γραμμής s πραγματοποιείται για K=0. Οι ρίζες επάνω στο φανταστικό άξονα, εάν υπάρχουν, προκύπτουν από τις ρίζες του βοηθητικού πολυωνύμου

$$B(s)=(35s^2+3K)\Big|_{K=0}=35s^2$$

Η τομή του γεωμετρικού τόπου με το φανταστικό άξονα είναι η αρχή των συντεταγμένων και συμβαίνει όταν K=0.
Ο Γεωμετρικός τόπος των ριζών φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα.



3) Έστωσαν οι μιγαδικοί πόλοι του αντισταθμισμένου συστήματος $-a+ja\sqrt{3}$ και $-a-ja\sqrt{3}$ με $a>0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi_c(s)=s^3+35s^2+Ks+3K=(s+p)(s+a+ja\sqrt{3})(s+a-ja\sqrt{3})=s^3+(2a+p)s^2+(4a^2+2ap)s+4pa^2$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων προκύπτουν

$$2a+p=35$$

$$4a^2+2ap=K$$

$$4pa^2=3K$$

Από την πρώτη σχέση προκύπτει

$$p=35-2a$$

Από την τρίτη σχέση προκύπτει

$$K=\frac{4}{3}a^2(35-2a)$$

Αντικαθιστώντας τα p,K στη δεύτερη σχέση λαμβάνεται

$$4a^2+2a(35-2a)=\frac{4}{3}a^2(35-2a)$$

ή ισοδύναμα

$$8a^3-140a^2+210a=0$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν

$$a=0$$

$$a=\frac{140+\sqrt{140^2-32*210}}{16}=15.84$$

$$a=\frac{140-\sqrt{140^2-32*210}}{16}=1.657$$

Για a=0, p=-35. Αυτή είναι η περίπτωση του συστήματος ανοικτού βρόχου, καθώς προκύπτει K=0.

Για a=15.84 προκύπτουν

$$p=35-2a=3.32$$

$$K=4pa^2=1109$$

Για a=1.657 προκύπτουν

$$p=35-2a=31.69$$

$$K=4pa^2=116$$

4) Για την περίπτωση a=15.84 οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$p_1=-15.84+j27.44$$

$$p_2=-15.84-j27.44$$

$$p_3=-3.32$$

Για την περίπτωση a=1.657 οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$p_1=-1.657+j2.87$$

$$p_2=-1.657-j2.87$$

$$p_3=-31.69$$

Οι μιγαδικοί πόλοι του αντισταθμισμένου συστήματος δίδονται από τις ρίζες του πολυωνύμου

$$D(s)=(s+a+ja\sqrt{3})(s+a-ja\sqrt{3})=s^2+2as+4a^2=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$$

Επιλύοντας ως προς ζ, ω_n, λαμβάνονται

$$\omega_n=2a$$

$$\zeta=(2a)/(2\omega_n)=0.5$$

Εάν το αντισταθμισμένο σύστημα είχε μόνο αυτούς τους πόλους χωρίς μηδενικά, η επί τοις εκατό υπερπήδηση θα ήταν

$$M_p=\exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]=\exp\left[\frac{-0.5\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]=0.163$$

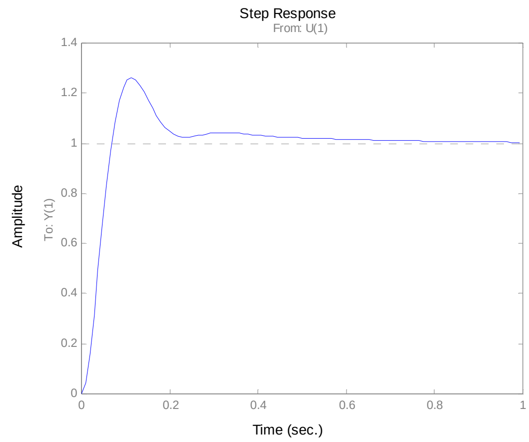
ή 16.3%.

Η εκτίμηση αυτή αναμένεται να είναι καλή προσέγγιση της επί τοις εκατό υπερπήδησης του αντισταθμισμένου συστήματος εάν οι μιγαδικοί πόλοι είναι επικρατούντες.

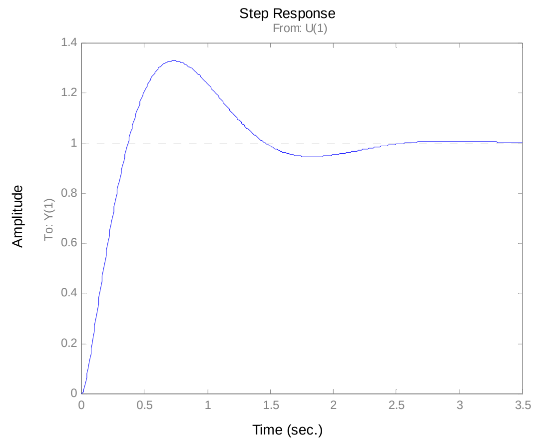
Για την περίπτωση a=15.84 ο τρίτος πόλος είναι στη θέση s = -3.32 ενώ το μηδενικό στη θέση s = -3. Καθώς ο πόλος είναι κοντά στο μηδενικό οι μιγαδικοί πόλοι μπορούν να θεωρηθούν επικρατούντες.

Για την περίπτωση a=1.657 ο τρίτος πόλος είναι στη θέση s = -31.69. Επειδή το πραγματικό μέρος του πόλου αυτού είναι μικρότερο του πενταπλάσιου του πραγματικού μέρους των μιγαδικών πόλων, οι μιγαδικοί πόλοι μπορούν να θεωρηθούν επικρατούντες.

Στα ακόλουθα Σχήματα φαίνονται οι βηματικές αποκρίσεις του συστήματος κλειστού βρόχου για τις ανωτέρω δύο περιπτώσεις.



$a=15.84$
$M_p=26\%$



$a=1.657$
$M_p=33\%$