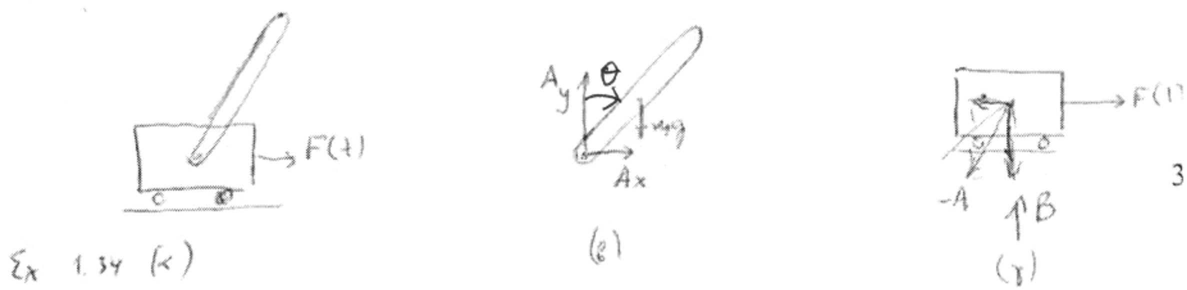
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

Τρύφων Κουσιουρής

Ακ. Έτος 2005-2006

ΠΡΟΒΛΗΜΑ



Σχήμα

Ας θεωρηθεί το σύστημα του ανεστραμμένου εκκρεμούς που φαίνεται στο Σχήμα (α). Ράβδος μήκους 2L, με μάζα m ομοιόμορφα κατανεμημένη κατά μήκος της και ροπή αδρανείας J ως προς το κέντρο μάζας της (το μέσον της ράβδου) μπορεί να περιστραφεί περί οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι σταθερά στερεωμένος σε φορείο μάζης M το οποίο κινείται επάνω σε ευθεία γραμμή του οριζοντίου επιπέδου χωρίς τριβές. Μετράται η μετατόπιση x του φορείου και η γωνία θ της ράβδου ως προς την κατακόρυφο.

A) Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος ως προς το διάνυσμα

$$\underline{\xi}(t)=\begin{bmatrix} x & \dot{x} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T.$$

B) Να γραμμικοποιηθεί το σύστημα στην περιοχή του σημείου $\underline{\xi}=\underline{0}$.

Γ) Να ευρεθεί η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς.

Δ) Να ευρεθούν οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς Θ(s)/F(s).

Λύση

Έστω A η δύναμη που ασκεί το φορείο στη ράβδο του εκκρεμούς, η οποία αναλύεται σε οριζόντια συνιστώσα A_x και κατακόρυφη συνιστώσα A_y. Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζης της ράβδου θα είναι

$$(x_m, y_m) = (x + L\eta\mu\theta, L\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή D' Alembert για τις οριζόντιες και κατακόρυφες δυνάμεις και τις ροπές στη ράβδο, λαμβάνονται

Οριζόντιες δυνάμεις:

$$A_x - m\frac{d^2}{dt^2}(x+L\eta\mu\theta) = 0$$

Κατακόρυφες δυνάμεις:

$$A_y - mg - m\frac{d^2}{dt^2}(L\sigma\upsilon\nu\theta) = 0$$

Ροπές:

$$-A_x L\sigma\upsilon\nu\theta + A_y L\eta\mu\theta - J\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

Από την αρχή δράσης-αντίδρασης του Νεύτωνα, που είναι ειδική περίπτωση της αρχής D' Alembert, η ράβδος θα ασκεί στο φορείο δύναμη –A. Έστω B η δύναμη που ασκεί το έδαφος στο φορείο. Αυτή θα είναι κατακόρυφη, επειδή δεν υπάρχουν τριβές. Εφαρμόζοντας την αρχή D' Alembert στις κατακόρυφες και οριζόντιες δυνάμεις, λαμβάνονται.

Οριζόντιες δυνάμεις:

$$F(t) - A_x - M\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Κατακόρυφες δυνάμεις:

$$-A_y - B = 0$$

Επιλύοντας ως προς A_x, A_y από και αντικαθιστώντας προκύπτουν οι εξισώσεις που περιγράφουν το μοντέλο ως εξής

$$F(t) = M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2}{dt^2}(x+L\eta\mu\theta)$$

$$-mL\sigma\upsilon\nu\theta\frac{d^2}{dt^2}(x+L\eta\mu\theta) + L\eta\mu\theta[mg + m\frac{d^2}{dt^2}(L\sigma\upsilon\nu\theta)] - J\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

Αναπτύσσοντας τις παραγώγους, οι εξισώσεις γίνονται.

$$F(t) = M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2x}{dt^2} - mL\,\eta\mu\theta\,(\dot{\theta})^2 + mL\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\ddot{\theta}$$

$$[-mL^2\sigma\upsilon\nu^2\theta - mL^2\eta\mu^2\theta - J]\ddot{\theta} + mgL\eta\mu\theta - mL^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta(\dot{\theta})^2 - mL\sigma\upsilon\nu\theta\,\ddot{x} +$$

$$+mL^2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\,(\dot{\theta})^2 = -J_o\,\ddot{\theta} + mgL\eta\mu\theta - mL\sigma\upsilon\nu\theta\,\ddot{x} = 0$$

όπου $J_o = J + mL^2$ είναι η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της. Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές με τις συνιστώσες του διανύσματος καταστάσεως, λαμβάνονται

$$(M+m)\dot{\xi}_2 + mL(\sigma\upsilon\nu\xi_3)\dot{\xi}_4 = F(t) + mL\,(\eta\mu\xi_3)\xi_4^2$$

$$mL\sigma\upsilon\nu\xi_3\dot{\xi}_2 + J_0\dot{\xi}_4 = mgL\eta\mu\xi_3$$

Επιλύοντας ως προς τις παραγώγους των συνιστωσών του διανύσματος καταστάσεως, λαμβάνονται

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{-J_o\xi_4^2 mL\eta\mu\xi_3 + m^2L^2 g\sigma\upsilon\nu\xi_3\eta\mu\xi_3}{-J_o(M+m) + m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3} + \frac{-J_o}{-J_o(M+m) + m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3}F = f_2(\underline{\xi},F)$$

$$\dot{\xi}_3 = \xi_4$$

$$\dot{\xi}_4 = \frac{\xi_4^2 m^2L^2\sigma\upsilon\nu\xi_3\eta\mu\xi_3 - (M+m)mgL\eta\mu\xi_3}{-J_o(M+m) + m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3} + \frac{mL\sigma\upsilon\nu\xi_3}{-J_o(M+m) + m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3}F = f_4(\underline{\xi},F)$$

Για F=0 το σημείο $\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi_4=0$ είναι σημείο ισορροπίας και το σύστημα μπορεί να γραμμικοποιηθεί στην περιοχή του. Θα είναι

$$\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}=\frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}=0$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial \xi_3}\right|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=(\ )\xi_4^2+(\ )F+\left\{\frac{m^2L^2g[\sigma\upsilon\nu^2\xi_3\text{-}\eta\mu^2\xi_3]}{[-J_o(M+m)+m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3]}+\frac{2m^4L^4g\sigma\upsilon\nu^2\xi_3\eta\mu^2\xi_3}{[-J_o(M+m)+m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3]^2}\right\}\Bigg|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=$$

$$=\frac{m^2L^2g}{-J_o(M+m)+m^2L^2}$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial \xi_4}\right|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=(\ )\xi_4=0$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial F}\right|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=\left.\frac{-J_o}{-J_o(M+m)+m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3}\right|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=\frac{-J_o}{-J_o(M+m)+m^2L^2}$$

Ομοίως για την f_4 θα έχουμε

$$\frac{\partial f_4}{\partial \xi_1}=\frac{\partial f_4}{\partial \xi_2}=0$$

$$\left.\frac{\partial f_4}{\partial \xi_3}\right|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=(\ )\xi_4^2+(\ )F\text{-}(M+m)mgL\left\{\frac{\sigma\upsilon\nu\xi_3[-J_o(M+m)+m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3]+2m^2L^2\sigma\upsilon\nu\xi_3\eta\mu^2\xi_3}{[-J_o(M+m)+m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3]^2}\right\}\Bigg|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}$$

$$=\frac{-(M+m)mgL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}$$

$$\left.\frac{\partial f_4}{\partial \xi_4}\right|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=(\ )\xi_4\Big|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=0$$

$$\left.\frac{\partial f_4}{\partial F}\right|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=\left.\frac{mL\sigma\upsilon\nu\xi_3}{-J_o(M+m)+m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3}\right|_{\substack{F=0\\ \underline{\xi}=0}}=\frac{mL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}$$

Οι εξισώσεις καταστάσεως του γραμμικοποιημένου συστήματος θα είναι

$$\dot{\underline{\xi}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{m^2L^2g}{-J_o(M+m)+m^2L^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dfrac{-(M+m)mgL}{-J_o(M+m)+m^2L^2} & 0\end{bmatrix}\underline{\xi}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{-J_o}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\\ 0\\ \dfrac{mL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\end{bmatrix}F$$

$$\underline{y}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\underline{\xi}$$

Η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς θα είναι

$$G(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0 & 0\\ 0 & s & \dfrac{-m^2L^2g}{-J_o(M+m)+m^2L^2} & 0\\ 0 & 0 & s & -1\\ 0 & 0 & \dfrac{(M+m)mgL}{-J_o(M+m)+m^2L^2} & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{-J_o}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\\ 0\\ \dfrac{mL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^2\left(s^2+\dfrac{(M+m)mgL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\right)}\begin{bmatrix}\left(s^2+\dfrac{(M+m)mgL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\right)+\dfrac{m^2L^2g}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\dfrac{mL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\\ s^2\dfrac{mL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\end{bmatrix}$$

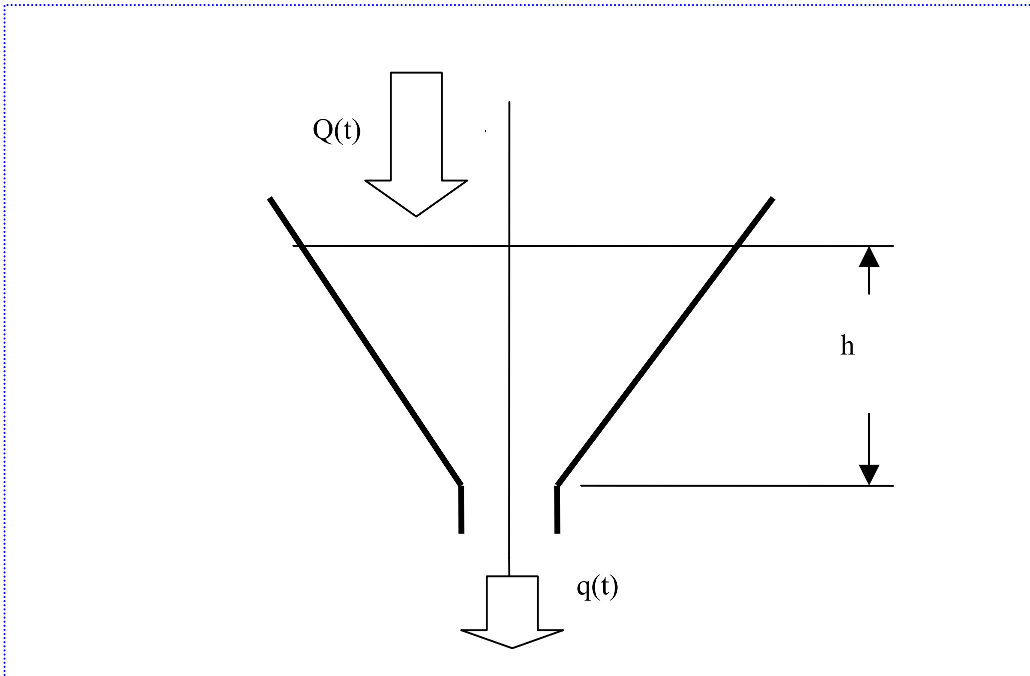
Θα είναι

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)}=\frac{s^2\dfrac{mL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}}{s^2\left(s^2+\dfrac{(M+m)mgL}{-J_o(M+m)+m^2L^2}\right)}=\frac{mL}{s^2(-J_o(M+m)+m^2L^2)+(M+m)mgL}$$

Παρατηρείται ότι η Θ(s)/F(s) δεν εμφανίζει μηδενικά, καθώς αυτά απλοποιούνται με πόλους ενώ οι πόλοι της είναι πραγματικοί και συμμετρικοί ως προς την αρχή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Για το ανεστραμμένο κωνικό δοχείο του Σχήματος η παροχή q(t) της εκροής είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του ύψους του υγρού εντός του δοχείου.



Σχήμα

A) Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος, εάν μετράται η διαφορική πίεση στη βάση του δοχείου σε σχέση με την ατμοσφαιρική πίεση.

B) Εάν είναι επιθυμητό το ύψος του υγρού στο δοχείο να είναι σταθερό (h_0), να γραφούν οι εξισώσεις του γραμμικοποιημένου μοντέλου

Γ) Να ευρεθεί η μοναδιαία βηματική απόκριση του γραμμικοποιημένου μοντέλου του συστήματος.

Δ) Να συγκρίνετε τις τελικές τιμές του ύψους του συστήματος και του γραμμικοποιημένου μοντέλου του.

Λύση

A) Η διαφορική πίεση στη βάση του δοχείου θα είναι

$$p=\rho g h$$

Ο όγκος του υγρού εντός του δοχείου

$$V=\pi\,(h\varepsilon\varphi\theta)^2\,h/3$$

Ο ρυθμός της αύξησης του όγκου του υγρού εντός του δοχείου θα είναι ίσος με την παροχή τροφοδοσίας μείον την παροχή εκροής, δηλαδή

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}=\frac{d}{dh}\left\{\frac{\pi\,\varepsilon\varphi^2\theta}{3}h^3\right\}\frac{dh}{dt}=\left\{\pi\,h^2\varepsilon\varphi^2\theta\right\}\frac{dh}{dt}=Q(t)\text{-}a\sqrt{h}$$

Εάν θεωρηθεί ως κατάσταση το ύψος h του υγρού εντός του δοχείου, οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος θα είναι

$$\frac{dh}{dt}=\frac{-a}{\pi h^2 \varepsilon\varphi^2\theta}h^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{\pi h^2 \varepsilon\varphi^2\theta}Q(t)=f(h,Q)$$

$$p=\rho g h$$

Β) Για να είναι το ύψος του υγρού h_0, η παροχή τροφοδοσίας πρέπει να είναι

$$Q_0(t)=a\sqrt{h_0}$$

Εάν τεθούν

$$x=h-h_0,\quad u=Q(t)-Q_0(t),\quad y=p-p_0,$$

οι εξισώσεις του γραμμικοποιημένου μοντέλου θα είναι

$$\dot{x}=Ax+Bu \qquad y=Cx$$

όπου

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{\substack{h=h_0\\Q=Q_0}}=-\frac{a}{\pi\varepsilon\varphi^2\theta}\left(-\frac{3}{2}\right)h^{\frac{-5}{2}}+\frac{1}{\pi\varepsilon\varphi^2\theta}\left(-2\right)Q(t)h^{-3}\bigg|_{\substack{h=h_0\\Q=Q_0}}=$$

$$\frac{3a}{2\pi\varepsilon\varphi^2\theta}h_0^{-5/2}+\frac{1}{\pi\varepsilon\varphi^2\theta}a\sqrt{h_0}(-2)h_0^{-3}=\frac{-a}{2\pi\varepsilon\varphi^2\theta}h_0^{-5/2}$$

$$B=\left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{\substack{h=h_0\\Q=Q_0}}=\left.\frac{1}{\pi h^2\varepsilon\varphi^2\theta}\right|_{\substack{h=h_0\\Q=Q_0}}=\frac{1}{\pi h_0^2\varepsilon\varphi^2\theta}$$

$$C=\rho g$$

Γ) Για το γραμμικοποιημένο μοντέλο θα είναι x(0)=0. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace, λαμβάνεται

$$(s+A)X(s)=BU(s)=\frac{B}{s}$$

ή ισοδύναμα

$$X(s)=\frac{B}{s(s+A)}=\frac{B/A}{s}-\frac{B/A}{(s+A)}=\frac{\frac{2\sqrt{h_0}}{a}}{s}-\frac{\frac{2\sqrt{h_0}}{a}}{(s+A)}$$

και

$$x(t)=\left(\frac{2\sqrt{h_0}}{a}-\frac{2\sqrt{h_0}}{a}e^{-At}\right)u(t)$$

Η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y=\rho g x$$

Δ) Καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο, το γραμμικοποιημένο σύστημα προβλέπει ύψος του υγρού εντός του δοχείου

$$h_L(\infty) = h_0 + \frac{2\sqrt{h_0}}{a}$$

Για το προς έλεγχο σύστημα, εάν εφαρμοστεί η βηματική διέγερση, η παροχή της εισόδου θα είναι

$$Q = Q_0 + 1$$

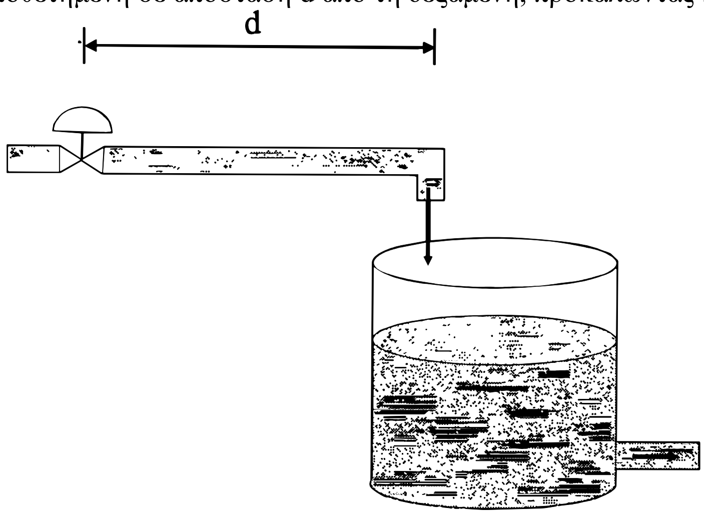
Το ύψος του υγρού εντός του δοχείου στη μόνιμη κατάσταση θα είναι

$$h_{NL}(\infty) = \left(\frac{Q_0+1}{a}\right)^2 = \frac{Q_0^2+1+2Q_0}{a^2} = h_0 + \frac{2\sqrt{h_0}}{a} + \frac{1}{a^2}$$

Παρατηρείται διαφορά ύψους η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι το εμβαδόν της οριζόντιας διατομής του κωνικού δοχείου μεταβάλλεται με το ύψος ενώ στο γραμμικοποιημένο μοντέλο θεωρείται σταθερό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η δεξαμενή του σχήματος τροφοδοτείται από ανοικτό κανάλι στο οποίο η ταχύτητα του υγρού v είναι ανεξάρτητη της παροχής Q. Η παροχή ελέγχεται από ηλεκτροβάνα η οποία είναι τοποθετημένη σε απόσταση d από τη δεξαμενή, προκαλώντας καθυστέρηση T=d/v.



Εάν η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{5}{s+1}$$

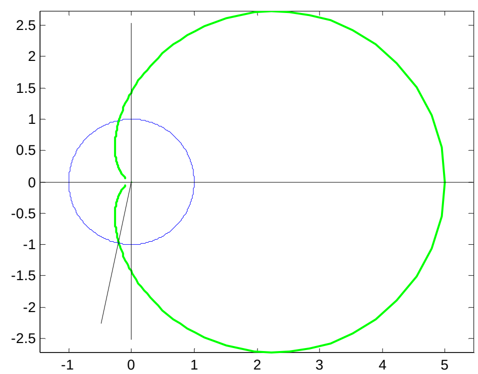
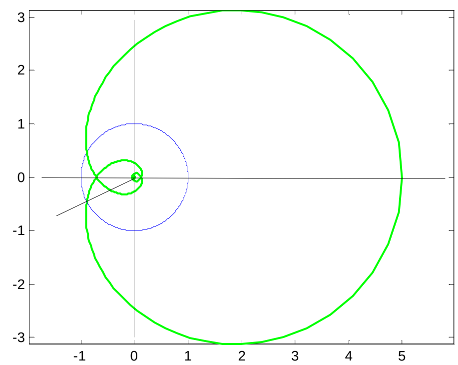
και του ελεγκτή

$$K(s) = \frac{10}{s+10}$$

α) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist του συστήματαος ανοικτού βρόχου για καθυστέρηση T της επιλογής σας.

β) Να ευρεθεί η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να τοποθετηθαί η ηλεκτροβάνα, εάν η ταχύτητα του υγρού είναι 1.5m/s.

Λύση

T=0	T=0.2
	

Το διάγραμμα Nyquist της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτου βρόχου

$$P(s)=G(s)K(s)=\frac{50}{(s+1)(s+10)}e^{-sT}$$

φαίνεται στα ανωτέρω σχήματα για T=0 και T=0.2sec αντίστοιχα. Καθώς ο παράγων e^{-sT} δεν αλλάζει το μέτρο της Q(s) και ελαττώνει τη φάση της, όταν T=0.2 ελαττώνεται το περιθώριο φάσης και εμφανίζεται σπειροειδές το διάγραμμα Nyquist στις υψηλές συχνότητες.

B) Από το διάγραμμα Nyquist της P(s) όταν T=0 προκύπτει ότι το περιθώριο φάσης είναι 80^o ή ισοδύναμα

$$\theta_m=1.4\text{rad}\,.$$

Η κυκλική συχνότητα ω_0 για την οποία το διάγραμμα Nyquist της P(s) τέμνει τήν περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου θα δίδεται από τη σχέση

$$\left|P(j\omega_0)\right|=\left|\frac{50}{(j\omega_0+1)(j\omega_0+10)}\right|=\frac{50}{\sqrt{\omega_0^2+1}\sqrt{\omega_0^2+100}}=1$$

ή ισοσύναμα

$$\omega_0^4+101\omega_0^2-2400=0$$

από την οποία προκύπτει

$$\omega_0^2=\frac{-101\pm\sqrt{101^2+4*2400}}{2}=\frac{-101\pm 140.716}{2}=19.858$$

Συνεπώς

$$\omega_0=4.456\text{rad/sec}$$

Επειδή

$$T=\frac{\theta_m}{\omega_0}=\frac{1.4}{4.456}=0.314\text{sec}$$

Η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να τοποθετηθεί ο ενεργοποιητής θα είναι

$$d_{max}=vT=1.5\text{m/sec}*0.314\text{sec}=0.47\text{m}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εάν η συνάρτηση μεταφοράς συστήματος είναι

$$G(s)=\frac{s-3}{(s-1)(s+a)}$$

1. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Routh να ευρεθεί εάν υπάρχουν τιμές του κέρδους του ελεγκτή

   $$K(s)=\frac{K(s+b)}{s}$$

   ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
2. Για ένα συνδυασμό a,b που το αντισταθμισμένο σύστημα μπορεί να ευσταθειοποιηθεί να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi_c(s)=s(s-1)(s+a)+K(s-3)(s+b)=s^3+(a+K-1)s^2+(-a+Kb-3K)s-3bK \qquad (1)$$

Κατασκευάζεται η διάταξη Routh ως εξής

s^3	1	$Kb-3K-a$
s^2	$a+K-1$	$-3Kb$
s	$\frac{(Kb-3K-a)(a+K-1)+3bK}{a+K-1}$	
s^0	$-3Kb$	

Για να είναι το αντισταθμισμένο σύστημα ευσταθές πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες

$$a+K-1>0 \qquad (2.\alpha)$$

$$-3Kb>0 \qquad (2.\beta)$$

$$(Kb-3K-a)(a+K-1)+3bK=f(K)=K^2(b-3)+K(ab-4a+2b+3)+a(1-a)>0 \qquad (2.\gamma)$$

Από τις σχέσεις (2.β) και (2.γ) προκύπτει

$$Kb-3K-a>0 \quad (3)$$

διαφορετικά άθροισμα αρνητικών αριθμών θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός.
Από τη σχέση (2.γ) προκύπτουν δύο περιπτώσεις.
1η Περίπτωση

$$K>0 \text{ και } b<0. \quad (4)$$

Από τη σχέση (2.α) πρέπει

$$K>1-a \quad (5)$$

Από τη σχέση (3), καθώς b-3<0, πρέπει

$$K<a/(b-3) \quad (6)$$

Και συνεπώς

$$a<0 \quad (7)$$

Οι σχέσεις (5) και (6) συναληθεύουν μόνο εάν 1-a<a/(b-3) ή ισοδύναμα καθώς b-3<0

$$(1-a)(b-3)-a=b-ab+2a-3>0 \quad (8)$$

Η σχέση (8) είναι αδύνατη καθώς άθροισμα αρνητικών αριθμών προκύπτει μεγαλύτερο του μηδενός. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει λύση του προβλήματος.

2η Περίπτωση

$$K<0 \text{ και } b>0 \quad (9)$$

Από τη σχέση (2.α) προκύπτει

$$a>1-K>1 \quad (10)$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει K(b-3)>a>1 και επειδή K<0

$$b<3 \quad (11)$$

Από τη σχέση (2.α) προκύπτει

$$K>1-a \quad (12)$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει καθώς b<3

$$K<a/(b-3) \quad (13)$$

Για να συναληθεύουν οι σχέσεις (12) και (13) πρέπει

$$1-a<a/(b-3) \quad (14)$$

ή ισοδύναμα καθώς b<3

$$a-(1-a)(b-3)=ab+3-b-2a<0 \quad (15)$$

Ας θεωρηθεί η σχέση (2.γ). Καθώς b-3<0, το τριώνυμο ως προς K θα ικανοποιεί τη σχέση όταν το K βρίσκεται μεταξύ των ριζών του. Αυτό συνεπάγεται ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου

$$\Delta=(ab-4a+2b+3)^2-4(b-3)a(1-a)>0 \quad (16)$$

Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι a(a-1)/(b-3), δηλαδή θετικό, και οι ρίζες είναι ομόσημες. Για να είναι και οι δύο αρνητικές πρέπει το άθροισμά τους να είναι αρνητικό, δηλαδή

$$ab-4a+2b+3<0 \tag{17}$$

Είναι

$$f(K)\Big|_{K=1-a} =(1-a)^2(b-3)+(1-a)(ab-4a+2b+3)+a(1-a)=3b(1-a)<0 \tag{18}$$

$$f(K)\Bigg|_{K=\frac{a}{b-3}} =\left(\frac{a}{b-3}\right)^2(b-3)+\left(\frac{a}{b-3}\right)(ab-4a+2b+3)+a(1-a)=\frac{2ab}{b-3}<0 \tag{19}$$

δηλαδή το (1-a) και το a/(b-3) είναι εκτός των ριζών του τριωνύμου. Για να ικανοποιείται η (12) και η (2.γ)πρέπει το 1-a να είναι μικρότερο από τη μικρότερη ρίζα του τριωνύμου και επειδή ισχύει η (18), πρέπει

$$(1-a)<-\frac{ab-4a+2b+3}{2(b-3)} \quad\Rightarrow\quad -ab+2a+4b-3>0 \tag{20}$$

Για να ικανοποιείται η (13) και η (2.γ)πρέπει το a/(b-3) να είναι μεγαλύτερο από τη μεγαλύτερη ρίζα του τριωνύμου και επειδή ισχύει η (19), πρέπει

$$\frac{a}{b-3}>-\frac{ab-4a+2b+3}{2(b-3)} \quad\Rightarrow\quad -ab+2a-2b-3>0 \tag{21}$$

Εάν επιλεγούν

$$a=8 \tag{22}$$

$$b=0.25 \tag{23}$$

το K πρέπει να είναι μεταξύ των ριζών του τριωνύμου, δηλαδή

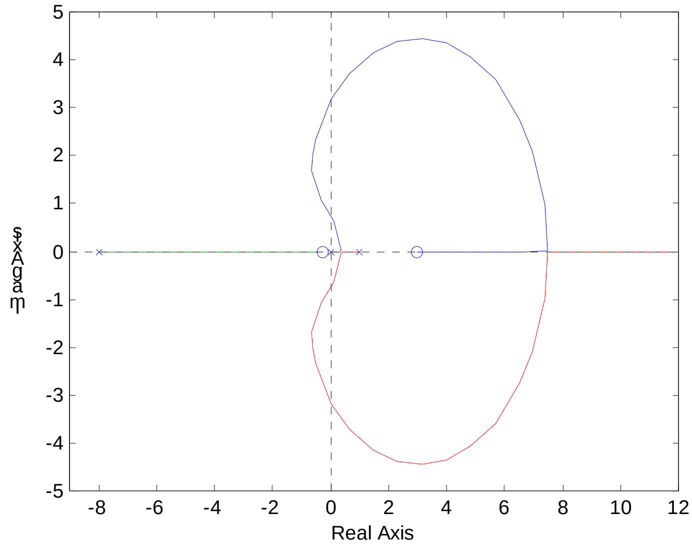
$$-6.5<K<-3.13 \tag{24}$$

$$1-8=-7<K \tag{25}$$

$$K<0 \tag{26}$$

και το K πρέπει να είναι στο διάστημα (-6.5,-3.13)

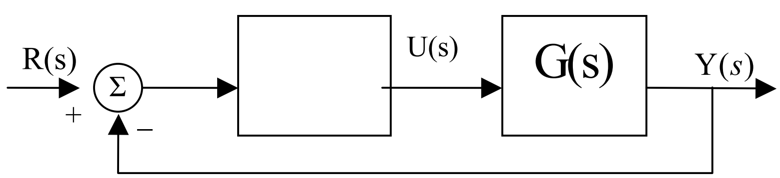
B) Ο γεωμετρικός τόπος των πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ
Δίδεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s)=\frac{1}{(s-a)^2}, \qquad a>0$$

και έλεγχο όπως στο Σχήμα.



A) Να δειχθεί ότι το σύστημα δεν μπορεί να ευσταθειοποιηθεί με αντισταθμιστή PI.
B) Να δειχθεί ότι το σύστημα μπορεί να ευσταθειοποιηθεί με αντισταθμιστή PID.

Λύση

A) Καθώς ο ελεγκτής PI μπορεί να γραφεί

$$K(s)=K+\frac{K_i}{s}=\frac{Ks+K_i}{s}=\frac{K(s+b)}{s}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi_c(s)=s(s-a)^2+K(s+b)=s^3-2as^2+(a^2+K)s+Kb$$

Επειδή a>0, οι συντελεστές του s^3 και s^2 είναι ετερόσημοι και το σύστημα κλειστού βρόχου δεν μπορεί να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, σύμφωνα με το θεώρημα του Stodola.

Β) Καθώς ο ελεγκτής PID μπορεί να γραφεί

$$K(s)=K_a+\frac{K_i}{s}+K_d s=\frac{K_a s+K_i+K_d s^2}{s}=\frac{K(s^2+bs+c)}{s}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi_c(s)=s(s-a)^2+K(s^2+bs+c)=s^3+(K-2a)s^2+(a^2+Kb)s+Kc$$

Για τον έλεγχο της ευστάθειας του αντισταθμισμένου συστήματος χρησιμοποιείται η διάταξη Routh.

s^3	1	a^2+Kb
s^2	$K-2a$	Kc
s	$\frac{(K-2a)(a^2+Kb)-Kc}{K-2a}$	
s^0	Kc	

Για ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες

$$K-2a>0$$

$$Kc>0$$

$$(K-2a)(a^2+Kb)-Kc=K^2b+K(a^2-2ab-c)-2a^3>0$$

Θεωρώντας K>0, c>0, από την πρώτη ανισότητα λαμβάνεται

$$K>2a$$

Θεωρώντας b>0, η Τρίτη ανισότητα επαληθεύεται όταν το K ευρίσκεται εκτός των ριζών του τριωνύμου $f(x)=x^2b+x(a^2-2ab-c)-2a^3$. Επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta=(a^2-2ab-c)^2+8a^3b>0$$

αυτό θα έχει δύο πραγματικές ρίζες και μάλιστα ετερόσημες καθώς το γινόμενο των ριζών είναι αρνητικό. Συνεπώς για

$$K>\mathrm{Max}\left\{2a,\frac{-(a^2-2ab-c)+\sqrt{(a^2-2ab-c)^2+8a^3b}}{2b}\right\}$$

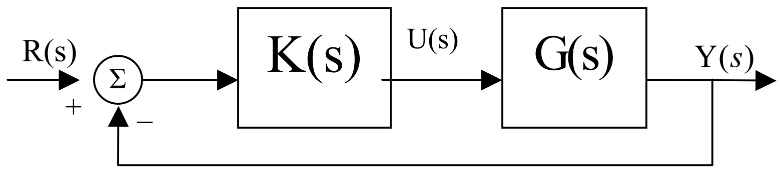
το αντισταθμισμένο σύστημα θα είναι ευσταθές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίδεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s)=\frac{-s+2}{(s+1)^2}$$

και έλεγχο όπως στο Σχήμα.



Να προσδιοριστεί ελεγκτής

$$K(s)=K\frac{s-z}{s-p}$$

ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να εμφανίζει μηδενικό σφάλμα σε βηματικές διεγέρσεις.

Λύση
Εάν

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)K(s)$$

το σφάλμα μόνιμης κατάστασης σε βηματική διέγερση θα είναι

$$e_{ss}(\beta\eta\mu)=\frac{1}{1+K_p}$$

Για να μηδενίζεται το e_{ss}(βημ) πρέπει να απειρίζεται το K_p και συνεπώς η G(s)K(s) να έχει πόλο στο 0. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι

$$p=0$$

Για να εφαρμόζεται το θεώρημα της τελικής τιμής και να ισχύουν τα ανωτέρω πρέπει το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi_c(s)=s(s+1)^2+K(-s+2)(s-z)=s^3+(2-K)s^2+(1+2K+2Kz)s-2Kz$$

για τη μελέτη της ευστάθειας του αντισταθμισμένου συστήματος χρησιμοποιείται η διάταξη Routh.

s^3	1	$1+2K+2Kz$
s^2	$2-K$	$-2Kz$
s	$\frac{(2-K)(1+2K+2Kz)+2Kz}{2-K}$	
s^0	$-2Kz$	

Για ασυμπτωτική ευστάθεια απαιτείται η ικανοποίηση των ακόλουθων ανισοτήτων

$$2\text{-}K>0$$

$$-2Kz>0$$

$$(2\text{-}K)(1+2K+2Kz)+2Kz=K^2(-2z-2)+K(6z+3)+2>0$$

Από την πρώτη ανισότητα λαμβάνεται

$$K<2$$

Από τη δεύτερη ανισότητα προκύπτει $Kz<0$. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις.

A) $K>0$ και επομένως $z<0$.

Από την τρίτη ανισότητα το τριώνυμο ως προς K πρέπει να είναι θετικό.

A1) Εάν $2z+2>0$, ή ισοδύναμα $z>-1$, το τριώνυμο έχει αρνητικό γινόμενο ριζών. Αυτό σημαίνει ότι έχει πραγματικές και ετερόσημες ρίζες. Καθώς ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικός, η ανισότητα θα ισχύει μεταξύ των ριζών του τριωνύμου.Τελικά πρέπει

$$0<K<\mathrm{Min}\left\{2,\frac{6z+3+\sqrt{(6z+3)^2+8(2z+2)}}{2(2z+2)}\right\}$$

A2) Εάν $2z+2<0$, ή ισοδύναμα $z<-1$, ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του τριωνύμου είναι θετικός και η ανισότητα θα ισχύει πάντοτε, εάν το τριώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες, ή θα ισχύει εκτός των ριζών, εάν το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta=(6z+3)^2+8(2z+2)=36z^2+52z+25>0$$

επειδή το τριώνυμο του z έχει μιγαδικές ρίζες. Συνεπώς η Τρίτη ανισότητα θα ισχύει εκτός των ριζών του τριωνύμου του K. Καθώς

$$6z+3<6z+6=3(2z+2)<0$$

το τριώνυμο του K θα έχει θετικό γινόμενο ριζών και αρνητικό άθροισμα ριζών. Επομένως και οι δύο ρίζες θα είναι αρνητικές και η ευστάθεια εξασφαλίζεται εάν

$$0<K<2.$$

B) $K<0$ και συνεπώς $z>0$.

Το τριώνυμο του K έχει θετικό άθροισμα ριζών και αρνητικό γινόμενο ριζών. Επομένως έχειδύο πραγματικές ετερόσημες ρίζες. Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του είναι αρνητικός, η ανισότητα θα ισχύει μεταξύ των ριζών του τριωνύμου του K, δηλαδή

$$\frac{6z+3-\sqrt{(6z+3)^2+8(2z+2)}}{2(2z+2)}<K<\frac{6z+3+\sqrt{(6z+3)^2+8(2z+2)}}{2(2z+2)}$$

Οι ανισότητες συναληθεύουν στο διάστημα

$$\frac{6z+3-\sqrt{(6z+3)^2+8(2z+2)}}{2(2z+2)}<K<0$$

Από την ανωτέρω ανάλυση, λαμβάνοντας

$$z=-0.5$$

$$0<K<\mathrm{Min}\left\{2,\frac{6(-0.5)+3+\sqrt{(6(-0.5)+3)^2+8(2(-0.5)+2)}}{2(2(-0.5)+2)}=1.414\right\}$$

Λαμβάνοντας K=1, ο ελεγκτής θα είναι

$$K(s)=\frac{s+0.5}{s}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίδεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

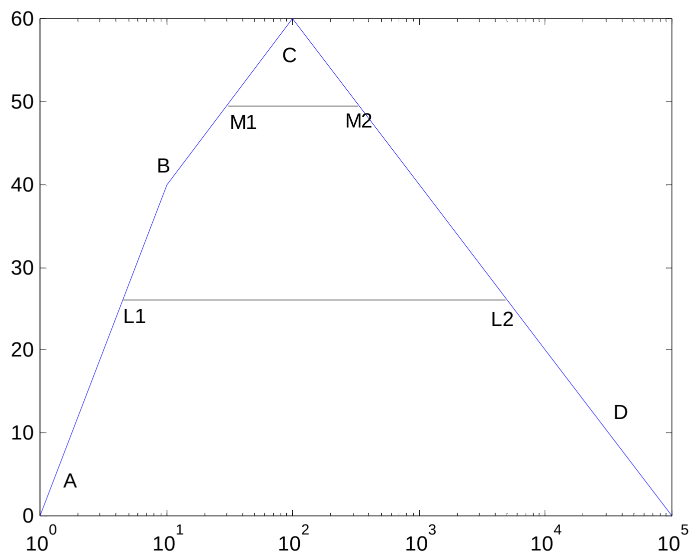
$$G(s)=K\frac{s^2}{(s+a)(s^2+bs+c)}$$

1. Να σχεδιαστεί το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους της G(s) εάν είναι γνωστό ότι δεν διαθέτει οριζόντιο τμήμα. Να γραφούν οι σχέσεις τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι a,b,c.
2. Εάν στο σύστημα εφαρμοστεί η διέγερση

   u(t)=10*ημ(100t)+10*ημ(1600t)

   και το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους της G(s) του ερωτήματος (1) χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη των πλατών των συνιστωσών της y(t) στη μόνιμη κατάσταση, να γραφεί για ποιές σχέσεις των παραμέτρων a,b,c τα πλάτη αυτά είναι ίσα (για όλες τις δυνατές περιπτώσεις) και να επιλεγούν τιμές των a,b,c ώστε να συμβαίνει αυτό σε κάθε περίπτωση.

Λύση



Ο παράγοντας s^2 είναι ευθεία με κλίση 40db/δεκάδα. Εάν η G(s) έχει τρείς διακεκριμένους πραγματικούς πόλους, το ασυμπτωτικό διάγραμμα θα έχει οριζόντιο τμήμα, το οποίο είναι μη αποδεκτό. Άρα η G(s) θα έχει διπλό πραγματικό πόλο ή μιγαδικούς πόλους από τον δευτεροβάθμιο παράγοντα.
Εάν η διακρίνουσα

$$\Delta=b^2-4c\leq 0,$$

ο δευτεροβάθμιος όρος έχει δύο μιγαδικές ρίζες ή διπλή πραγματική (τα ασυμπτωτικά διαγράμματα δεν διαφέρουν). Το σημείο θλάσης για τις μιγαδικές ρίζες θα είναι στην κυκλική συχνότητα $\sqrt{c}$ ενώ για τον πρωτοβάθμιο παράγοντα το σημείο θλάσης θα είναι στην κυκλική συχνότητα a. Για να μην έχει το διάγραμμα οριζόντιο τμήμα θα πρέπει

$$\sqrt{c}\geq a$$

Στην περίπτωση αυτή θα ισχύουν οι ανισότητες

$$\sqrt{c}\geq a \quad \text{και} \quad b^2-4c\leq 0$$

Εάν

$$\Delta=b^2-4c>0,$$

ο δευτεροβάθμιος παράγοντας έχει δύο πραγματικές ρίζες και συνεπώς γράφεται $(s+p_1)(s+p_2)$ με $p_1<p_2$. Για να μην έχει οριζόντιο τμήμα το διάγραμμα, το a πρέπει να ταυτίζεται με το p_2.
Στην περίπτωση αυτή θα ισχύουν οι σχέσεις

$$a=\frac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \quad \text{και} \quad b^2-4c>0$$

Το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode της G(s) θα έχει τη μορφή του σχήματος.

B) Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας για τις δύο ημιτονοειδείς διεγέρσεις, η έξοδος του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση θα είναι

$$y(t)=10*|G(j100)|ημ(100t+arg\{G(j100)\})+10*|G(j1600)|ημ(1600t\ arg\{G(j1600)\})$$

Για να είναι τα πλάτη των δύο συνιστωσών ίσα πρέπει να ισχύει

$$|G(j100)|= |G(j1600)|$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι οι εικόνες των κυκλικών συχνοτήτων 100 και 1600 στην ίδια τεταγμένη στο ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode. Δύο περιπτώσεις μπορούν να συμβούν

1. Η κυκλική συχνότητα 100 είναι μικρότερη από την μικρότερη κυκλική συχνότητα θλάσης $ω_{θ1}$ (Σημείο L1 στο σχήμα). Για να ισχύει η ισότητα των πλατών θα πρέπει

$$40(λογ_{10}ω_{θ1}\text{-}λογ_{10}100)+20(λογ_{10}ω_{θ2}-λογ_{10}ω_{θ1})-20(λογ_{10}1600-λογ_{10}ω_{θ2})=0$$

2. Η κυκλική συχνότητα 100 είναι μεγαλύτερη από την μικρότερη κυκλική συχνότητα θλάσης $ω_{θ1}$ (Σημείο M1 στο σχήμα). Για να ισχύει η ισότητα των πλατών θα πρέπει

$$20(λογ_{10}ω_{θ2}-λογ_{10}100)-20(λογ_{10}1600-λογ_{10}ω_{θ2})=0$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{ω_{θ2}}{100}=\frac{1600}{ω_{θ2}}$$

από την οποία προκύπτει

$$ω_{θ2}=400$$

Εάν επιλεγούν μιγαδικοί πόλοι μία λύση είναι ως εξής:
Από την $ω_{θ2}$=400 προκύπτει c=160000
Από την $ω_{θ1}$=<100 μπορεί να επιλεγεί $ω_{θ1}$=a=50
Από την $Δ<0$, $b^2<4c$ και μπορεί να ληφθεί b=100.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίδεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

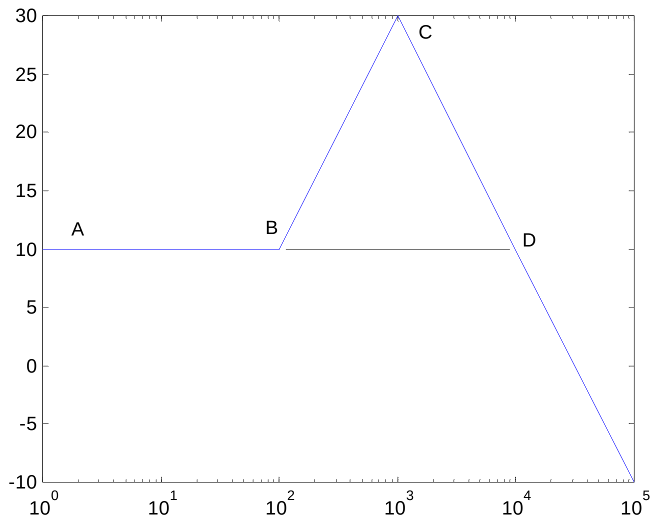
$$G(s)=K\frac{(s+a)}{(s^2+bs+c)}$$

1. Να σχεδιαστεί το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους της G(s) εάν είναι γνωστό ότι διαθέτει τμήμα με θετική κλίση και δεν διαθέτει οριζόντιο τμήμα για κυκλικές συχνότητες μεγαλύτερες από το μικρότερο σημείο θλάσης. Να γραφούν οι σχέσεις τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι a,b,c.
2. Εάν στο σύστημα εφαρμοστεί η διέγερση

$$u(t)=10*ημ(100t)+10*ημ(1600t)$$

και το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους της G(s) του ερωτήματος (1) χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη των πλατών των συνιστωσών της y(t) στη μόνιμη κατάσταση, να γραφεί για ποιές σχέσεις των παραμέτρων a,b,c τα πλάτη αυτά είναι ίσα (για όλες τις δυνατές περιπτώσεις) και να επιλεγούν τιμές των a,b,c ώστε να συμβαίνει αυτό σε κάθε περίπτωση.

Λύση



Ο πρωτοβάθμιος όρος του αριθμητή έχει κυκλική συχνότητα θλάσης ω_z=a. Ο δευτεροβάθμιος όρος στον παρονομαστή έχει μία κυκλική συχνότητα θλάσης $\omega_{p1}=\sqrt{c}$ εάν έχει μιγαδικές ρίζες ή δύο κυκλικές συχνότητες θλάσης $\hat{\omega}_{p1}, \hat{\omega}_{p2}$ εάν έχει πραγματικές ρίζες.

Άν ο δευτεροβάθμιος όρος στον παρονομαστή έχει πραγματικές ρίζες και $\text{Min}\left\{\hat{\omega}_{p1}, \hat{\omega}_{p2}\right\} < \omega_z$, το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode δεν θα έχει τμήμα με θετική κλίση και η περίπτωση αυτή απορρίπτεται. Εάν τα $\hat{\omega}_{p1}, \hat{\omega}_{p2}$ είναι διακεκριμένα, στο μεταξύ τους διάστημα το διάγραμμα θα είναι οριζόντιο και η περίπτωση αυτή απορρίπτεται. Επομένως ο παρονομαστής θα έχει μιγαδικές ρίζες ή διπλή πραγματική και το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode της G(s) φαίνεται στο σχήμα. Οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται είναι

$$\sqrt{c} \geq a \quad \text{και} \quad b^2\text{-}4c \leq 0$$

B) Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας για τις δύο ημιτονοειδείς διεγέρσεις, η έξοδος του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση θα είναι

$$y(t)=10^*|G(j100)|\eta\mu(100t+\arg\{G(j100)\})+10^*|G(j1600)|\eta\mu(1600t\ \arg\{G(j1600)\})$$

Για να είναι τα πλάτη των δύο συνιστωσών ίσα πρέπει να ισχύει

$$|G(j100)|= |G(j1600)|$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι οι εικόνες των κυκλικών συχνοτήτων 100 και 1600 στην ίδια τεταγμένη στο ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode. Τρείς περιπτώσεις μπορούν να συμβούν

1. Η κυκλική συχνότητα 100 είναι μικρότερη από την μικρότερη κυκλική συχνότητα θλάσης ω_z (Σημείο B στο σχήμα). Για να ισχύει η ισότητα των πλατών θα πρέπει

$$0\times(\lambda o\gamma_{10}\omega_z\text{-}\lambda o\gamma_{10}100)+20\times(\lambda o\gamma_{10}\omega_p-\lambda o\gamma_{10}\omega_z)-20(\lambda o\gamma_{10}1600-\lambda o\gamma_{10}\omega_p)=0$$

2. Η κυκλική συχνότητα 100 είναι μεγαλύτερη από την μικρότερη κυκλική συχνότητα θλάσης ω_z (Σημείο B στο σχήμα). Για να ισχύει η ισότητα των πλατών θα πρέπει

$$20(\lambda o\gamma_{10}\omega_p-\lambda o\gamma_{10}100)-20(\lambda o\gamma_{10}1600-\lambda o\gamma_{10}\omega_p)=0$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\omega_p}{100}=\frac{1600}{\omega_p}$$

από την οποία προκύπτει

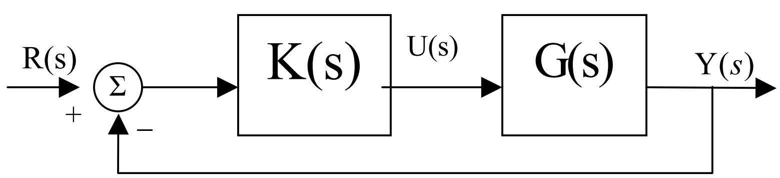
$$\omega_p = 400$$

3. Η κυκλική συχνότητα 1600 είναι μικρότερη από την μικρότερη κυκλική συχνότητα θλάσης ω_z (Σημείο Β στο σχήμα). Η ισότητα των πλατών θα ισχύει χωρίς περιορισμούς.

Εάν επιλεγεί η τρίτη περίπτωση, θα είναι:
Από την ω_z>1600 προκύπτει a>1600. είναι δυνατόν να ληφθεί a=2000.
Από την $\sqrt{c} \geq a$ =2000 μπορεί να επιλεγεί $c=5x10^6$.
Από την Δ<0, $b^2<4c$ και μπορεί να ληφθεί b=100.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ
Στο σύστημα ελέγχου του Σχήματος ο ελεγκτής σχεδιάστηκε για την ονομαστική τιμή $G_0(s)$ της G(s) ώστε η συμπληρωματική συνάρτηση ευαισθησίας να είναι

$$T_0(s)=\frac{100}{s^2+20s+100}$$



α) Να προσδιοριστεί το σφάλμα μόνιμης κατάστασης σε μοναδιαία βηματική διέγερση.
Β) Να προσδιοριστεί το πλάτος της απόκρισης y(t) στη μόνιμη κατάσταση, εάν η διέγερση είναι ημιτονοειδής με κυκλική συχνότητα ω.
Γ) Εάν

$$G(s)=G_0(s)[1+M(s)]$$

όπου η μεταβολή είναι ευσταθής και

$$|M(j\omega)| \leq \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+16}}$$

να προσδιοριστεί το μέγιστο πλάτος του ερωτήματος (Β) για όλη την οικογένεια των προς έλεγχο συστημάτων και η κυκλική συχνότητα στην οποία συμβαίνει αυτό.

Λύση

A) Η συμπληρωματική συνάρτηση ευαισθησίας θα είναι

$$T_0(s)=1-S_0(s)=1-\frac{1}{1+G_0(s)K(s)}=\frac{G_0(s)K(s)}{1+G_0(s)K(s)}=H_0(s)$$

όπου H(s) η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου. Για μοναδιαία βηματική διέγερση θα είναι

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)[1-H_0(s)]=\frac{1}{s}[1-H_0(s)]=\frac{1}{s}\frac{s^2+20s}{s^2+20s+100}$$

Επειδή η sE(s) έχει όλους τους πόλους της στο αριστερό ημιεπίπεδο, από το θεώρημα της τελικής τιμής λαμβάνεται

$$\lim_{t\to\infty} r(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s^2+20s}{s^2+20s+100}=0$$

B) Στη μόνιμη κατάσταση η έξοδος του συστήματος θα είναι ημιτονοειδής συνάρτηση της ίδιας συχνότητας με την είσοδο και πλάτος πολλαπλασιασμένο επί το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς στην κυκλική συχνότητα της διέγερσης. Καθώς η $H_0(s)$ έχει μέτρο

$$\left|H_0(j\omega)\right|=\left|\left|\frac{100}{s^2+20s+100}\right|\right|_{s=j\omega}=\frac{100}{\sqrt{(100-\omega^2)^2+400\omega^2}}=\frac{100}{100+\omega^2}$$

Καθώς η συνάρτηση του μέτρου είναι μονοτόνως φθίνουσα, το μέγιστο πλάτος θα εμφανίζεται στην κυκλική συχνότητα ω=0 και θα είναι ίσο με A, όπου A το πλάτος της διέγερσης.

Γ) Καθώς

$$H_0(s)=\frac{G_0(s)K(s)}{1+G_0(s)K(s)}=\frac{100}{s^2+20s+100}$$

θα είναι

$$G_0(s)K(s)=\frac{100}{s^2+20s}$$

και θα ισχύει

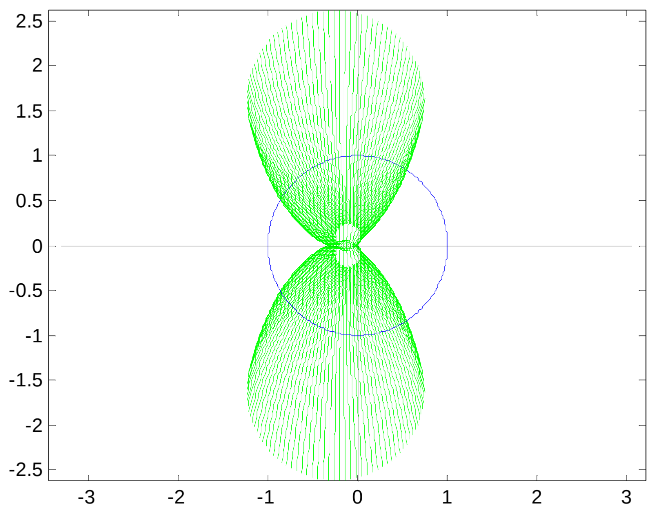
$$\left|G(j\omega)K(j\omega)-G_0(j\omega)K(j\omega)\right|=\left|\frac{100}{(j\omega)^2+20j\omega}\right|\left|M(j\omega)\right|\leq\frac{100}{\sqrt{400+\omega^2}\sqrt{16+\omega^2}}=R$$

δηλαδή το G(jω)K(jω) θα βρίσκεται εντός κύκλου με κέντρο το σημείο G_0(jω)K(jω) και ακτίνα R.
Με το κάτωθι πρόγραμμα σε περιβάλλον MATLAB

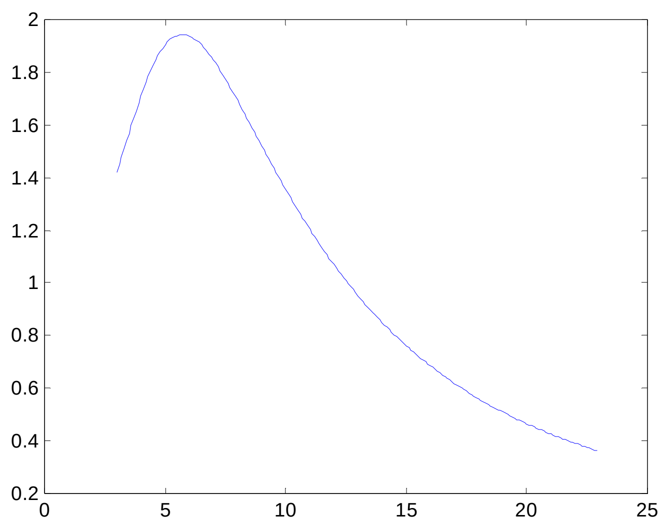
```
clear all
for K=1:200
   zt(K)=exp(i*pi*(K-1)/199);
   ztr(K)=real(zt(K));
   zti(K)=imag(zt(K));
   end
```

```
for I=1:200
   omega(I)=3+0.1*(I-1);
   center(I)=100/(-omega(I)^2+20*i*omega(I));
   radius(I)=100/sqrt(400+omega(I)^2)/sqrt(16+omega(I)^2);
for K=1:100
   t(I,K)=center(I)+radius(I)*exp(i*2*pi*(K-1)/99);
   h(I,K)=abs(t(I,K)/(1+t(I,K)));
   tr(I,K)=real(t(I,K));
   ti(I,K)=imag(t(I,K));
end
end
plot(tr,ti,'g',ztr,zti,'b',tr,-ti,'g',ztr,-zti,'b')
axis equal
```

κατασκευάζεται η ζώνη στην οποία βρίσκεται το G(jω)K(jω) όπως στο ακόλουθο σχήμα.



Για κάθε κυκλική συχνότητα ω προσδιορίζεται η μέγιστη τιμή του μέτρου της H(jω) που εμφανίζεται στην περιφέρεια του κύκλου. Το διάγραμμα του μέγιστου μέτρου συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



από το οποίο προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή είναι 1.944 και συμβαίνει όταν ω=5.75 rad/sec.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Z, να προδιοριστεί η ακολουθία y(k) η οποία ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών

$$y(k+2)-1.5y(k+1)+0.5y(k)=u(k+1)$$

όπου u(k) είναι η μοναδιαία βηματική απόκριση για k=0, y(0)=0.5 και y(-1)=1.

Λύση

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Z λαμβάνεται

$$z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)-1.5[zY(z)-zy(0)]+0.5Y(z)=zU(z)-zu(0) \qquad (1)$$

Για την εύρεση της y(1) εφαρμόζεται η αναδρομική σχέση για k=-1.

$$y(1)=1.5y(0)-0.5y(-1)+u(0)=0.75-0.5+1=1.25 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην (1), λαμβάνεται

$$(z^2-1.5z+0.5)Y(z)=0.5z^2+1.25z-0.75z+z\frac{z}{z-1}-z=0.5z^2+0.5z+\frac{z}{z-1} \qquad (3)$$

Επιλύοντας ως προς Y(z) θα είναι

$$Y(z)=\frac{0.5z^2+0.5z+\frac{z}{z-1}}{(z^2-1.5z+0.5)}=\frac{0.5z(z^2+1)}{(z-1)^2(z-0.5)} \qquad (4)$$

Αναλύοντας την Y(z)/z σε απλά κλάσματα, λαμβάνεται

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{K_1}{z-0.5}+\frac{K_2}{z-1}+\frac{K_3}{(z-1)^2}=\frac{2.5}{z-0.5}+\frac{-2}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2} \qquad (5)$$

ή ισοδύναμα

$$Y(z)=\frac{2.5z}{z-0.5}+\frac{-2z}{z-1}+\frac{2z}{(z-1)^2} \qquad (6)$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z η y(k) προκύπτει

$$y(k)=2.5(0.5)^k+2k-2 \qquad (7)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Z,

A) Να ευρεθεί ο μέγιστος και ο ελάχιστος αριθμός χωρίων, στα οποία διαιρείται ένα επίπεδο από n ευθείες που ανήκουν σ' αυτό.

B) Να ευρεθεί ο μέγιστος αριθμός χωρίων, στα οποία διαιρείται ο τριδιάστατος χώρος από n επίπεδα που ανήκουν σ' αυτόν.

Λύση

A) Έστω ότι στο επίπεδο υπάρχουν n ευθείες οι οποίες διαιρούν το επίπεδο σε f(n) χωρία. Ας θεωρηθεί η (n+1) ευθεία η οποία τέμνει κ από τις n ευθείες του επιπέδου. Επί της (n+1) ευθείας δημιουργούνται από τα κ σημεία τομής κ+1 διαστήματα. Κάθε ένα από αυτά διαιρεί ένα υπάρχον χωρίο σε δύο, δημιουργεί δηλαδή κ+1 νέα χωρία. Είναι προφανές ότι ο μέγιστος αριθμός εμφανίζεται όταν η (n+1) ευθεία τέμνει και τις n ευθείες ενώ ο ελάχιστος αριθμός προκύπτει όταν η (n+1) ευθεία δεν τέμνει καμμία από τις n ευθείες. Συνεπώς οι αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν ο μέγιστος και ο ελάχιστος αριθμός χωρίων θα είναι ως εξής

$$f_{max}(n+1)-f_{max}(n)=n+1 \tag{1}$$

$$f_{min}(n+1)-f_{min}(n)=1 \tag{2}$$

Εάν δεν υπάρχει καμμία ευθεία στο επίπεδο, το επίπεδο θα έχει ένα χωρίο και συνεπώς θα είναι

$$f_{min}(0)=f_{max}(0)=f(0)=1 \tag{3}$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό *Z* στην (1) για την αρχική συνθήκη που περιγράφεται στην (3), λαμβάνεται

$$z\{F_{max}(z)-f_{max}(0)\}-F_{max}(z)=(z-1)F_{max}(z)-z=Z\left\{n+1\right\}=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1} \tag{4}$$

από την οποία προκύπτει

$$F_{max}(z)=\frac{z^3-z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{1}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1} \tag{5}$$

Λαμβάνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό *Z* προσδιορίζεται

$$f_{max}(n)=Z^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}\right\}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+1 \tag{6}$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό *Z* στην (2) για την αρχική συνθήκη που περιγράφεται στην (3), λαμβάνεται

$$z\{F_{min}(z)-f_{min}(0)\}-F_{min}(z)=(z-1)F_{min}(z)-z=Z\left\{1\right\}=\frac{z}{z-1} \tag{7}$$

από την οποία προκύπτει

$$F_{min}(z)=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1} \tag{8}$$

Λαμβάνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό *Z* προσδιορίζεται

$$f_{min}(n)=Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}\right\}=n+1 \tag{9}$$

B) Έστω ότι στο χώρο υπάρχουν n επίπεδα ται οποία διαιρούν το χώρο σε g(n) χωρία. Ας θεωρηθεί το (n+1) επίπεδο το οποίο τέμνει κ από τα n επίπεδα του χώρου. Επί του (n+1) επιπέδου δημιουργούνται από τις κ ευθείες τομής f(κ) επίπεδα χωρία. Κάθε ένα από αυτά διαιρεί ένα υπάρχον χωρίο του χώρου σε δύο, δημιουργεί δηλαδή f(κ) νέα χωρία στο χώρο. Είναι προφανές ότι ο μέγιστος αριθμός εμφανίζεται όταν το (n+1) επίπεδο τέμνει και τα n επίπεδα. Συνεπώς η αναδρομική σχέση που ικανοποιεί ο μέγιστος αριθμός χωρίων θα είναι ως εξής

$$g_{max}(n+1)\text{-}g_{max}(n)\text{=}f(n)\text{=}\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+1 \tag{10}$$

Εάν δεν υπάρχει κανένα επίπεδο στο χώρο, ο χώρος θα έχει ένα χωρίο και συνεπώς θα είναι

$$g_{max}(0)\text{=}1 \tag{11}$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό *Z* στην (10) για την αρχική συνθήκη που περιγράφεται στην (11), λαμβάνεται

$$z\{G_{max}(z)\text{-}g_{max}(0)\}\text{-}G_{max}(z)\text{=}(z\text{-}1)G_{max}(z)\text{-}z\text{=}F_{max}(z)=\frac{z^3\text{-}z^2+z}{(z\text{-}1)^3} \tag{12}$$

από την οποία προκύπτει

$$G_{max}(z)=\frac{z}{z\text{-}1}+\frac{z^3\text{-}z^2+z}{(z\text{-}1)^4}=\frac{z^4\text{-}2z^3+2z^2}{(z\text{-}1)^4} \tag{13}$$

Για το Z μετασχηματισμό της k^3 θα είναι

$$\mathcal{Z}\{k^3\}\text{=}\mathcal{Z}\{kk^2\}\text{=-}z\frac{d}{dz}\left\{\frac{z(z+1)}{(z\text{-}1)^3}\right\}\text{=-}z\frac{(2z+1)(z\text{-}1)^3\text{-}3(z\text{-}1)^2z(z+1)}{(z\text{-}1)^6}=\frac{z^3+4z^2+z}{(z\text{-}1)^4} \tag{14}$$

Από τους πίνακες μετασχηματισμών λαμβάνονται

$$\mathcal{Z}\{1\}\text{=}\frac{z}{z\text{-}1}=\frac{z^4\text{-}3z^3+3z^2\text{-}z}{(z\text{-}1)^4} \tag{15}$$

$$\mathcal{Z}\{k\}\text{=}\frac{z}{(z\text{-}1)^2}=\frac{z^3\text{-}2z^2+z}{(z\text{-}1)^4} \tag{16}$$

$$\mathcal{Z}\{k^2\}\text{=}\frac{z(z+1)}{(z\text{-}1)^3}=\frac{z^3\text{-}z}{(z\text{-}1)^4} \tag{17}$$

Ο αριθμητής της σχέσεως (13) μπορεί να γραφεί συναρτήσει των αριθμητών των σχέσεων (14), (15), (16) και (17) ως εξής

$$z^4\text{-}2z^3+2z^2=K_1(z^4\text{-}3z^3+3z^2\text{-}z)\text{+}K_2(z^3\text{-}2z^2+z)\text{+}K_3(z^3\text{-}z)+K_4(z^3+4z^2+z) \tag{18}$$

Εξισώνοντας τους ομοιοβάθμιους συντελεστές στα δύο μέλη της εξισώσεως λαμβάνονται

$$K_1\text{=}1 \tag{19.α}$$

$$\text{-}3K_1\text{+}K_2\text{+}K_3\text{+}K_4\text{=-}2 \tag{19.β}$$

$$3K_1-2K_2+4K_4=2 \qquad (19.\gamma)$$

$$-K_1+K_2-K_3+K_4=0 \qquad (19.\delta)$$

Επιλύοντας το σύστημα προσδιορίζονται τα K_i ως εξής

$$[K_1 \;\; K_2 \;\; K_3 \;\; K_4]=[1 \;\; 5/6 \;\; 0 \;\; 1/6] \qquad (20)$$

Η σχέση (13) γράφεται

$$G_{max}(z)=\frac{z^4\text{-}2z^3+2z^2}{(z\text{-}1)^4}=Z\{1\}+\frac{5}{6}Z\{k\}+\frac{1}{6}Z\{k^3\} \qquad (21)$$

Λαμβάνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Z στα δύο μέλη της (21) ευρίσκεται

$$g_{max}(n)=1+\frac{5}{6}n+\frac{1}{6}n^3 \qquad (22)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Α) Να σχεδιαστεί ο Γεωμετρικός Τόπος των Ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς.

$$G(s)=\frac{(1+10s)}{(1+5s)(1+s)s^2}$$

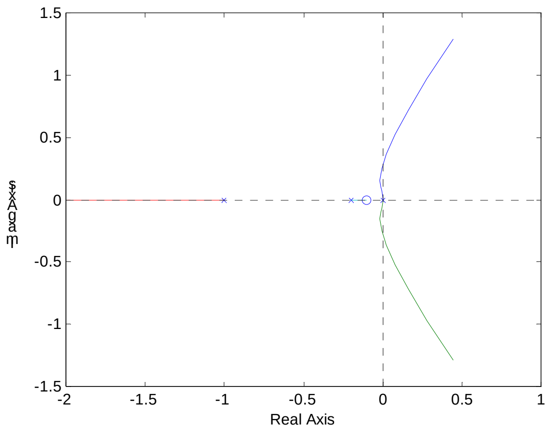
Β) Να ευρεθεί ελεγκτής της μορφής

$$K(s)=K\left(\frac{s+z}{s+p}\right)^{\mu}$$

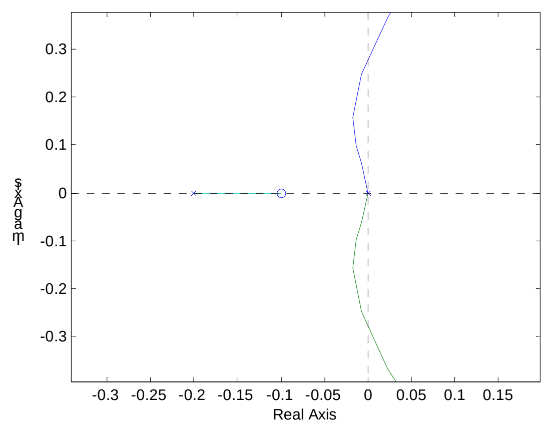
ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να έχει πόλους στα σημεία $-1\pm j$. Να ευρεθεί η θέση των άλλων πόλων του.

Λύση

Ο Γεωμετρικός τόπος των ριζών της G(s) φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα και βρίσκεται με την εφαρμογή των κανόνων κατασκευής του ως εξής:



Γεωμετρικός Τόπος των Ριζών της G(s).



Λεπτομέρεια Γεωμετρικού Τόπου των Ριζών.

- Ο γεωμετρικός τόπος έχει τέσσερις κλάδους.
- Τα ακόλουθα διαστήματα επί του πραγματικού άξονα είναι τμήματα του γεωμετρικού τόπου

$$(-\infty,-1],\ [-0.2,-0.1]$$

- Ένας κλάδος του γεωμετρικού τόπου αρχίζει από το σημείο –0.2 και καταλήγει στο σημείο –0.1. Οι τρείς άλλοι κλάδοι εκκινούν από τα σημεία –1, 0, 0 και καταλήγουν στο άπειρο.
- Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι

$$\theta=\frac{(1+2\kappa)\mathrm{x}180^{o}}{\mathrm{n-m}}=\frac{(1+2\kappa)\mathrm{x}180^{o}}{3} \qquad \kappa=0,1,2$$

δηλαδή είναι 60^{o}, 180^{o} και 300^{o} ή -60^{o}.

- Η τετμημένη του σημείου τομής των ασυμπτώτων είναι

$$\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{\lambda=1}^{m}z_\lambda}{\mathrm{n-m}}=\frac{-1+(-0.2)+0+0-(-0.1)}{3}=\frac{-1.1}{3}=-0.367$$

- Η γωνίες αναχώρησης από τον πόλο s=0 θα είναι

$$\varphi_p=\frac{180(1+2k)+\sum_{\lambda=1}^{m}(p_j-z_\lambda)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(p_j-p_i)}{2}=\begin{cases}\dfrac{180+0+0-0}{2}=90^{O} & k=0\\[2mm] \dfrac{540+0+0-0}{2}=270^{O} & k=1\end{cases}$$

- Τα σημεία τομής δύο κλάδων του γεωμετρικού τόπου δίδονται από τη σχέση

$$\frac{dK}{ds}=\frac{d\left(\frac{-1}{G(s)}\right)}{ds}=-\frac{d\left(\frac{5s^4+6s^3+s^2}{10s+1}\right)}{ds}=-\frac{(20s^3+18s^2+2s)(10s+1)-10(5s^4+6s^3+s^2)}{(10s+1)^2}=$$

$$=-\frac{150s^4+140s^3+28s^2+2s}{(10s+1)^2}=0$$

από την οποία λαμβάνονται

Για s=0	$K=\frac{-1}{G(s)}=-\frac{5s^4+6s^3+s^2}{10s+1}\Big\|_{s=0}=0$	Αποδεκτή τιμή
Για s=-0.6912	$K=\frac{-1}{G(s)}=-\frac{5s^4+6s^3+s^2}{10s+1}\Big\|_{s=-0.6912}=-0.0613$	Μη αποδεκτή τιμή
Για s=-0.1211+j0.068	$K=\frac{-1}{G(s)}=-\frac{5s^4+6s^3+s^2}{10s+1}\Big\|_{s=-0.1211+j0.068}=0.0063+j0.0107$	Μη αποδεκτή τιμή
Για s= -0.1211-j0.068	$K=\frac{-1}{G(s)}=-\frac{5s^4+6s^3+s^2}{10s+1}\Big\|_{s=-0.1211-j0.068}=0.0063-j0.0107$	Μη αποδεκτή τιμή

– Για την εύρεση των σημείων τομής με το φανταστικά άξονα χρησιμοποιείται η διάταξη Routh για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου

$$\psi_c(s)=5s^4+6s^3+s^2+K(10s+1)=5s^4+6s^3+s^2+10Ks+K$$

s^4	5	1	K
s^3	6	10K	
s^2	$\frac{6-50K}{6}$	K	
s	$\frac{\frac{6-50K}{6}10K-6K}{\frac{6-50K}{6}}=\frac{-500K^2+24K}{6-50K}$		
s^0	K		

Οι ρίζες του

$$-500K^2+24K=0$$

είναι K=0 και K=0.048

Για K=0, το βοηθητικό πολυώνυμο είναι

$$B(s)=\frac{6\text{-}10K}{6}s^2+K\Big|_{K=0}=s^2$$

και το σημείο τομής είναι το s=j0

Για K=0.048, το βοηθητικό πολυώνυμο είναι

$$B(s)=\frac{6\text{-}50K}{6}s^2+K\Big|_{K=0.048}=0.6s^2+0.048$$

και το σημείο τομής είναι το s=j0.283

B) Για να είναι το σημείο –1-j σημείο του γεωμετρικού τόπου του συστήματος G(s)K(s) πρέπει

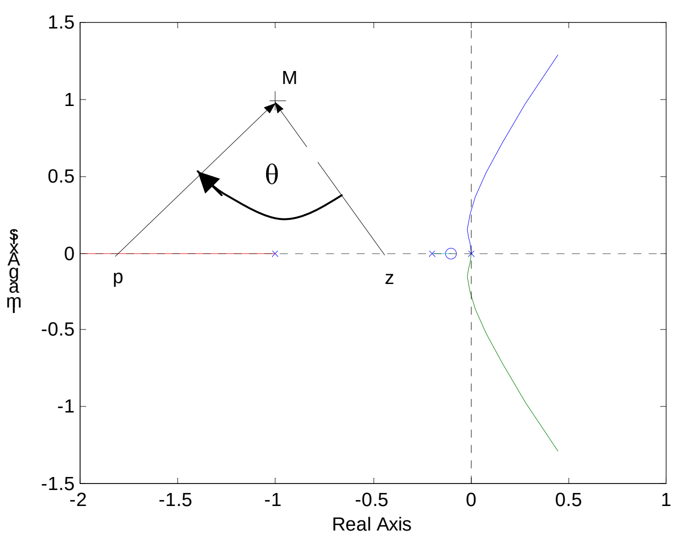
$$\arg\{G(-1+j)K(-1+j)\}=\arg\{G(-1+j)\}+\arg\{K(-1+j)\}=-180^o$$

Καθώς

$$\arg\{G(-1+j)\}=\mathrm{Arg}\{-1+j-(-0.1)\}-\mathrm{Arg}\{-1+j-(-0.2)\}-\mathrm{Arg}\{-1+j-(-1)\}-2\mathrm{Arg}\{-1+j-(0)\}=$$
$$=131.99^o-128.66^o-90^o-2*135^o=-356.67^o$$

ο ελεγκτής πρέπει να ινκανοποιεί τη σχέση

$$\arg\{K(-1+j)\}=\mu\left(\mathrm{Arg}\{-1+j-(z)\}-\mathrm{Arg}\{-1+j-(p)\}\right)=-180^o-(-356.67^o)=176.67^o$$

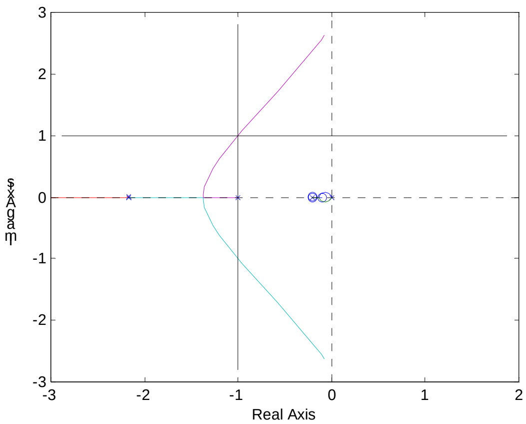


Εάν μ=1, η γωνία θ του σχήματος πρέπει να είναι ίση με 176.67°. Αυτό σημαίνει ότι το μηδενικό πρέπει να τοποθετηθεί στο δεξιό ημιεπίπεδο και ο πόλος στο αριστερό ημιεπίπεδο. Στην περίπτωση αυτή το διάστημα [0,z] θα είναι τμήμα του γεωμετρικού τόπου και το σύστημα κλειστού βρόχου θα είναι ασταθές.
Εάν μ=2, η γωνία θ του σχήματος πρέπει να είναι ίση με 88.33°. Εάν επιλεγεί
z=-0.2

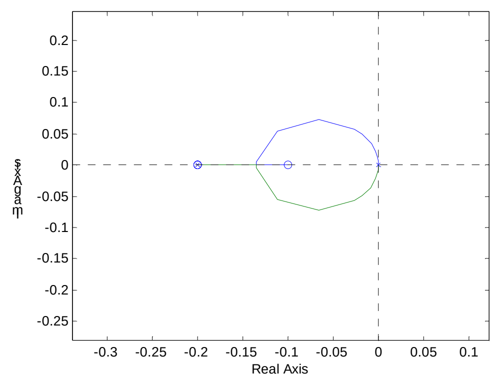
η θέση του πόλου θα είναι

$$p = -0.2-1x\varepsilon\varphi(38.66^{o})-1x\varepsilon\varphi(49.67^{o})=-0.2-0.8-1.17 = -2.17$$

Ο γεωμετρικός τόπος της G(s)K(s) φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Γεωμετρικός Τόπος G(s)K(s)



Λεπτομέρεια στην περιοχή του μηδενός.

Το K για το σημείο –1+j προκύπτει

$$K=\frac{1}{\left|G(-1+j)\right|\left|\dfrac{(-1+j+0.2)^2}{(-1+j+2.17)^2}\right|}=1.287$$

Για την τιμή αυτή του K οι υπόλοιποι πόλοι του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι στις θέσεις –0.2 και $-0.05\pm j0.071$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

A) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)K=\frac{K}{s(s^2+2cs+1)}$$

είναι τμήμα του πραγματικού άξονα και τμήμα της υπερβολής με εξίσωση

$$y^2=3x^2+4cx+1$$

B) Να δειχθεί ότι η τιμή του κέρδους σε κάθε σημείο της υπερβολής είναι

$$2(y^2+x^2)(x+c)$$

Λύση

Έστω x+jy σημείο του γεωμετρικού τόπου των ριζών. Θα ισχύει

$$-K=\frac{1}{G(x+jy)}=(x+jy)[(x+jy)^2+2c(x+jy)+1]=$$
$$=x(x^2-y^2)+2cx^2+x-2xy^2-2cy^2+j[y(x^2-y^2+2cx+1)+x(2xy+2cy)]$$

Χωρίζοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη λαμβάνονται

$$-K=x(x^2-y^2)+2cx^2+x-2xy^2-2cy^2$$
$$0=y(x^2-y^2+2cx+1)+x(2xy+2cy)$$

Από την τελευταία σχέση λαμβάνεται

$$y=0$$

είτε

$$0=(x^2-y^2+2cx+1)+x(2x+2c)=3x^2-y^2+4cx+1=3\left(x+\frac{2c}{3}\right)^2-y^2+1-\frac{4c^2}{3}$$

Η τελευταία σχέση γράφεται

$$\left(y+\sqrt{3}\left(x+\frac{2c}{3}\right)\right)\left(y-\sqrt{3}\left(x+\frac{2c}{3}\right)\right)=1-\frac{4c^2}{3}$$

η οποία είναι εξίσωση υπερβολής με ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y=\pm\sqrt{3}\left(x+\frac{2c}{3}\right)$$

Για το Κ θα είναι

$$K=-x(x^2-y^2)-2cx^2-x+2xy^2+2cy^2=-x^3+xy^2-2cx^2-x(-3x^2+y^2-4cx)+2xy^2+2cy^2=$$
$$=2x^3+2cx^2+2xy^2+2cy^2=2(x^2+y^2)(x+c)$$

Αξίζει να παρατηρηθούν τα ακόλουθα

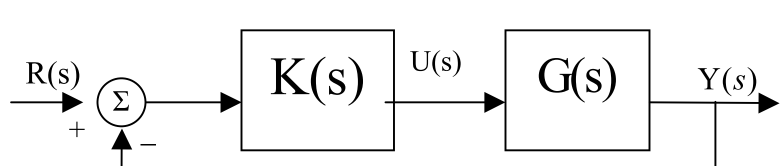
1. Ανάλογα με το πρόσημο του $(1-4c^2/3)$ ο γεωμετρικός τόπος βρίσκεται στην οξεία ή την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες.
2. Αν $(1-4c^2/3)=0$, οι ασύμπτωτες αποτελούν τμήματα του γεωμετρικού τόπου.
3. Το σημείο (0,1) είναι σημείο του τόπου ανεξάρτητα της τιμής του c.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίδεται σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s)=\frac{1}{(s+a)(s+1)}$$

και έλεγχος όπως στο Σχήμα με K(s)=K.



A) Να ευρεθούν τιμές των K,a ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να έχει

- Χρόνο μεγίστου $t_p \geq 1.57$sec.
- Χρόνο αποκαταστάσεως 2% $t_s \leq 2$sec.

B) Για a της επιλογής σας να ευρεθεί η τιμή του K ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να ικανοποιεί τις προδιαγραφές του ερωτήματος (A) και να εμφανίζει τη μέγιστη επι τοις εκατό υπερπήδηση.

Λύση

Το σύστημα κλειστού βρόχου θα έχει δύο πόλους και δεν θα έχει μηδενικά. Οι προδιαγραφές της βηματικής απόκρισης προσδιορίζουν τη θέση των πόλων του αντισταθμισμένου συστήματος.
Από τον χρόνο κορυφής

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \geq 1.57 \sec$$

προκύπτει

$$\omega_d \leq 2$$

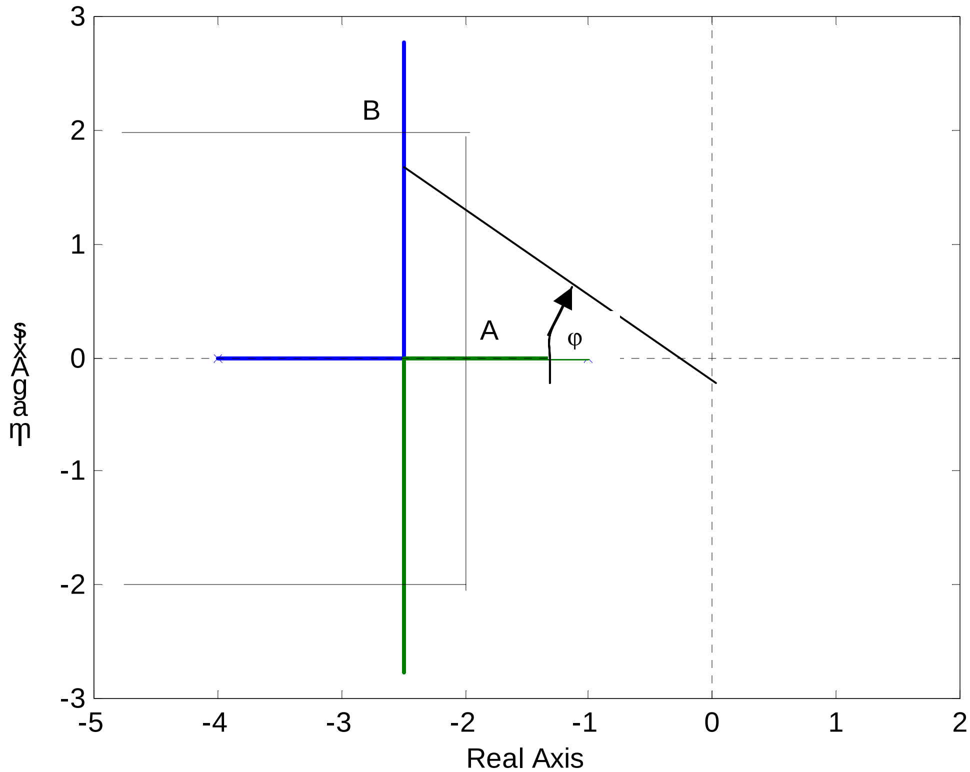
δηλαδή το φανταστικό μέρος των πόλων θα είναι μικότερο ή ίσο του 2.
Από το χρόνο αποκατάστασης

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 2 \sec$$

λαμβάνεται

$$\zeta\omega_n \geq 2$$

δηλαδή το πραγματικό μέρος των πόλων θα πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του –2.
Είναι γνωστό ότι ο γεωμετρικός τόπος του συστήματος θα είναι το ευθύγραμμο τμήμα του πραγματικού άξονα [-a,-1] και η μεσοκάθετός του, όπως στο σχήμα.



Για να είναι και οι δύο πόλοι του αντισταθμισμένου συστήματος στην επιθυμητή περιοχή πρέπει να ληφθεί

$$a \leq -3$$

Εάν ληφθεί a=-4, όπως στο σχήμα, και οι δύο πόλοι θα είναι στην επιθυμητή περιοχή για

$$K_A \leq K \leq K_B$$

όπου K_A, K_B είναι οι τιμές του K που αντιστοιχούν στα σημεία A και B του γεωμετρικού τόπου.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi_c(s)=(s+1)(s+4)+K=s^2+5s+4+K$$

Στο σημείο A η μία ρίζα του $\psi_c(s)$ είναι –2. Καθώς

$$\psi_c(-2)=4+5(-2)+4+K=-2+K=0$$

το K_A προκύπτει ίσο με 2.
Στο σημείο B οι ρίζες του $\psi_c(s)$ είναι $-2.5\pm j2$. Καθώς το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι 4+K, θα είναι

$$(-2.5+j2)(-2.5-j2)=2.5^2+2^2=6.25+4=K+4$$

προκύπτει αμέσως ότι K_B=6.25.
(Στη γενική περίπτωση θα είναι

$$K_A=a-2$$

$$K_B=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+4\text{-}a\text{)}.$$

B) Η επι τοις εκατό υπερπήδηση είναι

$$M_p=\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Καθώς

$$\frac{dM_p}{d\zeta}=\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\left(\frac{-\pi\sqrt{1-\zeta^2}-\dfrac{\zeta^2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{1-\zeta^2}\right)<0$$

το Mp είναι φθίνουσα συνάρτηση του ζ. Επειδή το ζ είναι ίσο με το συνημίτονο της γωνίας φ, όπου φ όπως στο σχήμα, η μέγιστη υπερπήδηση θα συμβαίνει όταν οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι στο Β και το συζυγές του. Στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$\zeta=\frac{2.5}{\sqrt{2.5^2+2^2}}=\frac{2.5}{3.20}=0.78$$

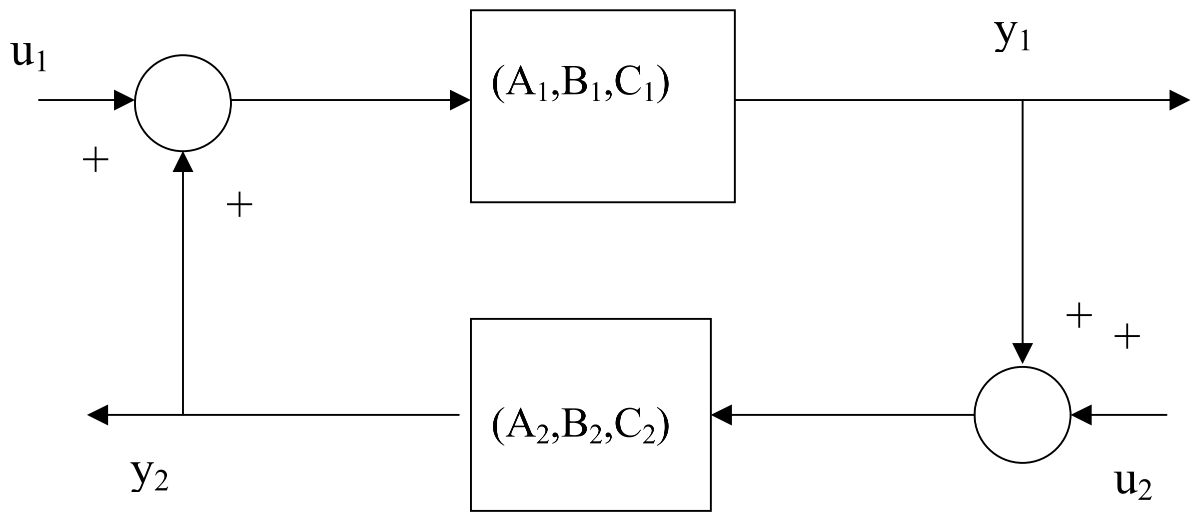
και η μέγιστη υπερπήδηση προκύπτει

$$M_p=\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\Bigg|_{\zeta=0.78}=0.0197$$

ή 1.97%.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο ανωτέρω Σχήμα τα συστήματα Σ_1, Σ_2 περιγράφονται σε μορφή εξισώσεων καταστάσεως από τις τριάδες των μητρών (A_1,B_1,C_1) και (A_2,B_2,C_2).



A) Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συνολικού συστήματος.

B) Να αποδειχθεί ότι το ολικό σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο εάν και μόνο εάν τα Σ_1,Σ_2 είναι ελέγξιμα και παρατηρήσιμα.

Γ) Εάν $u_2 \equiv 0$ (καταργείται σαν είσοδος) να δειχθεί (μπορεί να χρησιμοποιηθεί και παράδειγμα) ότι η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα των Σ_1,Σ_2 είναι αναγκαία συνθήκη για την ελεγξιμότητα και την παρατηρησιμότητα του ολικού συστήματος αλλά όχι ικανή.

Λύση

Για το σύστημα Σ_1 θα ισχύει

$$\dot{x}_1=A_1x_1+B_1(u_1+y_2)=A_1x_1+B_1u_1+B_1C_2x_2$$

Για το σύστημα Σ_2 θα ισχύει

$$\dot{x}_2=A_2x_2+B_2(u_2+y_1)=A_2x_2+B_2u_2+B_2C_1x_1$$

Θεωρώντας

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}x$$

B) Για την απόδειξη της πρότασης θα χρησιμοποιηθούν τα ακόλουθα λήμματα.
Λήμμα 1: Μπορεί να γραφεί

$$(A+BF)^kB=A^kB+A^{k-1}BM_{1,k}B+A^{k-2}BM_{2,k}B+...+BM_{k,k}B$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.
Για k=1 είναι

$$(A+BF)B=AB+BFB=AB+BM_{1,1}B$$

Ας υποτεθεί ότι η σχέση ισχύει για k-1, δηλαδή

$$(A+BF)^{k-1}B=A^{k-1}B+A^{k-2}BM_{1,k-1}B+A^{k-3}BM_{2,k-1}B+...+BM_{k-1,k-1}B$$

Θα είναι

$$\begin{aligned}&(A+BF)^{k}B=(A+BF)(A+BF)^{k-1}B=\\&A^{k}B+A^{k-1}BM_{1,k-1}B+A^{k-2}BM_{2,k-1}B+...+ABM_{k-1,k-1}B+\\&BFA^{k-1}B+BFA^{k-2}BM_{1,k-1}B+BFA^{k-3}BM_{2,k-1}B+...+BFBM_{k-1,k-1}B\end{aligned}$$

και η σχέση ισχύει με

$$\begin{aligned}&M_{i,k-1}=M_{i,k}\quad i=1,2,...,k-1\\&M_{k,k}=FA^{k-1}+FA^{k-2}BM_{1,k-1}+FA^{k-3}BM_{2,k-1}+...+FBM_{k-1,k-1}\end{aligned}$$

Λήμμα 2: Το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο εάν και μόνο εάν το ζεύγος (A+BF,B) είναι ελέγξιμο
Απόδειξη
Η μήτρα ελεγξιμότητος του ζεύγους (A+BF,B) γράφεται με χρήση και του λήμματος 1

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}B & (A+BF)B & (A+BF)^2B & \cdots & (A+BF)^{n-1}B\end{bmatrix}=\\&=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & M_{1,1} & M_{2,2}B & \cdots & M_{n-1,n-1}B\\0 & I & M_{1,2} & \cdots & M_{n-2,n-1}B\\0 & 0 & I & \cdots & M_{n-3,n-1}B\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & I\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Καθώς η δεξιά μήτρα στο δεύτερο μέλος είναι ομαλή, θα είναι

$$\text{rank}\begin{bmatrix}B & (A+BF)B & (A+BF)^2B & \cdots & (A+BF)^{n-1}B\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$$

και το λήμμα απεδείχθη.

Για την απόδειξη του (B) ας θεωρηθεί ότι στο σύστημα κλειστού βρόχου εφαρμόζεται η μήτρα

$$F=\begin{bmatrix}0 & -C_2\\-C_1 & 0\end{bmatrix}$$

Η μήτρα A+BF θα είναι

$$A+BF=\begin{bmatrix}A_1 & B_1C_2\\B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1 & 0\\0 & B_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -C_2\\-C_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\0 & A_2\end{bmatrix}$$

Για τη μήτρα ελεγξιμότητος θα ισχύει

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & (A+BF)B & \cdots & (A+BF)^{n-1}B \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\left[\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_2 & A_2B_2 & \cdots & A_2^{n-1}B_2 \end{bmatrix}$$

Για να είναι το σύστημα κλειστού βρόχου ελέγξιμο πρέπει και αρκεί η τελευταία μήτρα να έχει ανεξάρτητες γραμμές και αυτό είναι δυνατόν εάν και μόνον εάν τα συστήματα Σ_1 και Σ_2 είναι ελέγξιμα.
Η απόδειξη της παρατηρησιμότητας είναι άμεση καθώς η παρατηρησιμότητα του ζεύγους (A,C) είναι ισοδύναμη με την ελεγξιμότητα του ζεύγους (A^T,C^T).
Γ) Η αναγκαιότητα της υπόθεσης είναι προφανής, καθώς κατάργηση της u_2 είναι ισοδύναμη με τη διατήρησή της και μηδενισμό της για κάθε χρονική στιγμή.
Για την ικανότητα, είναι δυνατόν να θεωρηθεί το σύστημα με $A_1=A_2=B_1=B_2=C_2=1$, $C_1=0$. Τότε

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

Αν και τα ζεύγη (A_1,B_1) και (A_2,B_2) είναι ελέγξιμα, το ζεύγος (A,B) δεν είναι ελέγξιμο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

A) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος συστήματος συνεχούς η διακριτού χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου η οποία έχει ένα μηδενικό και δύο πόλους είναι τμήμα του πραγματικού άξονα και κύκλος ή τόξο κύκλου.

B) Να ευρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.

Λύση

Έστω

$$G(s)=\frac{s+a}{s^2+bs+c} \tag{1}$$

η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi_c(s)=s^2+bs+c+K(s+a)=s^2+(b+K)s+c+Ka \tag{2}$$

Έστω x+jy ένα σημείο του τόπου. Από τη συνθήκη

$$\psi_c(x+jy)=x^2-y^2+2jxy+bx+jby+c+Kx+jKy+Ka=0 \tag{3}$$

προκύπτουν οι σχέσεις

$$x^2-y^2+bx+c+Kx+Ka=0 \tag{4.α}$$

$$2xy+by+Ky=0 \qquad (4.β)$$

Από τη σχέση (4.β) προκύπτουν δύο περιπτώσεις

1η Περίπτωση

$$y=0 \qquad (5)$$

Από τη σχέση (4.α) προκύπτει

$$K=-\frac{x^2+bx+c}{x+a} \quad x \neq -a \qquad (6)$$

δηλαδή για κάθε πραγματικό x υπάρχει K θετικό ή αρνητικό για το οποίο ισχύει η (6).
Για να είναι το K θετικό θα πρέπει

- Εάν ο αριθμητής είναι θετικός (το x εκτός των πραγματικών ριζών του τριωνύμου του παρονομαστή, ή το τριώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες) ο παρονομαστής πρέπει να είναι αρνητικός, δηλαδή το x πρέπει να είναι αριστερά του μηδενικού.
- Εάν ο αριθμητής είναι αρνητικός (το x μεταξύ των πραγματικών ριζών του τριωνύμου του παρονομαστή) ο παρονομαστής πρέπει να είναι θετικός, δηλαδή το x πρέπει να είναι δεξιά του μηδενικού.

2η Περίπτωση
2x+b+K=0 ή

$$K=-2x-b \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του K στην σχέση (4.α), λαμβάνεται

$$x^2-y^2+bx+c+(-2x-b)(x+a)=-x^2-y^2-2ax+c-ab=0 \qquad (8)$$

ή ισοδύναμα

$$(x+a)^2+y^2=c-ab+a^2 \qquad (9)$$

Εάν $c-ab+a^2$ είναι θετικό, η σχέση (9) είναι η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο (-a,0), δηλαδή το μηδενικό και ακτίνα

$$R=\sqrt{c-ab+a^2} \qquad (10)$$

διαφορετικά η περίπτωση αυτή δεν δίδει λύση.
Αξίζει να παρατηρηθεί ότι

$$c-ab+a^2 = s^2+bs+c\Big|_{s=-a} \qquad (11)$$

και συνεπώς ο κύκλος θα είναι τμήμα του γεωμετρικού τόπου εάν το τριώνυμο του παρονομαστή έχει μιγαδικές ρίζες ή εάν έχει πραγματικές ρίζες και το μηδενικό βρίσκεται εκτός των ριζών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Διακριτό σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$
$$y(k)=Cx(k)$$

A) Να ευρεθεί η συνθήκη ώστε να είναι δυνατή η μετάβαση από το σημείο x(0) σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου κατάστασης με κατάλληλη επιλογή της εισόδου.

B) Να δειχθεί ότι εάν n είναι η διάσταση του χώρου καταστάσεων για την μετάβαση αυτή, εάν είναι δυνατή, δεν απαιτούνται περισσότερα από n βήματα.

Γ) Να ευρεθεί ο ελάχιστος αριθμός βημάτων για να επιτυγχάνεται πάντα αυτή η μετάβαση.

Δ) Να προσδιοριστεί η u(κ) η οποία μεταφέρει το διάνυσμα καταστάσεως από τη θέση $[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ στη θέση $[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

A) Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις καταστάσεως διαδοχικά, προκύπτει

$$\underline{x}(k)=A^k\underline{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}B\underline{u}(i) = A^k\underline{x}(0)+\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{u}(k-1) \\ \underline{u}(k-2) \\ \underline{u}(k-3) \\ \vdots \\ \underline{u}(0) \end{bmatrix}$$

Για να μπορεί να είναι το x(k) οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου κατάστασης, η εξίσωση

$$\underline{x}(k)-A^k\underline{x}(0)=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{u}(k-1) \\ \underline{u}(k-2) \\ \underline{u}(k-3) \\ \vdots \\ \underline{u}(0) \end{bmatrix}$$

πρέπει να έχει πάντοτε λύση, δηλαδή

$$\operatorname{rank}\left\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix}\right\}=n$$

όπου n είναι η διάσταση του χώρου καταστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι σε k βήματα έχει επιτευχθεί το διάνυσμα x(k).

B) Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα των Caley-Hamilton, επειδή οι μήτρες A^{n+j}, j=0,1,… μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των μητρών I,A, ..., A^{n-1}, δεν απαιτείται να θεωρηθεί k μεγαλύτερο του n και η συνθήκη για την επίτευξη οιουδήποτε σημείου του χώρου κατάστασης είναι

$$\text{rank}\left\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n\text{-}1}B \end{bmatrix}\right\}=n$$

Γ) Έστω λ ο ελάχιστος ακέραιος ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\text{rank}\left\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{\lambda\text{-}1}B \end{bmatrix}\right\}=n$$

Ο αριθμός αυτός μπορεί να ευρεθεί προσδιορίζοντας διαδοχικά τους βαθμούς των μητρών [B], [B AB], [B AB A^2B] κλπ μέχρις ότου ευρεθεί μήτρα πλήρους βαθμού. Είναι προφανές ότι σε λ βήματα είναι δυνατόν να επιτευχθεί οιοδήποτε σημείο του χώρου κατάστασης.

Δ) Είναι

$$\text{Rank}\{[B]\}=2$$

$$\text{rank}\left\{\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}\right\}=\text{rank}\left\{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 2\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 7\\0 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right\}=4$$

Συνεπώς λ=2 και το σημείο $[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$ μπορεί να επιτευχθεί σε δύο βήματα. Θα είναι

$$\underline{x}(k)\text{-}A^k\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 2\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 7\\0 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(1)\\u_2(1)\\u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτει

$$\begin{bmatrix}u_1(1)\\u_2(1)\\u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3 & 7\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -2\\-2 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίδεται σύστημα συνεχούς χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

A) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς $G_d(z)$ του συστήματος διακριτού χρόνου που προκύπτει από δειγματοληψία του συστήματος με περίοδο T=1 και διατηρητή μηδενικής τάξεως.

B) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Bode του διακριτού συστήματος.

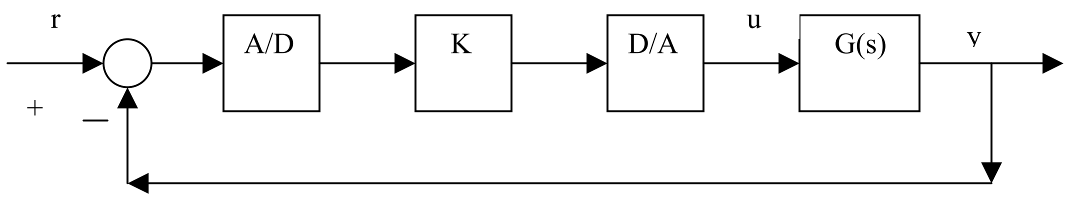
Γ) Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

να σχεδιαστούν τα διαγράμματα Bode της G(s) και της

$$\hat{G}(w)=G_d(z)\Big|_{z=f(w)}.$$

Δ) Στο διακριτό σύστημα εφαρμόζεται ελεγκτής, όπως στο Σχήμα.



Να προσδιοριστούν οι τιμές του K ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές με χρήση του κριτηρίου του Jury..

E) Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του διακριτοποιημένου συστήματος.

Λύση

A) Θα είναι

$$G_d(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{L^{-1}\left[\frac{2}{s(s+1)(s+2)}\right]\right\}=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{-2}{(s+1)}+\frac{1}{(s+2)}\right]\right\}=$$

$$=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{(1-2e^{-t}+e^{-2t})u(t)\right\}=(1-z^{-1})\left\{\frac{z}{z-1}+\frac{-2z}{z-e^{-T}}+\frac{z}{z-e^{-2T}}\right\}$$

Για T=1 η συνάρτηση μεταφοράς του διακριτοποιημένου συστήματος γίνεται

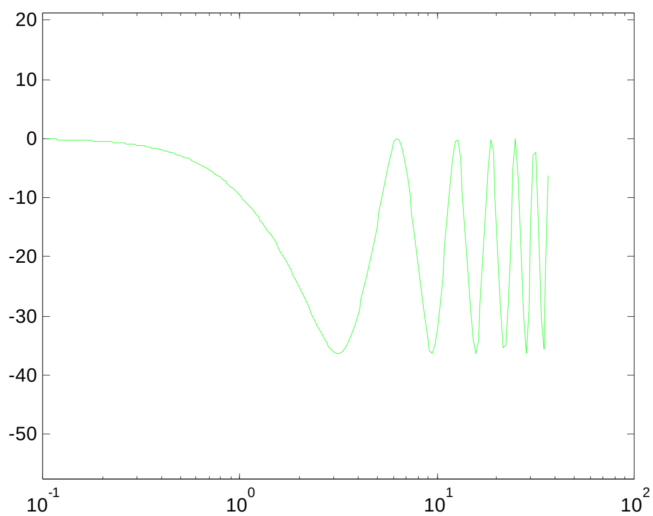
$$G_d(z)=(1-z^{-1})\left\{\frac{z}{z-1}+\frac{-2z}{z-e^{-T}}+\frac{z}{z-e^{-2T}}\right\}=(1-z^{-1})\left\{\frac{z}{z-1}+\frac{-2z}{z-0.368}+\frac{z}{z-0.135}\right\}=$$

$$=\frac{0.4z+0.148}{(z-0.368)(z-0.135)}$$

B) Για $z=e^{j\omega T}$ το διάγραμμα Bode φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα το οποίο πραγματοποιήθηκε με το πρόγραμμα σε περιβάλλον MATLAB

```
for K=1:200
```

```
   t(K)=0.1*(1.03)^K;
   z(K)=exp(t(K)*i);
   g(K)=(0.4*z(K)+0.148)/(z(K)-0.368)/(z(K)-0.135);
   gr(K)=real(g(K));
   gi(K)=imag(g(K));
   bodem(K)=20*log(sqrt(gr(K)^2+gi(K)^2));
   end
semilogx(t,bodem,'g')
axis equal
```



Γ) Το z συναρτήσει του w θα είναι

$$z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}=\frac{2+w}{2-w}$$

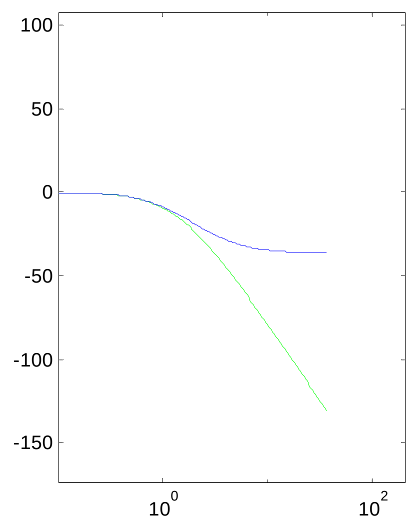
Αντικαθιστώντας στην $G_d(z)$ λαμβάνεται

$$\hat{G}(w)=G_d(z)\Big|_{z=\frac{2+w}{2-w}}=\frac{0.4z+0.148}{(z-0.368)(z-0.135)}\Big|_{z=\frac{2+w}{2-w}}=\frac{(2-w)(0.252w+1.096)}{(1.368w+1.264)(1.135w+1.73)}$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα Bode της G(s) και της $\hat{G}(w)$ που προκύψανε από το ακόλουθο πρόγραμμα σε περιβάλλον MATLAB.

```
for K=1:200
   t(K)=0.1*(1.03)^K;
   omega(K)=i*t(K);
   z(K)=exp(t(K)*i);
   g(K)=2/(omega(K)+1)/(omega(K)+2);
   gr(K)=real(g(K));
   gi(K)=imag(g(K));
   bodem(K)=20*log(sqrt(gr(K)^2+gi(K)^2));
```

```
   gh(K)=(2-
omega(K))*(0.252*omega(K)+1.096)/(1.368*omega(K)+1.264)/(1.135*omega(K)
+1.73);
   ghr(K)=real(gh(K));
   ghi(K)=imag(gh(K));
   bodemh(K)=20*log(sqrt(ghr(K)^2+ghi(K)^2));
end
semilogx(t,bodem,'g',t,bodemh,'b')
axis equal
```



Δ) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$\psi_c(z)=(z-0.368)(z-0.135)+K(0.4z+0.148)=z^2+(0.4K-0.5)z+0.148K+0.05$$

Το κριτήριο του Jury έχει τετριμμένη μορφή ως εξής

Γραμμή	z^0	z	z^2
1	0.148K+0.05	0.4K-0.5	1
2	1	0.4K-0.5	0.148K+0.05

Για να είναι το σύστημα κλιστού βρόχου ευσταθές πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες.

$$f(1)=1+(0.4K-0.5)+0.148K+0.05=0.548K+0.55>0$$

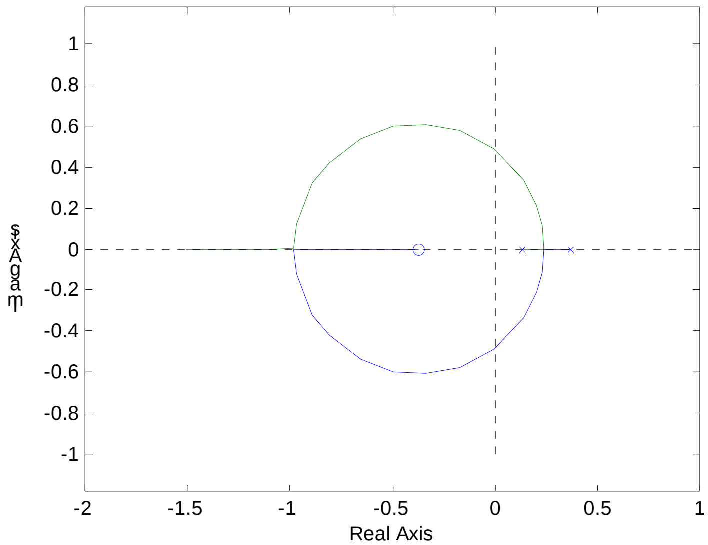
$$(-1)^2 f(-1)=1+(-0.4K+0.5)+0.148K+0.05=-0.252K+1.55>0$$

$$|0.148K+0.05|<1$$

Από την πρώτη ανισότητα προκύπτει K>-1.004
Από τη δεύτερη ανισότητα προκύπτει K<6.15
Από την Τρίτη ανισότητα προκύπτει –1<0.148K+0.05<1 ή ισοδύναμα K>-7.09 και K<6.419.
Οι ανισότητες συναληθεύουν για

$$-1.004<K<6.15$$

Ε) Ο γεωμετρικός τόπος των πόλων του αντισταθμισμένου συστήματος κατασκευάζεται όπως και στην περίπτωση συστήματος συνεχούς χρόνου. Θα είναι κύκλος με κέντρο το σημείο z=-0.148/0.4=-0.37 και τμήματα του πραγματικού άξονα. Ο γεωμετρικός τόπος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα δύο δοχείων είναι οι εξής:

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=A\underline{x}+Bu(t)=\begin{bmatrix}-0.0197 & 0\\ 0.0178 & -0.0129\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0263\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=x_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Α) Να γραφούν οι εξισώσεις του διακριτού συστήματος που προκύπτει από τη δειγματοληψία του με περίοδο T=12 και χρήση διατηρητή μηδενικής τάξεως.

Β) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς του διακριτού συστήματος.

Γ) Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα του διακριτού συστήματος συναρτήσει του T.

Δ) Να ευρεθεί η χρονική απόκριση του συστήματος συνεχούς χρόνου και του συστήματος διακριτού χρόνου σε βηματική διέγερση και να συγκριθούν ως προς το σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

Λύση

Α) Οι εξισώσεις του διακριτοποιημένου συστήματος θα είναι

$$x_d(k+1)=A_d x_d+B_d u(k)=e^{AT}x_d+(e^{AT}-I)A^{-1}Bu(k)$$

όπου T είναι η περίοδος της δειγματοληψίας.

Για την εύρεση της e^{At} χρησιμοποιείται το θεώρημα των Caley-Hamilton. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$\psi(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix} s+0.0197 & 0 \\ -0.0178 & s+0.0129 \end{bmatrix}=(s+0.0197)(s+0.0129)$$

Από την

$$e^{st}=a_0+a_1 s$$

για s=-0.0197 και s=-0.0129 λαμβάνεται το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} e^{-0.0197t} \\ e^{-0.0129t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -0.0197 \\ 1 & -0.0129 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

από το οποίο προκύπτει

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{0.0197e^{-0.0129t}-0.0129e^{-0.0197t}}{0.0068} \\ \dfrac{e^{-0.0129t}-e^{-0.0197t}}{0.0068} \end{bmatrix}$$

και

$$e^{At}=a_0 I+a_1 A=\begin{bmatrix} e^{-0.0197t} & 0 \\ 2.62(e^{-0.0129t}-e^{-0.0197t}) & e^{-0.0129t} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$A_d=e^{AT}=\begin{bmatrix} e^{-0.0197x12} & 0 \\ 2.62(e^{-0.0129x12}-e^{-0.0197x12}) & e^{-0.0129x12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.79 & 0 \\ 0.18 & 0.86 \end{bmatrix}$$

$$B_d=\left(e^{AT}-I\right)A^{-1}B==\begin{bmatrix} -0.21 & 0 \\ 0.18 & -0.14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.0197 & 0 \\ 0.0178 & -0.0129 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.282 \\ 0.0297 \end{bmatrix}$$

B) Η συνάρτηση μεταφοράς του διακριτοποιημένου συστήματος θα είναι

$$G_d(z)=C[zI-A_d]^{-1}B_d=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z-0.79 & 0 \\ -0.18 & z-0.86 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.282 \\ 0.0297 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-0.79} & 0 \\ \dfrac{0.18}{(z-0.79)(z-0.86)} & \dfrac{1}{z-0.86} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.282 \\ 0.0297 \end{bmatrix}=\frac{0.03z+0.026}{(z-0.79)(z-0.86)}$$

Γ) Για την ελεγξιμότητα του διακριτοποιημένου συστήματος εξετάζεται ο βαθμός της μήτρας

$$P_c=\begin{bmatrix}B_d & A_dB_d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(e^{AT}-I\right)A^{-1}B & e^{AT}\left(e^{AT}-I\right)A^{-1}B\end{bmatrix}$$

Καθώς οι μήτρες e^{At} και $(e^{At}-I)A^{-1}$ αντιμετατίθενται, η μήτρα ελεγξιμότητας γράφεται.

$$P_c=\left(e^{AT}-I\right)A^{-1}\begin{bmatrix}B & e^{AT}B\end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές της μήτρας e^{At} είναι $e^{-0.0197t}$ και $e^{-0.0129t}$. Καθώς για κάθε $t>0$, $e^{-0.0197t}<1$ και $e^{-0.0129t}<1$, οι ιδιοτιμές της $e^{At}-I$, οι οποίες είναι $e^{-0.0197t}-1$ και $e^{-0.0129t}-1$ δεν μηδενίζονται και συνεπώς η μήτρα $e^{At}-I$ είναι ομαλή και θα έχει βαθμό ίσο με δύο. Επομένως το σύστημα θα είναι ελέγξιμο εάν και μόνο εάν

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & e^{AT}B\end{bmatrix}=2$$

Για να χάνει βαθμό η τελευταία μήτρα πρέπει

$$e^{At}B=\lambda B$$

δηλαδή το B πρέπει να είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας e^{At}. Καθώς τα ιδιοδιανύσματα της e^{At} ταυτίζονται με τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A, το διακριτοποιημένο σύστημα θα είναι ελέγξιμο εάν και μόνο εάν

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=2\,.$$

Η τελευταία είναι η συνθήκη ελεγξιμότητας του συστήματος συνεχούς χρόνου και το διακριτοποιημένο σύστημα θα είναι ελέγξιμο για κάθε T.
Αξίζει να τονιστεί ότι στη γενική περίπτωση ελεγξιμότητα του συστήματος συνεχούς χρόνου δεν συνεπάγεται την ελεγξιμότητα του διακριτοποιημένου συστήματος.

Δ) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος συνεχούς χρόνου θα είναι

$$G(s)=C[sI-A]^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+0.0197 & 0\\ -0.0178 & s+0.0129\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.0263\\ 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+0.0197} & 0\\ \dfrac{0.0178}{\left(s+0.0197\right)\left(s+0.0129\right)} & \dfrac{1}{s+0.0129}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0263\\ 0\end{bmatrix}=\frac{4.68x10^{-4}}{\left(s+0.0197\right)\left(s+0.0129\right)}$$

Για την τελική τιμή της εξόδου σε βηματική διέγερση, εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνεται

$$y_{ss}(\beta\eta\mu)=\lim_{t\to\infty}\left\{y(t)\right\}\Big|_{u(t)=U(t)}=\lim_{s\to 0}\left\{sY(s)\right\}=\lim_{s\to 0}\left\{sG(s)\frac{1}{s}\right\}=G(0)=\frac{4.68x10^{-4}}{\left(0.0197\right)\left(0.0129\right)}=1.8415$$

Για την τελική τιμή της εξόδου του διακριτοποιημένου συστήματος σε βηματική διέγερση,εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής του μετασχηματισμού *Z*, λαμβάνεται

$$\lim_{k\to\infty}\left\{y_d(kT)\right\}\Big|_{u(kT)=U(kT)}=\lim_{z\to 1}\left\{(1\text{-}z^{-1})Y_d(z)\right\}=\lim_{z\to 1}\left\{(1\text{-}z^{-1})G_d(z)\frac{z}{z\text{-}1}\right\}=$$

$$=G_d(1)=\frac{0.056}{(0.21)(0.14)}=1.904$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται οι βηματικές αποκρίσεις του συστήματος συνεχούς χρόνου και του διακριτοποιημένου συστήματος. Οι τελικές τιμές προκύπτουν ίσες. Η διαφορά που εμφανίστηκε οφείλεται στις στρογγυλεύσεις κατά τη διακριτοποίηση του συστήματος.