

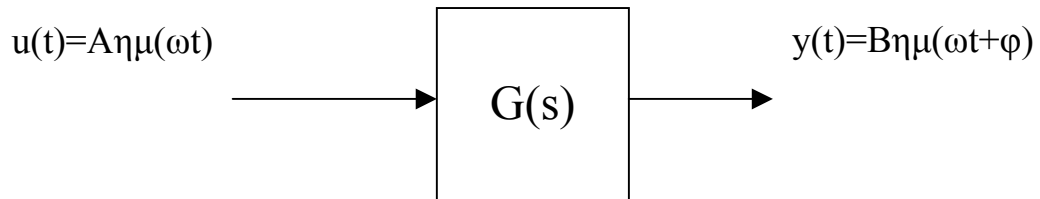
ΜΕΘΟΔΟΙ
ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ
ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Τρύφων Κουσιουρής

Ακ. Έτος 2005-2006

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΜΟΝΙΜΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

Έστω το σύστημα συνεχούς χρόνου



$$Y(s)=G(s)\frac{\omega A}{s^2+\omega^2}=\frac{K_0}{s-j\omega}+\frac{\bar{K}_0}{s+j\omega}+\sum_{i=1}^n\frac{K_i}{s+p_i}$$

$$y(t)=K_0e^{j\omega t}+\bar{K}_0e^{-j\omega t}+\sum_{i=1}^nK_ie^{-p_it}$$

$$y_{ss}(t)=K_0e^{j\omega t}+\bar{K}_0e^{-j\omega t}=A\cdot|G(j\omega)|\cdot\eta\mu\{\omega t+\arg[G(j\omega)]\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Η συνάρτηση του ορίσματος είναι πλειότιμη και για να οριστεί σαν συνάρτηση απαιτείται να οριστεί το πεδίο τιμών. Πώς θα επιτευχθεί αυτό;

Εάν

$$G(s)=K\frac{\prod_{i=1}^m(s+z_i)}{\prod_{k=1}^n(s+p_k)}$$

$$\arg\{G(j\omega)\}=\text{Arg}\{K\}+\sum_{i=1}^m\text{Arg}\{j\omega+z_i\}-\sum_{k=1}^n\text{Arg}\{j\omega+p_k\}$$

με $\text{Arg}\{K\}=-180^\circ$ εάν $K<0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2: Εάν είναι γνωστές οι συναρτήσεις

$|G(j\omega)|, \arg[G(j\omega)]$, η απόκριση του συστήματος σε βηματική ή κρουστική διέγερση μπορεί να προσδιοριστεί από τον αντίστροφο Μ/Σ Laplace ως εξής:

$$y_u(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint_D\frac{G(s)}{s}e^{st}ds=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{R(\omega)}{\omega}\eta\mu(\omega t)d\omega$$

$$y_\delta(t)=\frac{1}{2\pi j}\oint_D G(s)e^{st}ds=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\text{συν}(\omega t)d\omega$$

όπου

$$R(\omega) = |G(j\omega)| \cdot \text{συν} \{ \arg[G(j\omega)] \}$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι για τον προσδιορισμό της $y(t)$ μία χρονική στιγμή απαιτείται γνώση των $|G(j\omega)|, \arg[G(j\omega)]$ σε όλες τις συχνότητες

ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Συνάρτηση Πλάτους:

$$M(\omega) = |G(j\omega)|$$

Συνάρτηση φάσης:

$$\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$$

Συνάρτηση κέρδους:

$$\alpha(\omega) = \ln |G(j\omega)| \quad (\text{Neper})$$

$$K(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (\text{decibel})$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΕΡΔΟΥΣ-ΦΑΣΗΣ

Βασικό θεώρημα

Εάν η $G(s)$ δεν έχει μηδενικά και πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο, θα ισχύουν

$$\alpha(\omega) = \alpha(\infty) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y-\omega} dy = \alpha(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y\varphi(y)}{y^2 - \omega^2} dy$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(y)}{y-\omega} dy = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha(y)}{y^2 - \omega^2} dy$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εάν είναι γνωστή η συνάρτηση $\alpha(\omega)$, η $\varphi(\omega)$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα.

Εάν είναι γνωστή η συνάρτηση $\varphi(\omega)$, η $\alpha(\omega)$ προσδιορίζεται με αβεβαιότητα μιάς προσθετικής σταθεράς.

Παράδειγμα 1

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)] = \text{τοξεφ}(-\omega T)$$

Παράδειγμα 2

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)] = \begin{cases} \text{τοξεφ}\left(\frac{-2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) & \text{για } \omega < \omega_n \\ \text{τοξεφ}\left(\frac{-2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) - 180^\circ & \text{για } \omega > \omega_n \end{cases}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Η συνάρτηση τοξεφ(φανταστικό μέρος/πραγματικό μέρος) δεν προσδιορίζει σωστά το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού.

ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ ΣΤΟ ΠΕΛΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Μέγιστο πλάτος σε συντονισμό M_r :

Είναι η μέγιστη τιμή της $|G(j\omega)|$

Κυκλική συχνότητα συντονισμού ω_r :

Είναι η κυκλική συχνότητα στην οποία το $|G(j\omega)|$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.

Κυκλική συχνότητα αποκοπής ω_b :

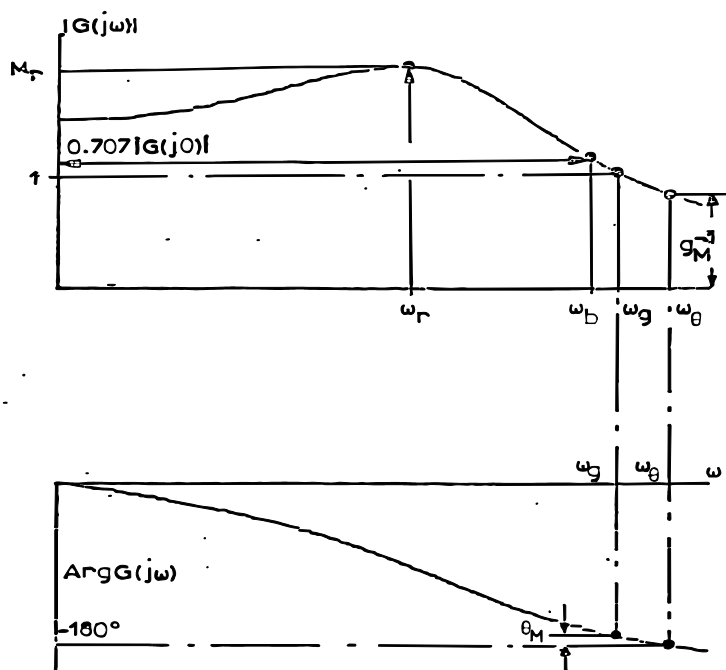
Είναι η κυκλική συχνότητα όπου $|G(j\omega_b)| = 0.707 \times |G(j0)|$

Περιθώριο Κέρδους g_m :

Είναι το αντίστροφο του μέγιστου κέρδους $|G(j\omega_{\theta i})|$ για τις κυκλικές συχνότητες $\omega_{\theta i}$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $\arg\{G(j\omega_{\theta i})\} = -180^\circ$.

Περιθώριο Φάσης ϕ_m :

Είναι η γωνία $180^\circ + \text{Min}\{\arg G(j\omega_{g i})\}$ για τις κυκλικές συχνότητες $\omega_{g i}$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $|G(j\omega_{g i})| = 1$.



Για το Παράδειγμα 2 οι προδιαγραφές εκφράζονται αναλυτικά συναρτήσεως των συντελεστών της $G(s)$

Προδιαγραφές Αρμονικής Απόκρισης	Προδιαγραφές Βηματικής Απόκρισης
Μέγιστο πλάτος σε συντονισμό $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}$	Επί τοις εκατό υπερπήδηση $M_p = \exp\left\{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right\}$
Κυκλική συχνότητα συντονισμού $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$	Χρόνος κορυφής $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$
Κυκλική συχνότητα αποκοπής $\omega_b = \omega_n \sqrt{1-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta + 2}}$	Χρόνος απόκατάστασης 5% $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$
Περιθώριο Κέρδους $g_m = \infty$	Σφάλμα μόνιμης κατάστασης $e_{ss}(\beta\eta\mu) = 1 - G(0)$
Περιθώριο Φάσης $\theta_m = \text{τοξεφ} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}}$	

ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος ζώνης τόσο ταχύτερο είναι το σύστημα

Απόδειξη

Από την ιδιότητα του M/Σ Laplace

Εάν $y(t) \leftrightarrow Y(s) \Leftrightarrow y(at) \leftrightarrow Y(s/a)$

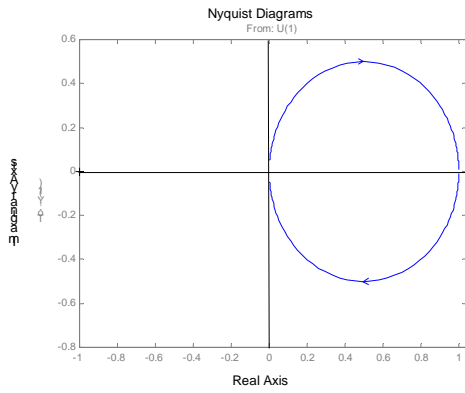
ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΝ

Οι αρμονικές αποκρίσεις της $G(s)$ μπορούν να απεικονιστούν κατά διάφορους τρόπους.

- Να σχεδιαστεί το πολικό διάγραμμα της $G(j\omega)$ ($|G(j\omega)|, \arg[G(j\omega)]$). Διάγραμμα Nyquist.
- Να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις κέρδους $K(\omega)$ και φάσης $\varphi(\omega)$ συναρτήσεως του $\log_{10}\omega$. Διαγράμματα Bode.
- Να σχεδιαστεί το Καρτεσιανό διάγραμμα $K(\omega)$ συναρτήσεως της φάσης $\varphi(\omega)$. Διάγραμμα Nichols.

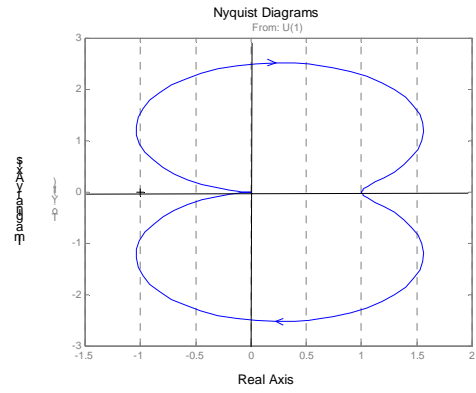
Παράδειγμα 1^ο

Διάγραμμα Nyquist

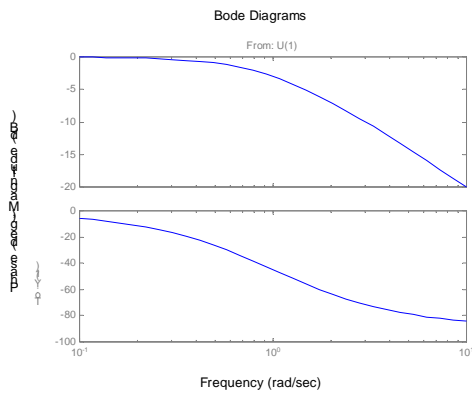


Παράδειγμα 2^ο

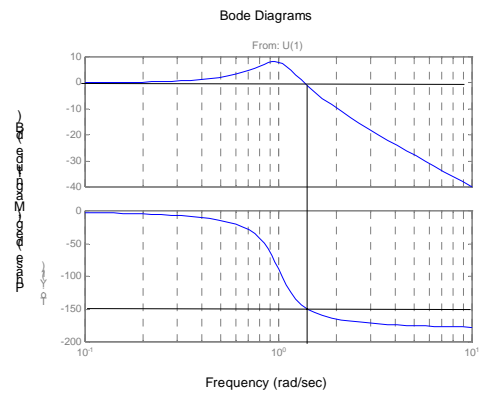
Διάγραμμα Nyquist



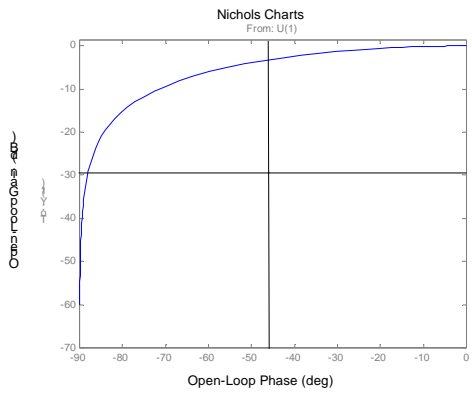
Διαγράμματα Bode



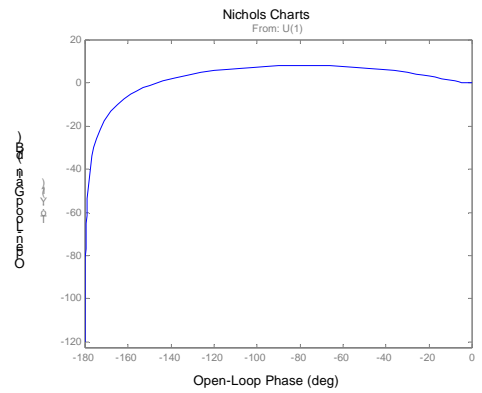
Διαγράμματα Bode



Διάγραμμα Nichols



Διάγραμμα Nichols



ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE

Παράγοντες

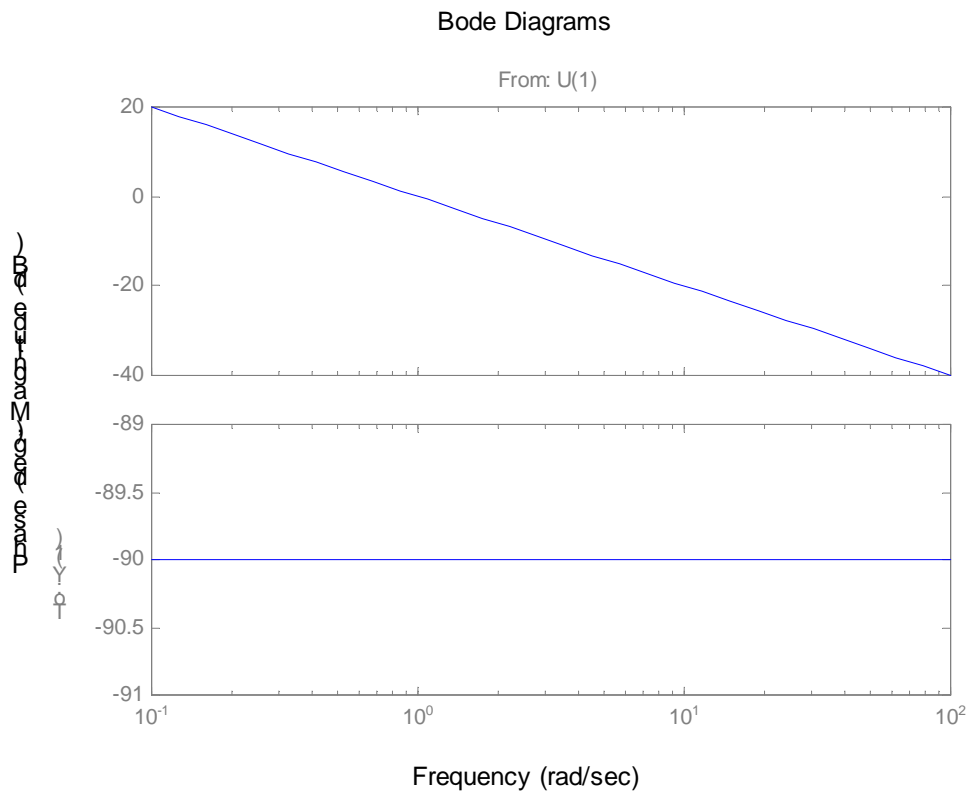
- Σταθερά Κ

- $s^{\pm 1}$

- $(1+sT)^{\pm 1}$

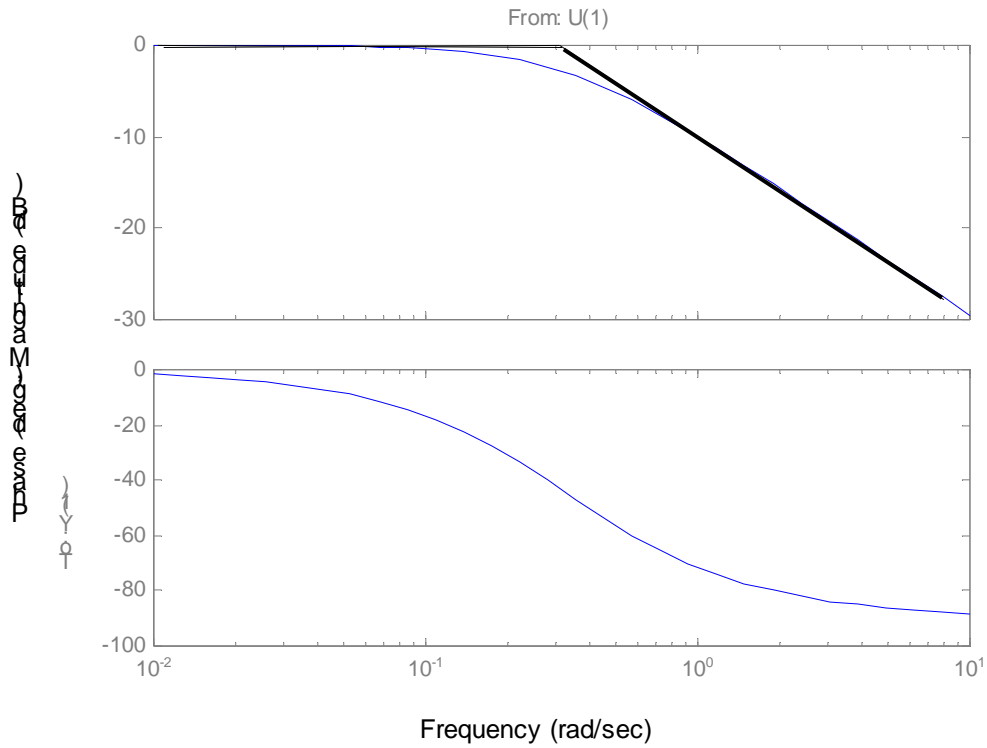
- $\left(1+2\zeta\frac{s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ 1/s



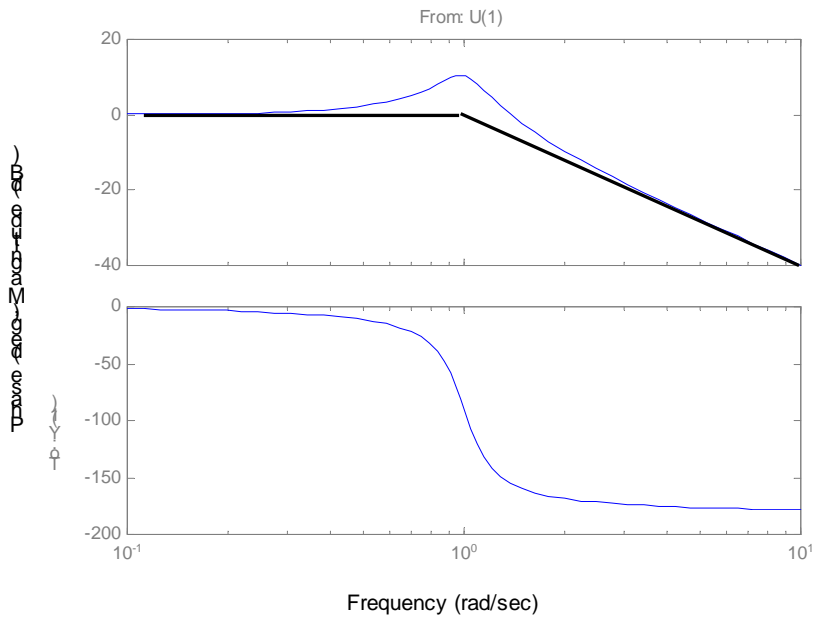
ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ $(1+sT)^{-1}$

Bode Diagrams



ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ $\left(1+2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$

Bode Diagrams



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ NYQUIST

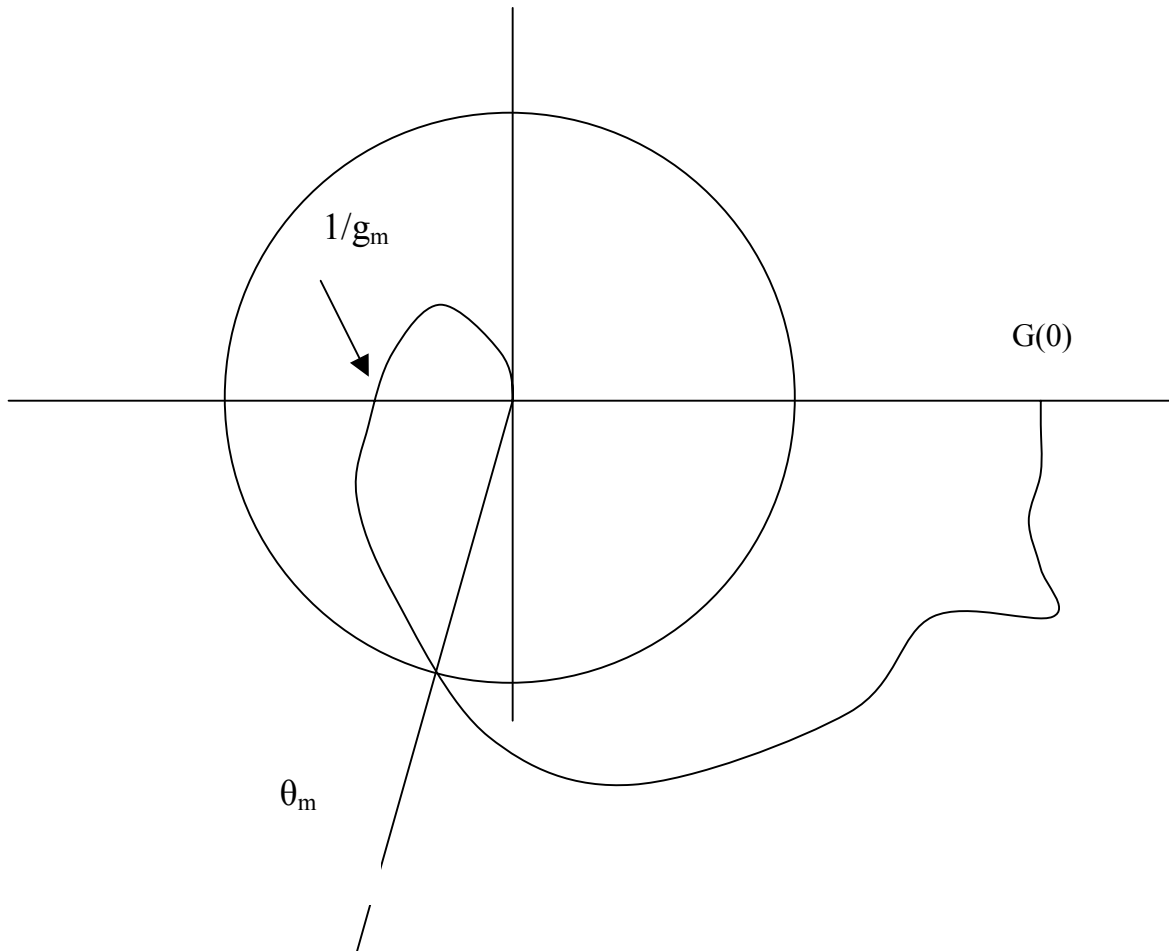
Εάν

$$G(s) = \frac{A(s)}{\Pi(s)} = \frac{m_A(s) + n_A(s)}{m_{\Pi}(s) + n_{\Pi}(s)} = \frac{(m_A(s) + n_A(s))(m_{\Pi}(s) - n_{\Pi}(s))}{m_{\Pi}^2(s) - n_{\Pi}^2(s)}$$

$$X(\omega) = \frac{m_A(s)m_{\Pi}(s) - n_A(s)n_{\Pi}(s)}{m_{\Pi}^2(s) - n_{\Pi}^2(s)} \Big|_{s=j\omega}$$

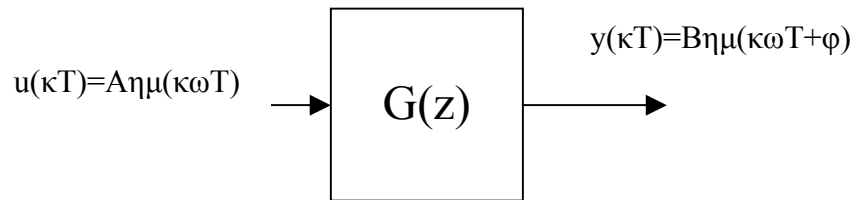
$$Y(\omega) = \frac{n_A(s)m_{\Pi}(s) - m_A(s)n_{\Pi}(s)}{m_{\Pi}^2(s) - n_{\Pi}^2(s)} \Big|_{s=j\omega}$$

Για τη σχεδίαση του διαγράμματος προσδιορίζονται κρίσιμα σημεία, όπως οι τομές με τους άξονες.



ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Έστω το σύστημα διακριτού χρόνου



$$y_{ss}(kT) = A \cdot |G(e^{j\omega T})| \cdot \eta\mu\{\kappa\omega T + \arg[G(e^{j\omega T})]\}$$

Παράδειγμα

$$G(z) = \frac{0.1813}{z - 0.8187} \left[G_{\sigma}(s) = \frac{1}{s+1} \text{ με } f_s = 5\text{Hz} \right]$$

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{0.1813}{\sigma\upsilon\nu(\omega T) - 0.8187 + j\eta\mu(\omega T)}$$

$$|G(e^{j\omega T})| = \frac{0.1813}{\sqrt{[\sigma\upsilon\nu(\omega T) - 0.8187]^2 + [\eta\mu(\omega T)]^2}}$$

$$\arg\{G(e^{j\omega T})\} = -\tau\omicron\xi\epsilon\varphi \left\{ \frac{\eta\mu(\omega T)}{\sigma\upsilon\nu(\omega T) - 0.8187} \right\} \pm 180^\circ$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1:

Επειδή

$$e^{j(\omega T + 2\pi)} = e^{j\omega T}$$

οι συναρτήσεις μέτρου και φάσης θα είναι περιοδικές με περίοδο

$$\omega_{\pi} = \frac{2\pi}{T}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2:

$$z = e^{j\omega T} = \frac{e^{j\omega T/2}}{e^{-j\omega T/2}} \approx \frac{1 + j\frac{\omega T}{2}}{1 - j\frac{\omega T}{2}}$$

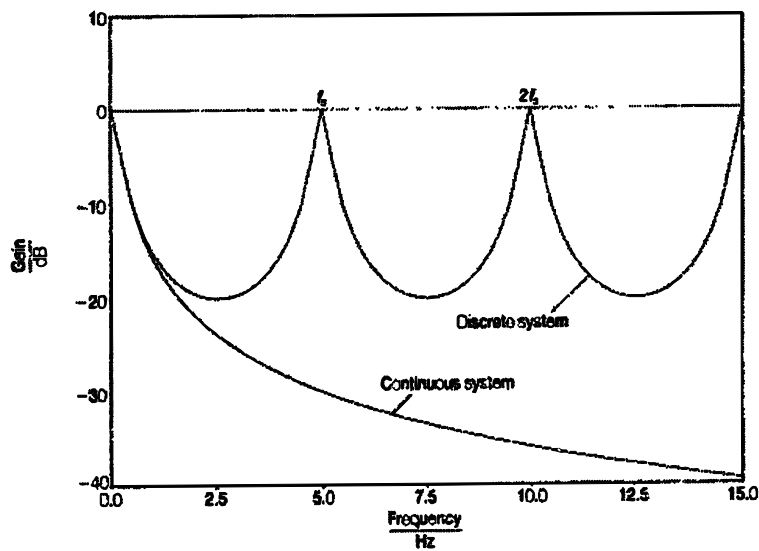
Θέτοντας

$$z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}} \quad \eta \quad w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

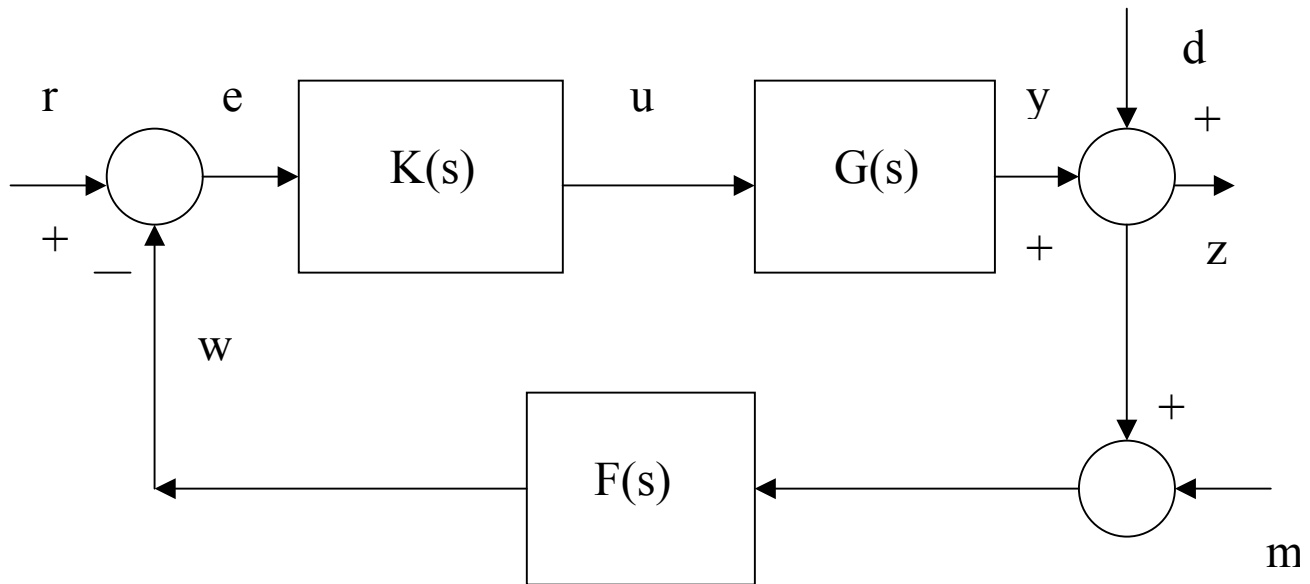
η προσεγγιστική απόκριση συχνότητας της $G(z)$ μπορεί να επιτευχθεί από την $\hat{G}(w)$ που υπολογίζεται στο σημείο jv , όπου

$$v = \frac{2}{T} \operatorname{erf} \frac{\omega T}{2}$$

Στο κατωτέρω σχήμα φαίνεται η συνάρτηση κέρδους ($20 \log_{10} |G(e^{j\omega T})|$) συναρτήσει της συχνότητας f .



ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΕΛΕΓΚΤΗ



$$z(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)F(s)}d(s) + \frac{GK}{1+GKF}r(s) - \frac{GKF}{1+GKF}m(s)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$H(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)F(s)}$$

Θα είναι

$$\frac{dH}{H} = S(s) \frac{dG}{G}$$

Η συνάρτηση

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)F(s)}$$

καλείται συνάρτηση ευαισθησίας της $H(s)$ ως προς μεταβολές της $G(s)$.

Η συνάρτηση

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)F(s)}{1+G(s)K(s)F(s)}$$

καλείται συμπληρωματική συνάρτηση ευαισθησίας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1:

Εάν για κάποιο ω είναι

$$|G(j\omega)K(j\omega)F(j\omega)| \gg 1$$

τότε με εφαρμογή της επαλληλίας (θεωρώντας $r=0, m=0$)

$$|d(j\omega)| \gg |z(j\omega)|$$

και η διαταραχή υφίσταται πολύ μεγάλη μείωση στις συχνότητες που εμφανίζονται μεγάλα κέρδη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2:

Εάν για κάποιο ω είναι

$$|G(j\omega)K(j\omega)F(j\omega)| \gg 1$$

τότε με εφαρμογή της επαλληλίας (θεωρώντας $d=0, m=0$)

$$|z(j\omega)| \approx \frac{|r(j\omega)|}{|F(j\omega)|}$$

και η έξοδος του ολικού συστήματος θα ακολουθεί την είσοδο αναφοράς r εάν $F(s)=1$. Αυτό δικαιολογεί γιατί στην συντριπτική πλειοψηφία των συστημάτων ελέγχου χρησιμοποιείται $F(s)=1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3:

Πολύ μεγάλα κέρδη του ελεγκτή οδηγούν κατά τεκμήριο το σύστημα κλειστού βρόχου σε αστάθεια.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4:

Τα πολύ μεγάλα κέρδη του ελεγκτή ενδέχεται να δημιουργήσουν μεγάλα σήματα και να προκαλέσουν τον κορεσμό σε ενεργοποιητές και όργανα μέτρησης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5:

Ο θόρυβος των μετρήσεων προκαλεί σημαντική μείωση της συμπεριφοράς του συστήματος ελέγχου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6:

Για κάθε s (συνεπώς και για $s=j\omega$)

$$S(s)+T(s)=1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7:

Θεωρώντας $F(s)=1$,

Στις χαμηλές συχνότητες όπου $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$,

$$|S(j\omega)| \approx \frac{1}{|G(j\omega)K(j\omega)|} \quad |T(j\omega)| \approx 1$$

Στις υψηλές συχνότητες όπου $|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1$

$$|S(j\omega)| \approx 1 \quad |T(j\omega)| \approx |G(j\omega)K(j\omega)|$$

Η περιοχή συχνοτήτων για την οποία $|G(j\omega)K(j\omega)| \approx 1$ είναι κρίσιμη για τη συμπεριφορά του συστήματος.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

ΒΑΣΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Εάν $\psi_o(s) = \psi_G(s) * \psi_K(s) * \psi_F(s)$ είναι το γινόμενο των χαρακτηριστικών πολυωνύμων των συστημάτων που έχουν συναρτήσεις μεταφοράς $G(s)$, $K(s)$ και $F(s)$ αντίστοιχα και $\psi_c(s)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου, ισχύει η σχέση

$$\frac{\psi_c(s)}{\psi_o(s)} = \det[I + G(s)K(s)F(s)] = \det[I + KFG] = \det[I + FGK]$$

Για συστήματα μιάς εισόδου-μιάς εξόδου αντί της ορίζουσας λαμβάνονται τα στοιχεία

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1:

Οι σχέσεις του λόγου των χαρακτηριστικών πολυωνύμων ισχύουν αν και οι μήτρες δεν αντιμετατίθενται.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2:

Η ευστάθεια είναι ιδιότητα του βρόχου και δεν εξαρτάται από το σημείο που εισάγεται η είσοδος αναφοράς ή από το σημείο που λαμβάνεται η έξοδος.

Θεώρημα

Έστω C ανοικτό σύνολο που δεν χωρίζει το επίπεδο και δεν περιέχει το σημείο ∞ . Έστω επίσης C κλειστή καμπύλη εντός του C . Εάν $f(s)$ είναι το πολυώνυμο

$$f(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

τότε

$$N = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - \lambda_i} ds = \text{αριθμός των ριζών του } f(s) \text{ εντός της } C.$$

Απόδειξη

Άμεση από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων των μιγαδικών συναρτήσεων.

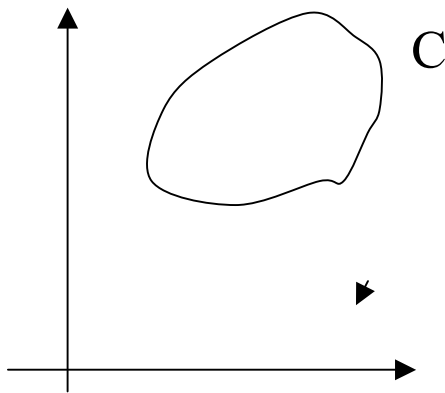
Επέκταση του θεωρήματος

Εάν η $f(s)$ είναι ρητή συνάρτηση,

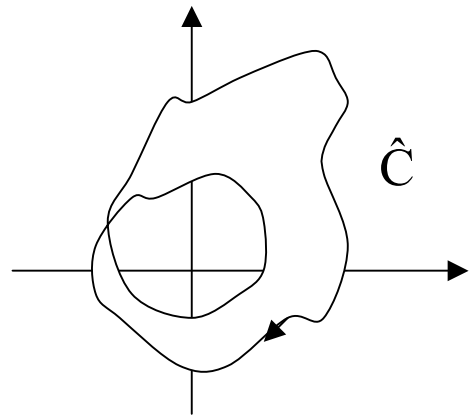
$$N = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \text{αριθμός των ριζών} - \text{αριθμός των πόλων της } f(s) \text{ εντός της } C.$$

Ας θεωρηθεί η απεικόνιση της καμπύλης C μέσω της $f(s)$ σε ένα νέο μιγαδικό επίπεδο, έστω το w -επίπεδο

s επίπεδο



w επίπεδο



Έστω \hat{C} η εικόνα της C στο w -επίπεδο. Καθώς

$$\frac{f'(s)}{f(s)} ds = j d\theta$$

N =αριθμός των ωρολογιακών περιτριγυρισμάτων της αρχής του w -επιπέδου επό την \hat{C} .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1:

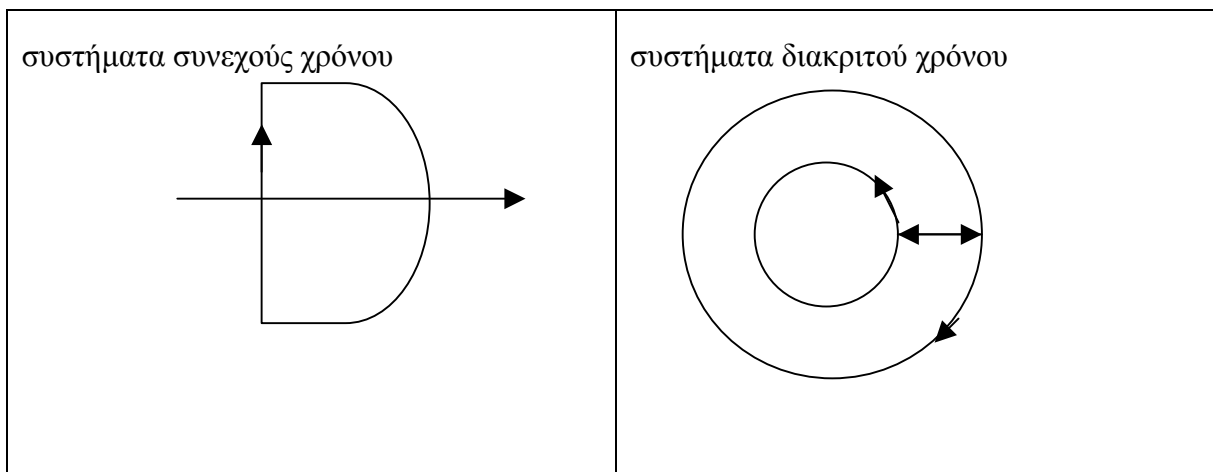
Το θεώρημα αυτό είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για τη σχεδίαση του ελεγκτή $K(s)$, ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να μην έχει πόλους σε ανεπιθύμητες περιοχές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2:

Το θεώρημα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί στη σχέση

$$\frac{\Psi_c(s)}{\Psi_o(s)} = \det[I+G(s)K(s)F(s)] = \det[I+KFG] = \det[I+FGK]$$

Η καμπύλη C πρέπει να περικλείει το σύνολο των μη επιθυμητών περιοχών. Για απλή ευστάθεια οι καμπύλες για τα συστήματα συνεχούς χρόνου και τα συστήματα διακριτού χρόνου θα είναι όπως στο Σχήμα



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3:

Για συστήματα μιάς εισόδου-μιάς εξόδου μπορεί χωρίς απώλεια της γενικότητας να τεθεί $K(s)=K$. Αυτό συμβαίνει γιατί τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή της $K(s)$ μπορούν να ενσωματωθούν στην $G(s)$. Η σχέση στην οποία θα εφαρμοστεί το θεώρημα λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\Psi_c(s)}{\Psi_o(s)} = 1 + G(s)K$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4:

Το θεώρημα ευστάθειας του συστήματος κλειστού βρόχου μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Το σύστημα κλειστού βρόχου θα είναι «ευσταθές» εάν και μόνο εάν ο αριθμός των ωρολογιακών περιτριγυρισμάτων της αρχής του w - επιπέδου από την εικόνα της C καθώς διαγράφεται ωρολογιακά είναι ίσος με τον αντίθετο αριθμό των πόλων του συστήματος ανοικτού βρόχου εντός της C . Ισοδύναμα ο αριθμός των ανθωρολογιακών περιτριγυρισμάτων της αρχής του w - επιπέδου από την εικόνα της C καθώς διαγράφεται ωρολογιακά είναι ίσος με τον αριθμό των πόλων του συστήματος ανοικτού βρόχου εντός της C .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5:

Η εικόνα \hat{C} της C από τη συνάρτηση $1+G(s)K$ είναι η εικόνα της C , έστω \tilde{C} , από τη συνάρτηση $G(s)K$ μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Άρα για την εφαρμογή του θεωρήματος θα μπορούσαν να θεωρηθούν τα ανθωρολογιακά περιτριγυρίσματα του σημείου $(-1,0)$ από την \tilde{C} , τα οποία είναι ίσα με τα αντίστοιχα περιτριγυρίσματα της αρχής από την \hat{C} .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6:

Η εικόνα \tilde{C} της C από τη συνάρτηση $G(s)K$ είναι γεωμετρικά όμοια με την εικόνα της C, έστω \hat{C} , από τη συνάρτηση $G(s)$. Άρα για την εφαρμογή του θεωρήματος θα μπορούσαν να θεωρηθούν τα ανθρωπολογικά περιτριγυρίσματα του σημείου $(-1/K, 0)$ από την \tilde{C} , τα οποία είναι ίσα με τα αντίστοιχα περιτριγυρίσματα της αρχής από την \hat{C} .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7:

Η εικόνα \hat{C} της C από τη συνάρτηση $G(s)$ είναι το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$, το οποίο πρέπει να συμπληρωθεί με την εικόνα της ημιπεριφέρειας στο άπειρο.

Παράδειγμα

Έστω

$$G(s) = \frac{10}{(s+5)(s^2+s+1)}$$

Θα είναι

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+5)(-\omega^2+j\omega+1)} = \frac{10(5-6\omega^2)-j10\omega(6-\omega^2)}{(25+\omega^2)[(1-\omega^2)^2+\omega^2]}$$

Το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για $\omega=0$ και είναι $G(j0)=2$

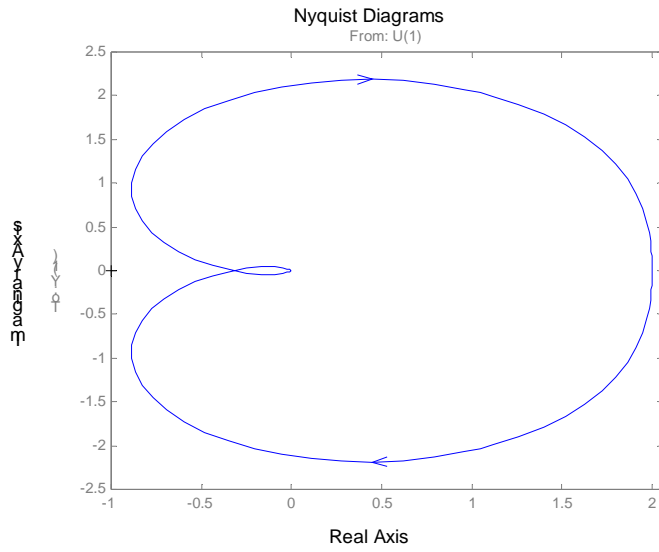
$$\omega^2=6 \text{ και είναι } G(j\sqrt{6}) = \frac{10(5-36)}{31(25+6)} = \frac{-10}{31}$$

Το πραγματικό μέρος μηδενίζεται για

$$\omega^2=5/6 \text{ και είναι } G(j\sqrt{\frac{5}{6}}) = \frac{-j10\sqrt{\frac{5}{6}}(6-\frac{5}{6})}{(25+\frac{5}{6})\left(\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}\right)} = -j2.1$$

Για $\omega \rightarrow \infty$ το όρισμα θα είναι $\theta=(n-m)(-90^\circ)=-270^\circ$.

Το διάγραμμα Nyquist φαίνεται στο Σχήμα από το οποίο λαμβάνονται



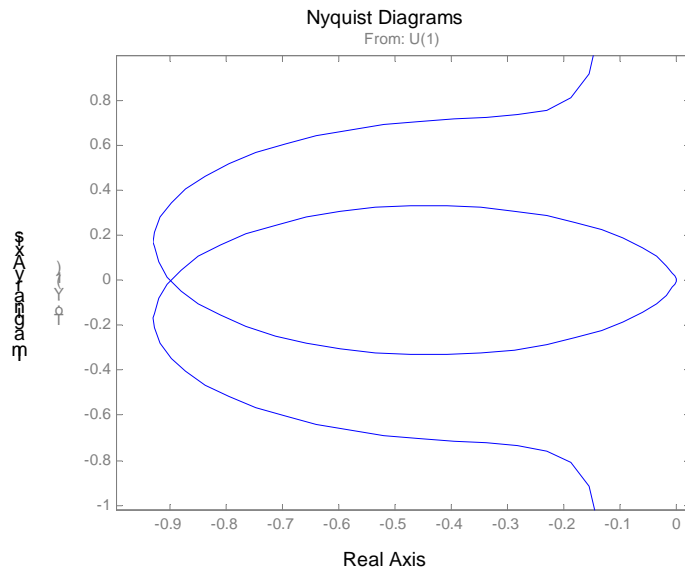
Περιθώριο κέρδους=3.1
 Περιθώριο φάσης≈30°.

Τα μεγέθη αυτά ευρωστίας δεν είναι ικανοποιητικά.

Το διάγραμμα Nyquist της

$$G(s) = \frac{0.9}{s(s^2 + 0.5s + 2)}$$

φαίνεται στο Σχήμα



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Συνδυασμός ταυτόχρονων μικρών μεταβολών σε κέρδος και φάση μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια.

ΕΥΡΩΣΤΙΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ

Η ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου πρέπει να διατηρείται για όλες τις τιμές που μπορεί να λαβουν οι παράμετροι του προς έλεγχο συστήματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1:

Συστήματα με πολύ διαφορετική συμπεριφορά (σε χρονική απόκριση) είναι δυνατόν να εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά μετά την αντιστάθμιση. Σαν παράδειγμα

$$G_1(s) = \frac{1000}{s+1} \quad \text{ΕΥΣΤΑΘΕΣ}$$

$$G_2(s) = \frac{1000}{s-1} \quad \text{ΑΣΤΑΘΕΣ}$$

$$H_1(s) = \frac{1000}{s+1001} \quad \text{ΕΥΣΤΑΘΕΣ}$$

$$H_2(s) = \frac{1000}{s+999} \quad \text{ΕΥΣΤΑΘΕΣ}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2:

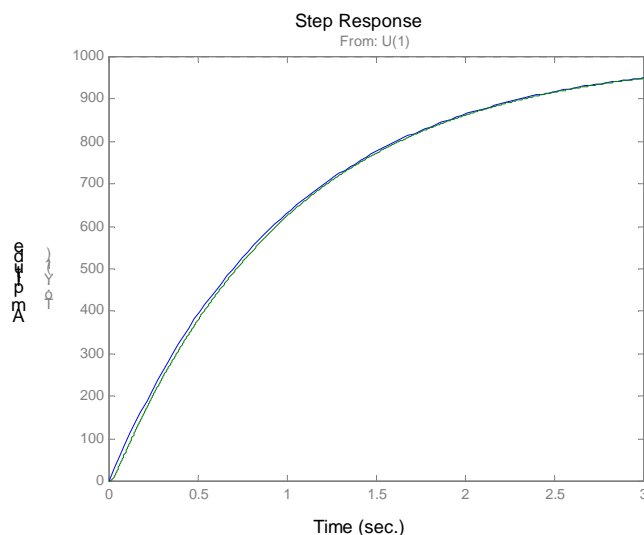
Συστήματα με παρόμοια χρονική απόκριση είναι δυνατόν να εμφανίζουν μεγάλη διαφορά στη συμπεριφορά μετά την αντιστάθμιση. Σαν παράδειγμα

$$G_1(s) = \frac{1000}{s+1} \quad \text{ΕΥΣΤΑΘΕΣ}$$

$$G_2(s) = \frac{1000 \times 100^2}{(s+1)(s+100)^2} \quad \text{ΕΥΣΤΑΘΕΣ}$$

$$H_1(s) = \frac{1000}{s+1001} \quad \text{ΕΥΣΤΑΘΕΣ}$$

$$H_2(s) = \frac{1000 \times 100^2}{(s+287)(s^2 - 86s + 34879)} \quad \text{ΑΣΤΑΘΕΣ}$$



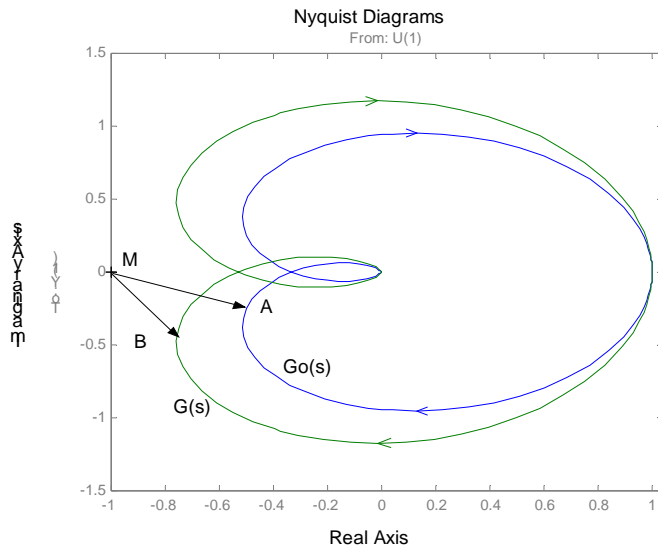
Βηματικές αποκρίσεις
 $G_1(s), G_2(s)$

Το πρόβλημα που τίθεται είναι με ποιό τρόπο θα μοντελοποιηθεί η μεταβολή της $G(s)$. Εάν

$$G(s) = G_o(s) + \Delta G(s)$$

θα είναι

$$G(s)K(s) = G_o(s)K(s) + \Delta G(s)K(s)$$



$$\begin{aligned} |AB| &= |GK - G_o K| \\ &= |K| |\Delta G| \end{aligned}$$

Θεώρημα

Εάν ο αριθμός των πόλων της $G(s)K(s)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο δεν μεταβάλλεται (η $\Delta G(s)$ δεν έχει πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο, το σύστημα κλειστού βρόχου θα παραμένει ευσταθές εάν για κάθε $s = j\omega$ είναι

$$|\Delta G(s)K(s)| < |1 + G_o(s)K(s)|$$

ή ισοδύναμα

$$\left| \frac{\Delta G(j\omega)}{G_o(j\omega)} \right| < \left| \frac{1}{T_o(j\omega)} \right|$$

Η απόσταση του διαγράμματος Nyquist από το σημείο $(-1,0)$ θα είναι

$$d = \min_{\omega} |1 + G(j\omega)K(j\omega)| = \min_{\omega} \left| \frac{1}{S(j\omega)} \right| = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τις δύο ανωτέρω σχέσεις προκύπτει ότι είναι επιθυμητό να προσδιοριστεί ο ελεγκτής ώστε $|S(j\omega)|$ και $|T(j\omega)|$ να είναι όσο το δυνατόν μικρότερα. Αυτό είναι αδύνατο αφού για κάθε s $S(s) + T(s) = 1$.

Εκτός αυτών, δύο άλλοι περιορισμοί εισάγονται από το ακόλουθο θεώρημα του Bode.

Θεώρημα

Εάν p_i , z_i είναι αντίστοιχα οι πόλοι και τα μηδενικά της $G(s)K(s)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο,

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{1}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \right| d\omega = \pi \sum_i p_i$$

$$\int_0^{\infty} \ln \left| T \left(\frac{1}{j\omega} \right) \right| d\omega = \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{G \left(\frac{1}{j\omega} \right) K \left(\frac{1}{j\omega} \right)}{1+G \left(\frac{1}{j\omega} \right) K \left(\frac{1}{j\omega} \right)} \right| d\omega = \pi \sum_i \frac{1}{z_i}$$

Από το θεώρημα προκύπτουν τα ακόλουθα:

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1:

Οι ευαισθησίες μπορούν να μειωθούν σε μία περιοχή συχνοτήτων μόνο με αύξησή τους σε άλλες περιοχές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2:

Η ύπαρξη πόλων στο δεξιό ημιεπίπεδο αυξάνει την ευαισθησία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3:

Η ύπαρξη μηδενικών στο δεξιό ημιεπίπεδο αυξάνει την συμπληρωματική ευαισθησία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4:

Ένας γρήγορος πόλος στο δεξιό ημιεπίπεδο αυξάνει την ευαισθησία περισσότερο από ένα αργό πόλο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5:

Ένα αργό μηδενικό στο δεξιό ημιεπίπεδο αυξάνει την συμπληρωματική ευαισθησία περισσότερο από ένα γρήγορο μηδενικό.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Τοποθέτηση πόλων του αντισταθμισμένου συστήματος σε επιθυμητή περιοχή.

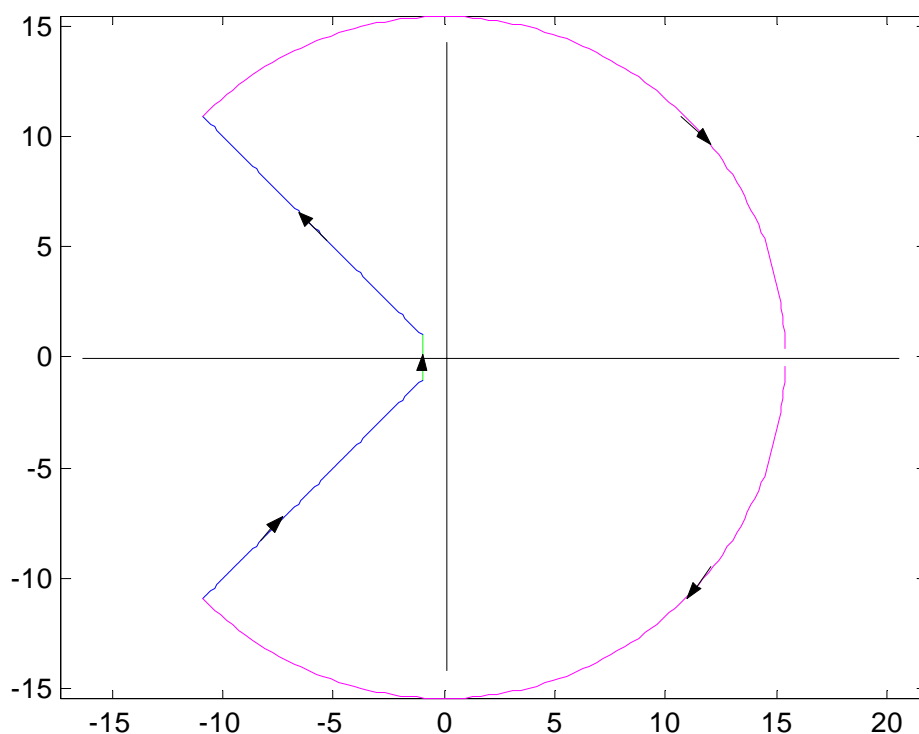
Δίδεται προς έλεγχο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

Εάν ο ελεγκτής είναι

$$K(s) = K$$

να ευρεθεί για ποιές τιμές του K οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου είναι εντός της περιοχής που καθορίζεται από τις σχέσεις $\text{re}\{s\} < -1$, $\text{arg}\{s\} > 135^\circ$ και $\text{arg}\{s\} < -135^\circ$.



Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη C του Σχήματος που σχηματίζεται από τα όρια της περιοχής και το τόξο της περιφέρειας με κέντρο την αρχή, ακτίνα που τείνει στο άπειρο και εκτείνεται και στο δεξιό ημιπίεδο.

Για την απεικόνιση της C μέσω της $G(s)$ εφαρμόζεται η ακόλουθη διαδικασία

ΤΜΗΜΑ ΑΒ $s=-1+j\omega$ με $-1 \leq \omega \leq 1$ και

$$G(s) = \frac{1}{(-1+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{(-1-j\omega)(3-j\omega)}{(1+\omega^2)(9+\omega^2)} = \frac{-3-\omega^2-2j\omega}{(1+\omega^2)(9+\omega^2)} \Big|_{-1 \leq \omega \leq 1}$$

ΤΜΗΜΑ ΒΓ $s=(-1+j)\omega$ με $1 \leq \omega$ και

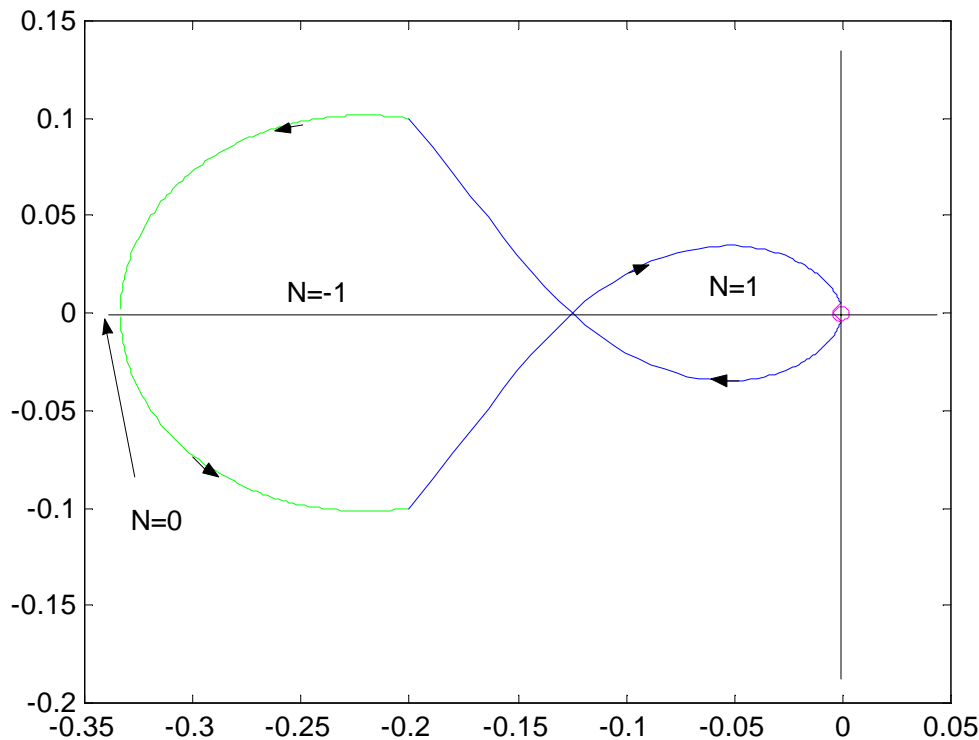
$$G(s) = \frac{1}{(-1+j)\omega(4-\omega+j\omega)} = \frac{(-1-j)(4-\omega-j\omega)}{2\omega[(4-\omega^2)^2+\omega^2]} = \frac{-4+j(2\omega-4)}{2\omega[(4-\omega^2)^2+\omega^2]} \Big|_{1 \leq \omega}$$

ΤΟΞΟ ΓΔ $s=re^{j\omega}$ με $-\frac{3\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{3\pi}{4}$ και

$$G(s) = \frac{1}{r^2} e^{-2j\omega} \Big|_{-\frac{3\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{3\pi}{4}}$$

ΤΜΗΜΑ ΔΑ $s=(1+j)\omega$ με $\omega \leq -1$

Η απεικόνιση της C μέσω της $G(s)$ δίδει την καμπύλη του Σχήματος



Το σύστημα ανοικτού βρόχου έχει ένα πόλο ($s=0$) στην απαγορευμένη περιοχή. Για να μην έχει το σύστημα κλειστού βρόχου κανένα πόλο εντός της απαγορευμένης περιοχής πρέπει και αρκεί $N=-1$. Αυτό οδηγεί στην ανισότητα

$$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{K} < -0.125$$

ή ισοδύναμα

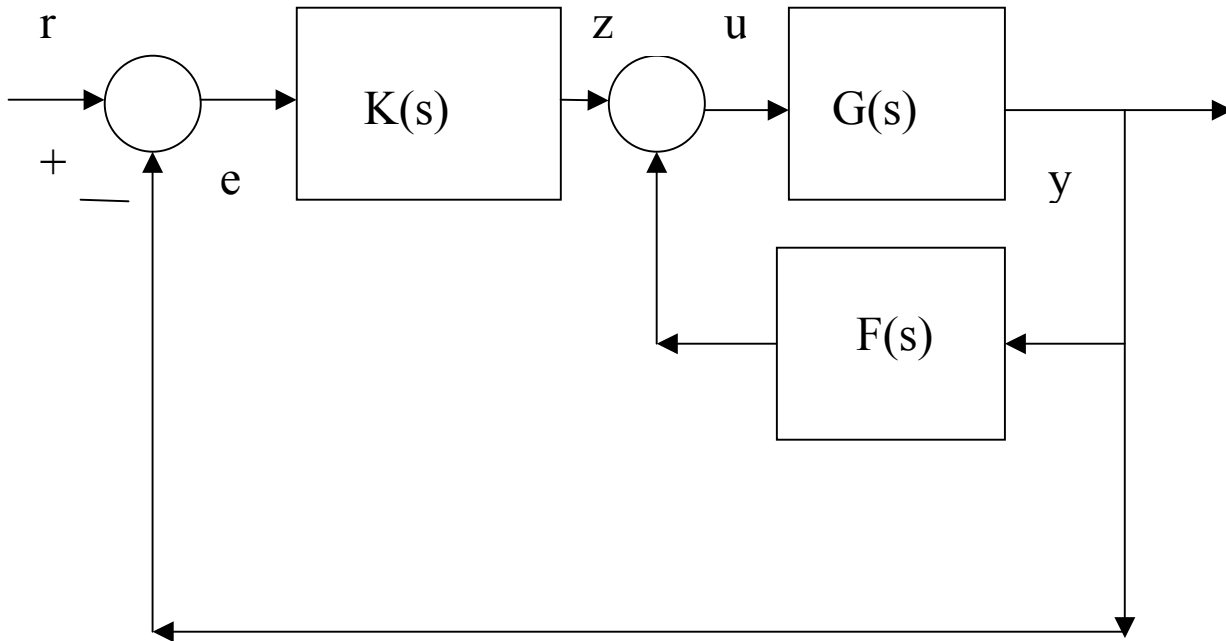
$$3 < K < 8$$

Η σχεδίαση του διαγράμματος Nyquist έγινε με προγραμματισμό σε περιβάλλον MATLAB ως ακολούθως.

```
for K=1:100
    t(K)=-1+i*0.01*K;
    g(K)=1/t(K)/(t(K)+4);
    tr(K)=real(t(K));
    ti(K)=imag(t(K));
    gr(K)=real(g(K));
    gi(K)=imag(g(K));
    t1(K)=-1+i*1+(-1+i*1)*0.1*(K-1);
    g1(K)=1/t1(K)/(t1(K)+4);
    tr1(K)=real(t1(K));
    ti1(K)=imag(t1(K));
    gr1(K)=real(g1(K));
    gi1(K)=imag(g1(K));
    t2(K)=10.9*1.414*exp(i*3*pi*(101-K)/400);
    g2(K)=1/t2(K)/(t2(K)+4);
    tr2(K)=real(t2(K));
    ti2(K)=imag(t2(K));
    gr2(K)=real(g2(K));
    gi2(K)=imag(g2(K));
end
plot(gr,gi,'g',gr1,gi1,'b',gr2,gi2,'m',gr,-gi,'g',gr1,-gi1,'b',gr2,-
gi2,'m')
```

Σχεδίαση αντιστάθμισης με εσωτερικό βρόχο.

Για το σύστημα ελέγχου του Σχήματος δίδονται



$$G(s) = \frac{1}{Js^2 + Bs}$$

$$F(s) = cs$$

$$K(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT} \right)$$

Οι παράμετροι του ελεγκτή (K, T) πρέπει να προσδιοριστούν ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές.

Η συνάρτηση μεταφοράς που συνδέει τα σήματα z και y θα είναι

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{1}{Js^2 + (B+c)s}$$

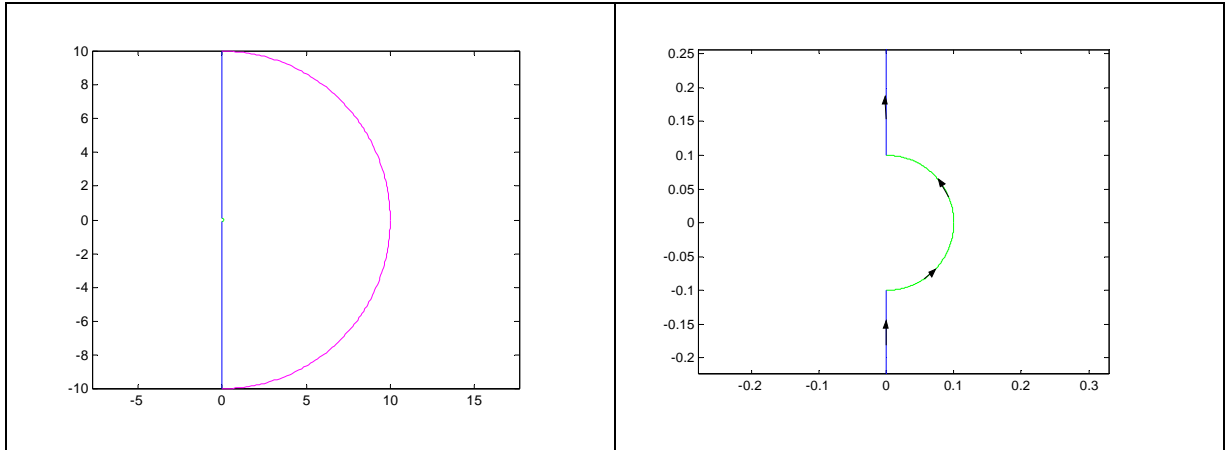
Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου θα είναι

$$L(s) = K(s)H(s) = K \frac{1+sT}{Ts^2(Js+B+c)} = K\hat{G}(s)$$

και γράφεται κατ' αυτόν τον τρόπο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος (ο ελεγκτής πρέπει να είναι μόνο σταθερό κέρδος).

Η καμπύλη C συνίσταται από την ημιπεριφέρεια ακτίνας r (για να αποφευχθεί ο διπλός πόλος στο s=0) που εκτείνεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, τα τμήματα του φανταστικού άξονα

από $-jR$ έως jr και από jr έως jR και την ημιπεριφέρεια ακτίνας R που εκτείνεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, όπως στο Σχήμα.



Για την απεικόνιση της C μέσω της $G(s)$ εφαρμόζεται η ακόλουθη διαδικασία

ΤΟΞΟ ΑΒ $s=re^{j\omega}$ με $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$ και

$$G(s) = \frac{1}{T(B+c)} \times \frac{1}{r^2} e^{-2j\omega} \Big|_{\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}}$$

ΤΜΗΜΑ ΒΓ $s=j\omega$ με $r \leq \omega \leq R$ και

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T}}{-J\omega^2(j\omega + \lambda)} \Big|_{r \leq \omega \leq R} = \frac{\omega^2 + \frac{\lambda}{T} + j\omega \left(\lambda - \frac{1}{T} \right)}{-J\omega^2(\lambda^2 + \omega^2)} \quad \text{με} \quad \lambda = \frac{B+c}{J}$$

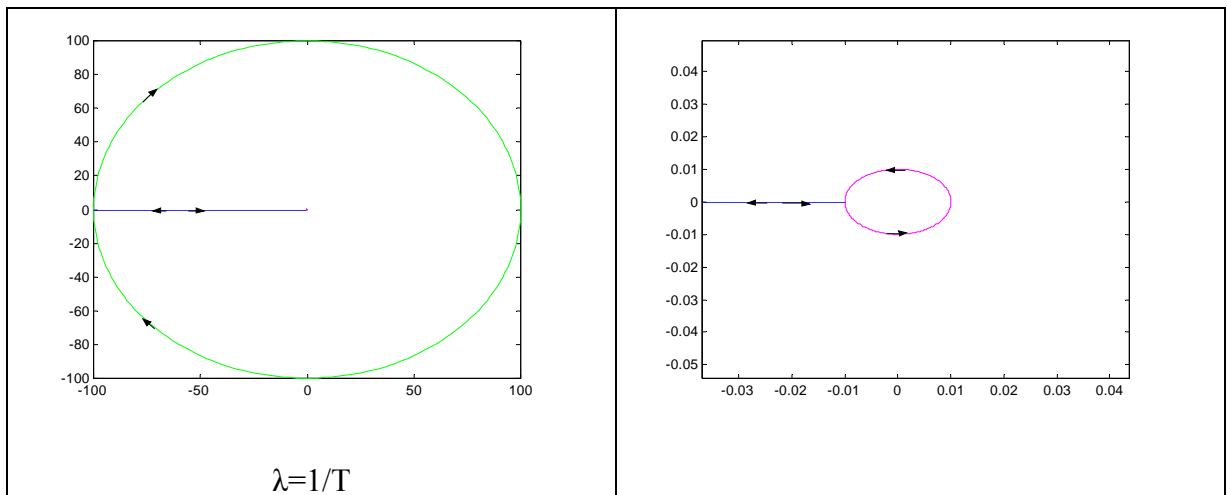
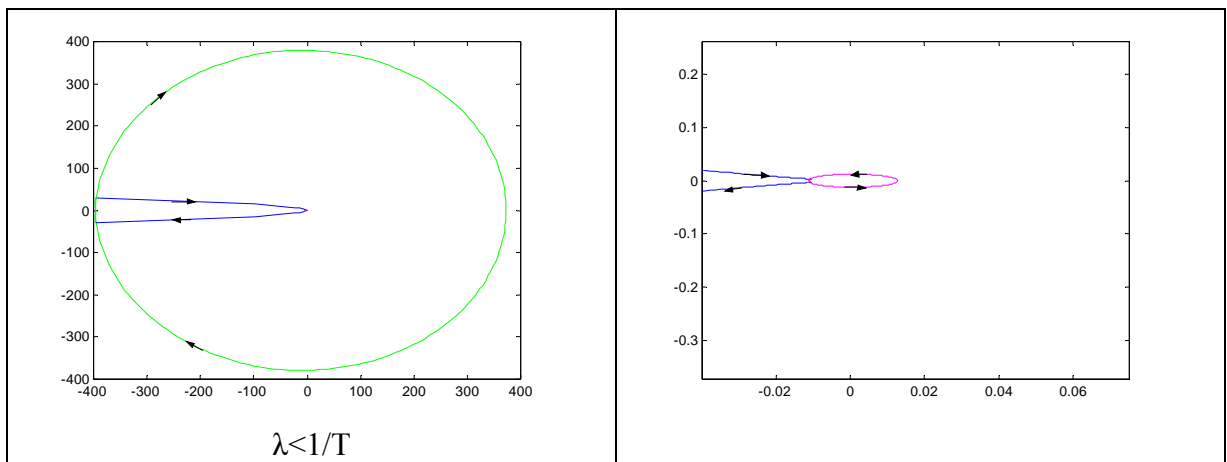
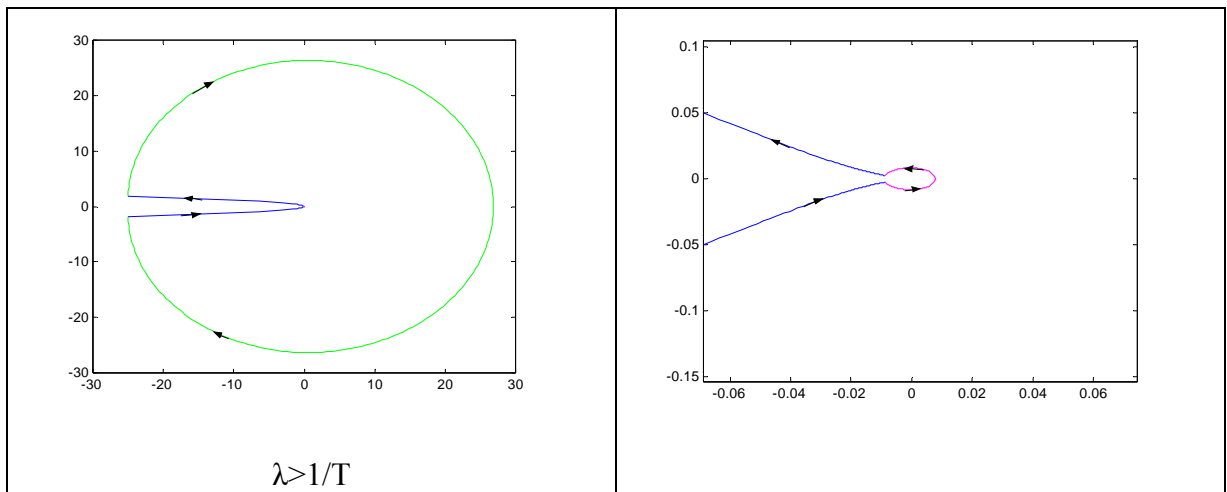
ΤΟΞΟ ΓΔ $s=Re^{j\omega}$ με $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$ και

$$G(s) = \frac{1}{J} \times \frac{1}{R^2} e^{-2j\omega} \Big|_{\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}}$$

ΤΜΗΜΑ ΔΑ $s=j\omega$ με $-R \leq \omega \leq -r$ και

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T}}{-J\omega^2(j\omega + \lambda)} \Big|_{-R \leq \omega \leq -r} \quad \text{με} \quad \lambda = \frac{B+c}{J}$$

Οι απεικονίσεις της C μέσω της $G(s)$ δίδονται από τα κατωτέρω σχήματα, ανάλογα με την τιμή του λ σε σχέση με το T .



Όπως προκύπτει από τα διαγράμματα, για να είναι ευσταθές το σύστημα κλειστού βρόχου πρέπει

$$\lambda > 1/T \quad \text{και} \quad K > 0$$

Η σχεδίαση του διαγράμματος Nyquist έγινε με προγραμματισμό σε περιβάλλον MATLAB ως ακολούθως.

```

for K=1:100
    t(K)=0.1*exp(i*pi*(K-1)/198);
    g(K)=(t(K)+1)/t(K)^2/(t(K)+1);
    tr(K)=real(t(K));
    ti(K)=imag(t(K));
    gr(K)=real(g(K));
    gi(K)=imag(g(K));
    t1(K)=(0.1+9.9*(K-1)/99)*i;
    g1(K)=(t1(K)+1)/t1(K)^2/(t1(K)+1);
    tr1(K)=real(t1(K));
    ti1(K)=imag(t1(K));
    gr1(K)=real(g1(K));
    gi1(K)=imag(g1(K));
    t2(K)=10*exp(i*pi*(K-1)/198);
    g2(K)=(t2(K)+1)/t2(K)^2/(t2(K)+1);
    tr2(K)=real(t2(K));
    ti2(K)=imag(t2(K));
    gr2(K)=real(g2(K));
    gi2(K)=imag(g2(K));

end
plot(gr,gi,'g',gr1,gi1,'b',gr2,gi2,'m',gr,-gi,'g',gr1,-gi1,'b',gr2,-
gi2,'m')

```

Το ανωτέρω συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί με χρήση του κριτηρίου Routh ως εξής.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi_c(s) = Js^2(s+\lambda) + K(s + \frac{1}{T}) = Js^3 + J\lambda s^2 + Ks + \frac{K}{T}$$

Η διάταξη Routh είναι

s^3	J	K
s^2	Jλ	K/T
s	$\frac{J\lambda K - KJ}{J\lambda} \left(\frac{1}{T} \right) (2\lambda J)$	
s^0	K/T	

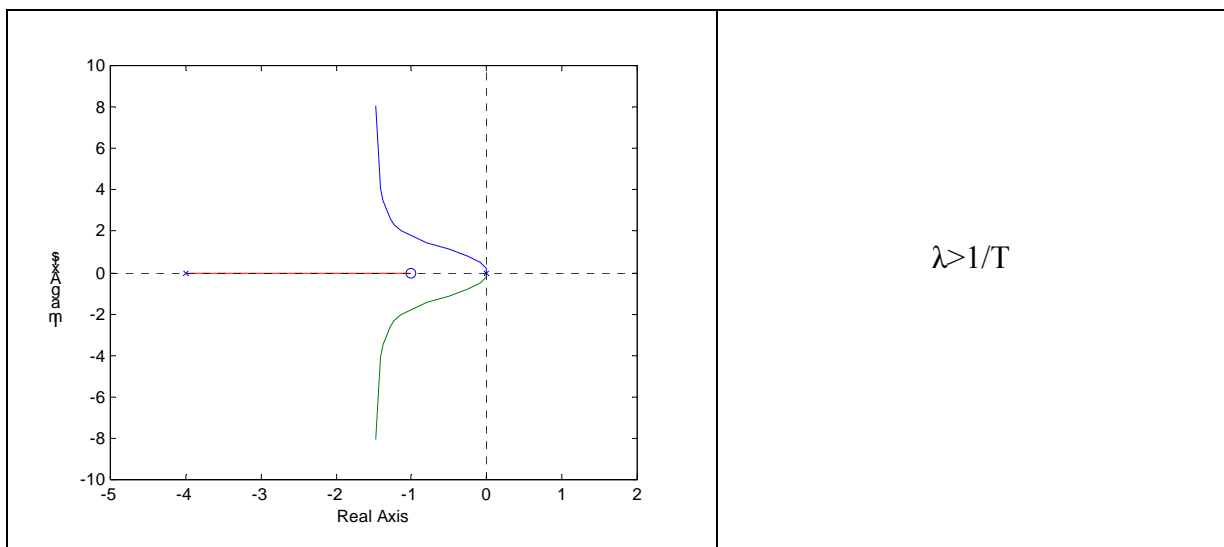
Καθώς λ, J, T είναι θετικά,

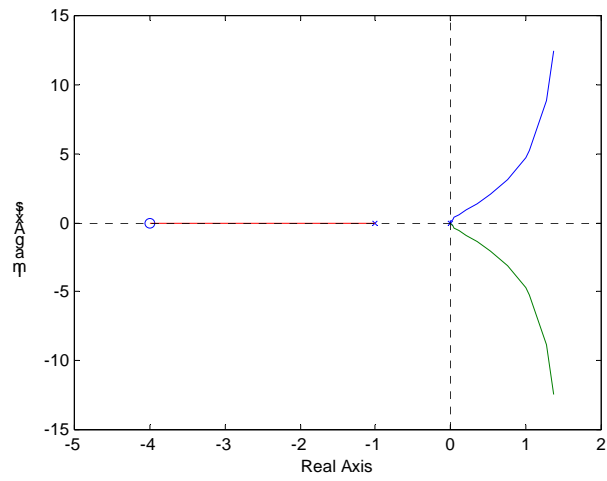
- εάν $JK(1-\lambda/T) > 0$ και $K > 0$, ουδεμία αλλαγή προσήμου συμβαίνει στην πρώτη στήλη με αποτέλεσμα το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές.

- εάν $JK(1-\lambda/T) < 0$ και $K > 0$, δύο αλλαγές προσήμου συμβαίνουν στην πρώτη στήλη με αποτέλεσμα το σύστημα κλειστού βρόχου να έχει δύο πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο και συνεπώς να είναι ασταθές.
- εάν $JK(1-\lambda/T) = 0$ και $K > 0$, υπάρχει μηδενισμός γραμμής. Η παράσταση στη θέση (3,1) της διάταξης αντικαθίσταται από την $2\lambda J$. Καθώς ουδεμία αλλαγή προσήμου συμβαίνει στην πρώτη στήλη, το σύστημα κλειστού βρόχου έχει ένα ζεύγος συζυγών φανταστικών πόλων και δεν θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- εάν $JK(1-\lambda/T) > 0$ και $K < 0$, μία αλλαγή προσήμου συμβαίνει στην πρώτη στήλη με αποτέλεσμα το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ασταθές έχοντας ένα πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο.
- εάν $JK(1-\lambda/T) < 0$ και $K < 0$, μία αλλαγή προσήμου συμβαίνει στην πρώτη στήλη με αποτέλεσμα το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ασταθές έχοντας ένα πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο.
- εάν $JK(1-\lambda/T) = 0$ και $K < 0$, υπάρχει μηδενισμός γραμμής. Η παράσταση στη θέση (3,1) της διάταξης αντικαθίσταται από την $2\lambda J$. Καθώς μία αλλαγή προσήμου συμβαίνει στην πρώτη στήλη, το σύστημα κλειστού βρόχου έχει ένα πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο και θα είναι ασταθές.

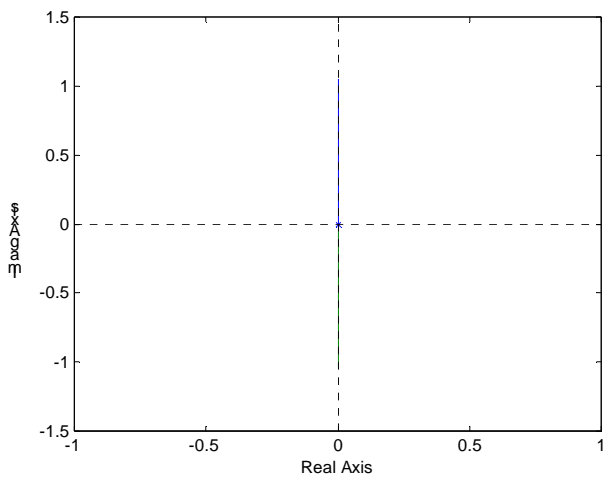
Η περίπτωση $K=0$ δεν εξετάζεται γιατί αφορά άνοιγμα του βρόχου και στην ουσία κατάργηση του ελεγκτή.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εξαχθεί και με τη χρήση του γεωμετρικού τόπου των ριζών.





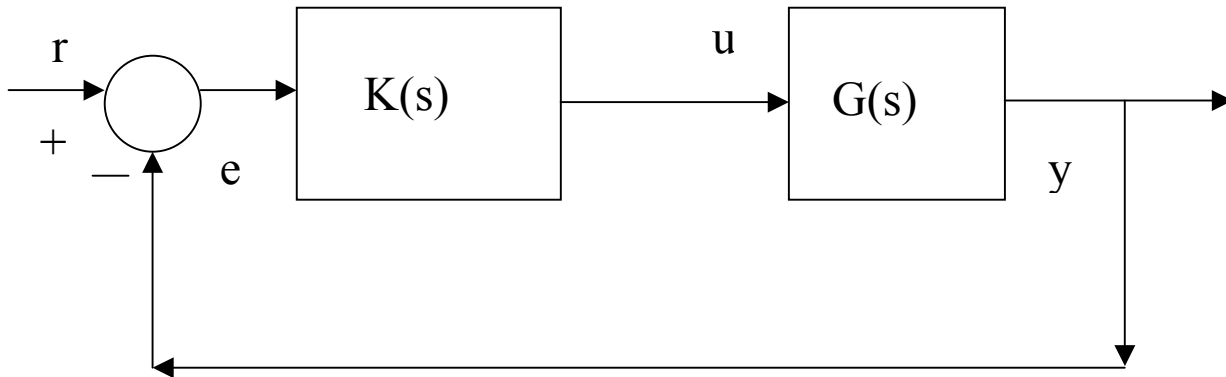
$$\lambda < 1/T$$



$$\lambda = 1/T$$

Μελέτη ευστάθειας μεταβαλλομένων συστημάτων.

Για το σύστημα ελέγχου του Σχήματος δίδονται



$$G(s) = \frac{s+B}{\left(s+\frac{7}{3}\right)(s^2+s+1)} \quad B>0$$

$$K(s) = \frac{s+1}{s}$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι για ποιές τιμές της παραμέτρου B του προς έλεγχο συστήματος το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές. Αν και το πρόβλημα δεν μοιάζει με αυτά που εξετάστηκαν, η ίδια μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$H(s) = \frac{\frac{s+1}{s} \times \frac{s+B}{\left(s+\frac{7}{3}\right)(s^2+s+1)}}{1 + \frac{s+1}{s} \times \frac{s+B}{\left(s+\frac{7}{3}\right)(s^2+s+1)}}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi_c(s) = s \left(s + \frac{7}{3}\right) (s^2 + s + 1) + (s+1)(s+B) = s \left[s^3 + \frac{10}{3}s^2 + \frac{13}{3}s + \frac{10}{3} \right] + B(s+1)$$

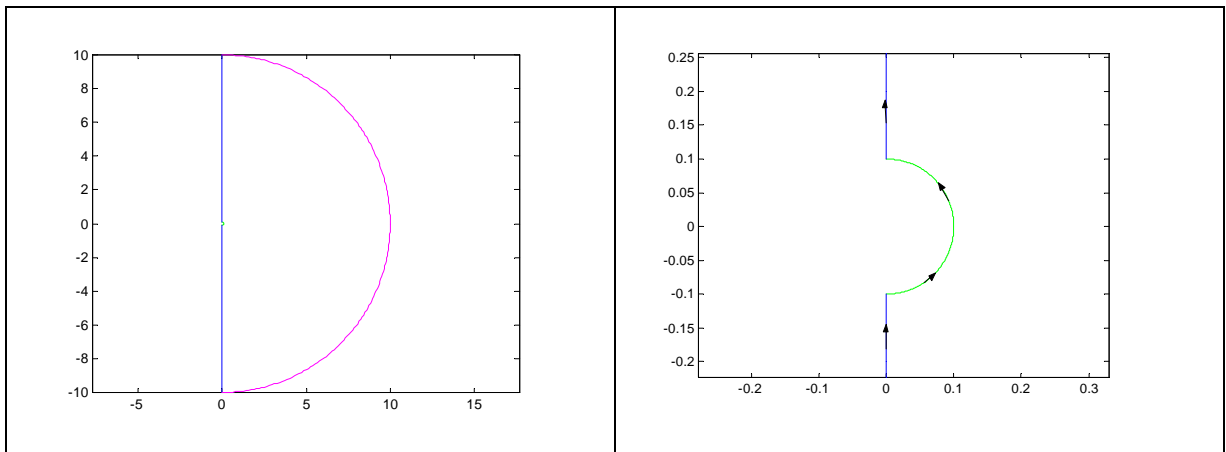
Αυτό είναι ισοδύναμο με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός συστήματος κλειστού βρόχου όπου το προς έλεγχο σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$\hat{G}(s) = \frac{s+1}{s \left[s^3 + \frac{10}{3}s^2 + \frac{13}{3}s + \frac{10}{3} \right]}$$

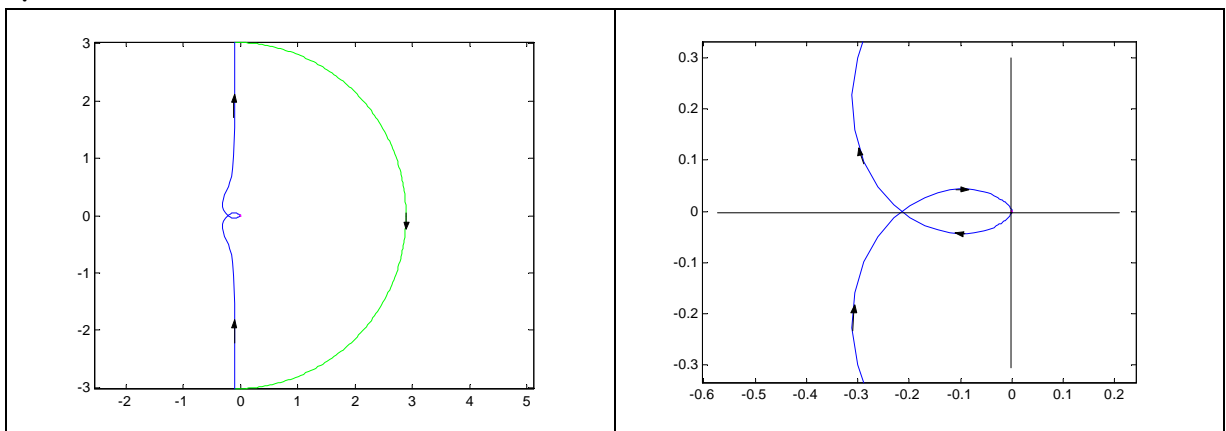
και ελεγκτή με σταθερό κέρδος

$$K=B$$

Η καμπύλη C συνίσταται από ημιπεριφέρεια ακτίνας $r \rightarrow 0$ και εκτείνεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, τα ευθύγραμμα τμήματα του φανταστικού άξονα από $-jR$ έως $-jr$ και από jr έως jR και από την ημιπεριφέρεια ακτίνας $R \rightarrow \infty$ που εκτείνεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, όπως στο κατωτέρω Σχήμα



Στο κατωτέρω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα Nyquist της $\hat{G}(s)$.



Το σημείο τομής με τον αρνητικό πραγματικό άξονα είναι $s = -0.215$. Συνεπώς το σύστημα θα είναι ευσταθές για $B < 4.64$

Το ανωτέρω αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί με το κριτήριο Routh, ως εξής

s^4	1	13/3	B
s^3	10/3	B+10/3	
s^2	$\frac{100-9B}{30}$	B	
s	$\frac{\frac{100-9B}{30} \times \frac{10+3B}{3} - \frac{10B}{3}}{\frac{100-9B}{30}}$		
s^0	B		

Για την ευστάθεια τα στοιχεία της πρώτης στήλης της διάταξης πρέπει να είναι θετικά. Συνεπώς

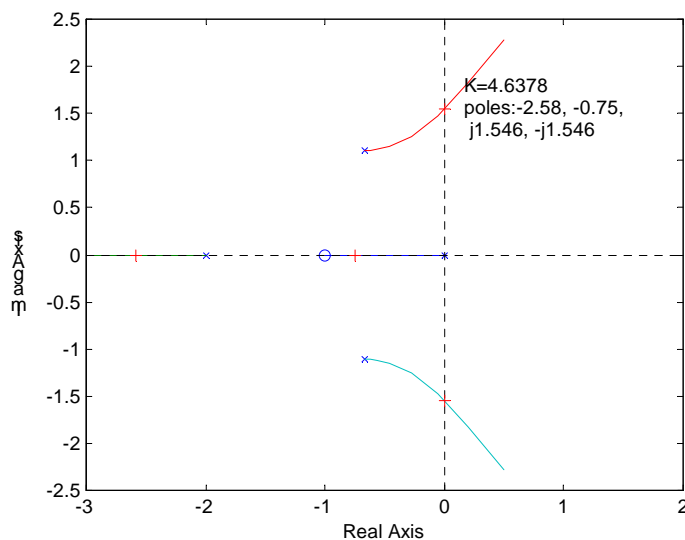
$$\frac{100-9B}{30} > 0 \Rightarrow B < 100/9 = 11.1$$

$$-27B^2 + 210B + 1000 - 300B > 0 \text{ ή } 27B^2 + 90B - 1000 < 0$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει μεταξύ των ριζών του τριωνύμου. Καθώς $B > 0$, θα είναι

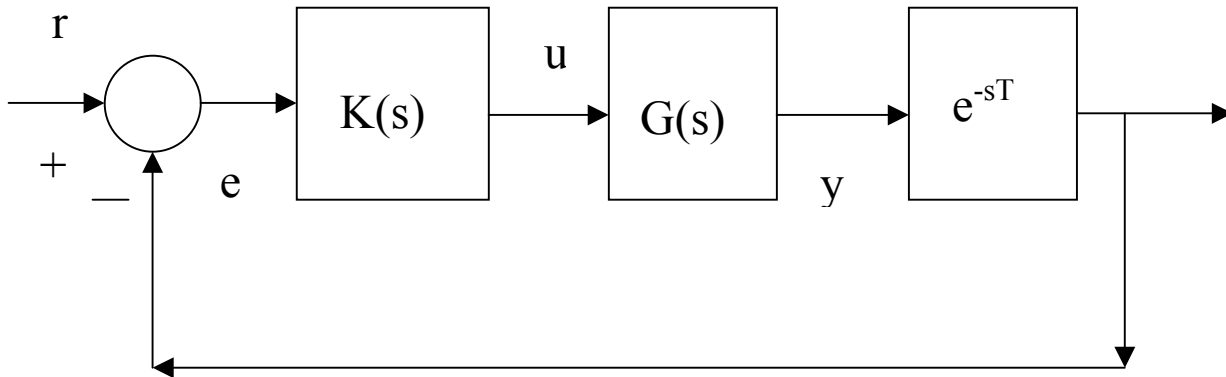
$$B < \frac{-90 + \sqrt{8100 + 108000}}{54} = 4.64$$

Στο κατωτέρω σχήμα φαίνεται ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος. Καθώς το B αυξάνει δύο πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου οδηγούνται στο δεξιό ημιεπίπεδο. Για την εύρεση του οριακού B στο οποίο συμβαίνει η μετάβαση από το αριστερό στο δεξιό ημιεπίπεδο χρησιμοποιείται το κριτήριο Routh, όπως ανωτέρω.



Ευρωστία του αντισταμισμένου συστήματος σε καθυστέρηση της μέτρησης.

Το κατωτέρω σύστημα ελέγχου του Σχήματος περιγράφει τη διαδικασία εξέλασης λαμαρίνας με συνάρτηση μεταφοράς



$$G(s) = \frac{1}{s+\tau} \quad 0.8 < \tau < 1.2$$

και τον ελεγκτή με συνάρτηση μεταφοράς

$$K(s) = \frac{1}{s+0.1}$$

Ο αισθητήρας του πάχους της λαμαρίνας τοποθετείται σε απόσταση L από την έξοδο της μηχανής εξέλασης, προκαλώντας καθυστέρηση της μέτρησης

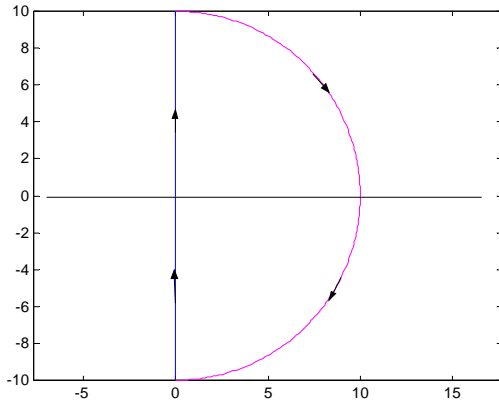
$$T = \frac{L}{v}$$

όπου v είναι η ταχύτητα κίνησης της λαμαρίνας μετά την έξοδό της από τη μηχανή. Εάν $v=1\text{m/sec}$, ζητείται να καθοριστεί η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να τοποθετηθεί ο αισθητήρας χωρίς να περιπίπτει σε αστάθεια το αντισταμισμένο σύστημα.

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί το διάγραμμα Nyquist. Είναι προφανές ότι η μεταβολή της παραμέτρου τ δημιουργεί μία οικογένεια διαγραμμάτων και η απαίτηση είναι για καμία τιμή της τ το σύστημα κλειστού βρόχου να μην είναι ασταθές. Εάν θεωρήσουμε

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1}$$

την ονομαστική συνάρτηση μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος. Η καμπύλη C θα είναι όπως στο ακόλουθο Σχήμα.



Θα ισχύουν

$$|\Delta G(j\omega)K(j\omega)| = \left| \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+\tau} \right) \frac{1}{s+0.1} \right|_{s=j\omega} =$$

$$\frac{|\tau-1|}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+\tau^2}\sqrt{\omega^2+0.01}} \leq \frac{|\tau-1|}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+0.8^2}\sqrt{\omega^2+0.01}} = R(\omega)$$

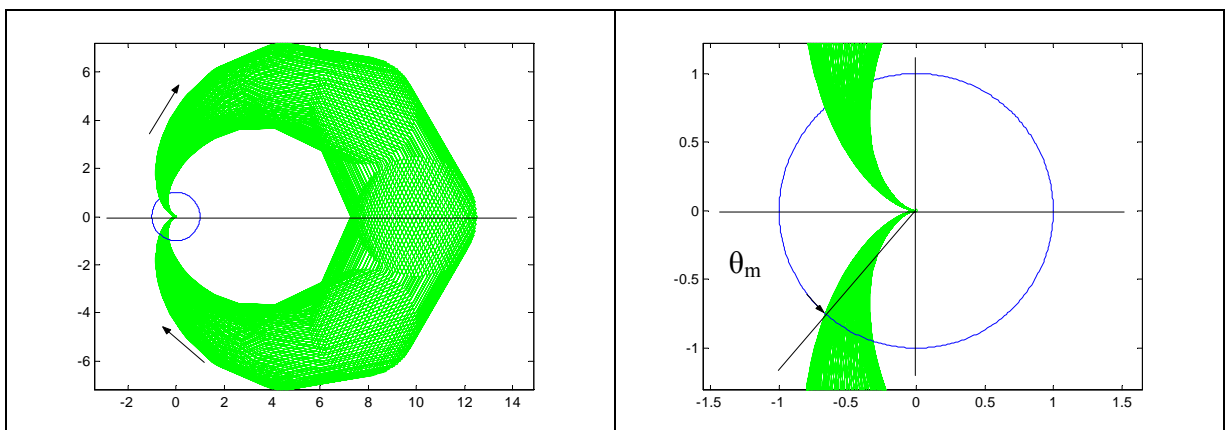
δηλαδή για κάθε $s=j\omega$, η $G(j\omega)K(j\omega)$ θα βρίσκεται εντός ενός κύκλου με κέντρο το σημείο $G_0(j\omega)K(j\omega)$ και ακτίνα $R(\omega)$ και

$$|G(s)K(s)|_{s=Re^{j\theta}} = \left| \frac{1}{s+\tau} \frac{1}{s+0.1} \right|_{s=Re^{j\theta}} \leq$$

$$\frac{1}{(R-\tau)(R-0.1)} \leq \frac{1}{(R-\tau_{\min})(R-0.1)} = \frac{1}{(R-0.8)(R-0.1)} = R_1$$

δηλαδή για κάθε s επάνω στην ημιπεριφέρεια η $G(s)K(s)$ θα βρίσκεται εντός ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R_1 .

Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του MATLAB που φαίνεται κατωτέρω σχεδιάστηκε το διάγραμμα Nyquist της $G_0(j\omega)K(j\omega)$ και η ζώνη που δημιουργείται από το σύνολο των κύκλων.



```

clear all
for K=1:200
    zt(K)=exp(i*pi*(K-1)/199);
    ztr(K)=real(zt(K));
    zti(K)=imag(zt(K));
    zr(K)=ztr(K)/9.15/9.85
    zi(K)=zti(K)/9.15/9.85
end
for I=1:200
    center(I)=1/(0.1-0.05^2*(I-1)^2+1.1*i*0.05*(I-1));
    radius(I)=0.2/sqrt(1+0.05^2*(I-1)^2)/sqrt(0.01+0.05^2*(I-1)^2)/sqrt(0.64+0.05^2*(I-1)^2);
for K=1:200
    t(I,K)=center(I)+radius(I)*exp(i*2*pi*(K-1)/99);
    tr(I,K)=real(t(I,K));
    ti(I,K)=imag(t(I,K));
end
end
plot(tr,ti,'g',zr,zi,'g',ztr,zti,'b',tr,-ti,'g',zr,-zi,'g',ztr,-zti,'b')
axis equal

```

Η καθυστέρηση e^{-sT} για κάθε $s=j\omega$ περιστρέφει το διάνυσμα της $G(j\omega)K(j\omega)$ κατά ωT rad ενώ αφήνει το μέτρο της αναλλοίωτο. Από τη λεπτομέρεια του διαγράμματος Nyquist που φαίνεται στο σχήμα, το περιθώριο φάσης είναι τουλάχιστον 48° και η κυκλική συχνότητα που εμφανίζεται το όριο αυτό είναι $\omega_0=0.8\text{rad/sec}$. Συνεπώς

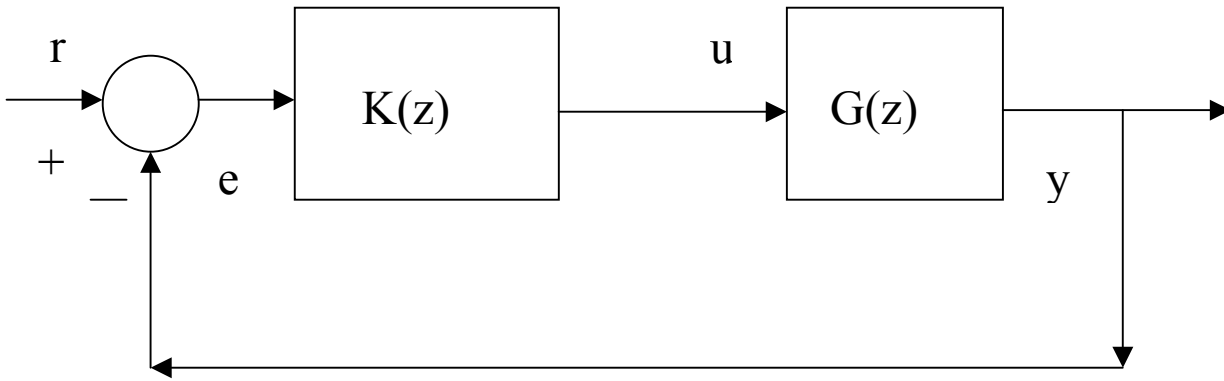
$$T = \frac{48^\circ \cdot \frac{\pi}{180}}{\omega_0} = \frac{0.838}{0.8} = 1.047\text{sec}$$

και η μέγιστη απόσταση δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από

$$L = vT = 1.047\text{m}$$

Μελέτη ευστάθειας αντισταθμισμένων διακριτών συστημάτων.

Για το σύστημα ελέγχου διακριτού χρόνου του Σχήματος δίδονται

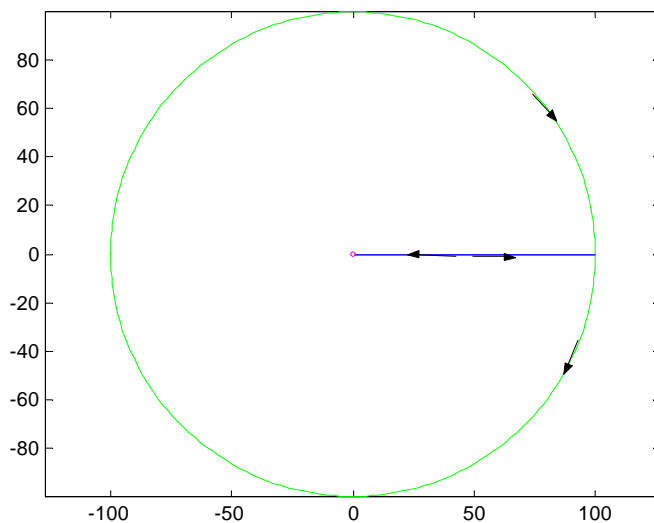


$$G(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-0.5)(z+0.2)}$$

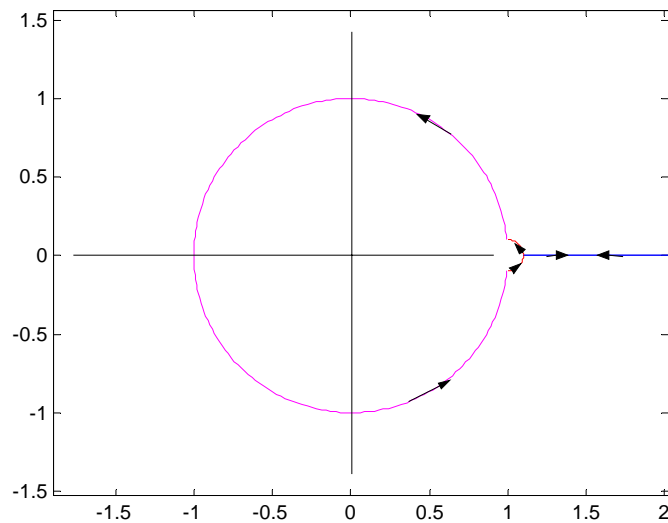
$$K(z) = K$$

και ζητείται να ευρεθούν οι τιμές του κέρδους του ελεγκτή K ώστε το αντισταθμισμένο σύστημα να είναι ευσταθές.

Για την επίλυση του προβλήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του Nyquist. Η καμπύλη C φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

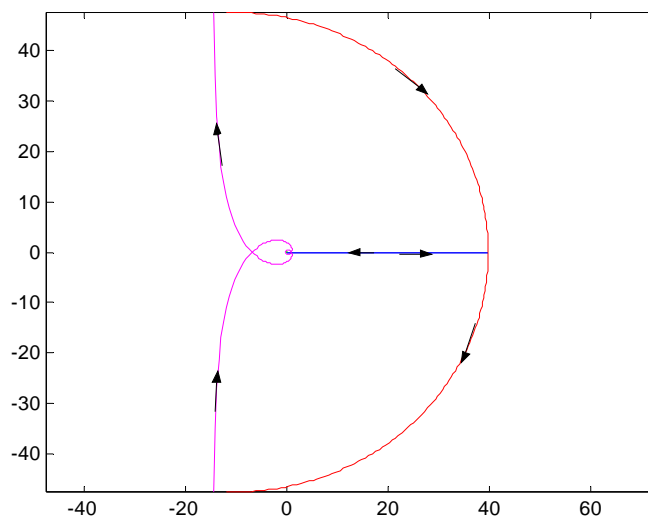


Λεπτομέρεια της καμπύλης C στην περιοχή του μηδενός φαίνεται στο επόμενο



σχήμα.

Η απεικόνιση της C μέσω της $G(z)$ φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



που προέκυψε με χρήση του ακόλουθου προγράμματος σε περιβάλλον MATLAB.

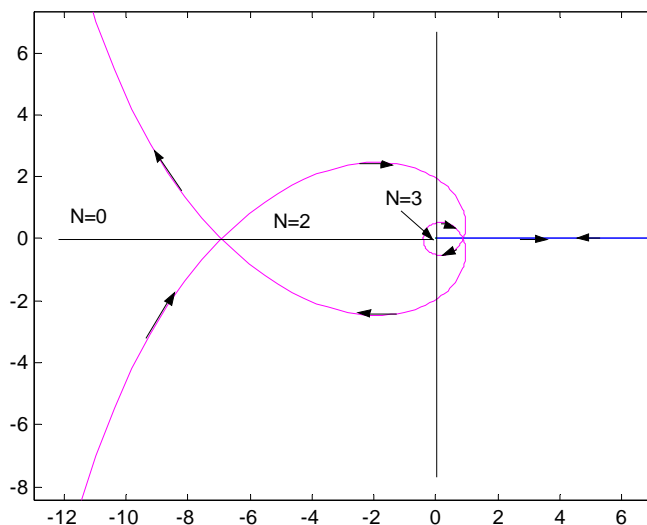
```
for K=1:100
    t1(K)=100*exp(i*pi*(100-K)/99);
    t1r(K)=real(t1(K));
    t1i(K)=imag(t1(K));
    t2(K)=100-(K-1)*.9989899;
    t2r(K)=real(t2(K));
    t2i(K)=imag(t2(K));
    t3(K)=1+0.1*exp(i*pi*(K-1)/198);
    t3r(K)=real(t3(K));
    t3i(K)=imag(t3(K));
    t4(K)=exp(i*(0.1+(pi-0.1)*(K-1)/99));
```

```

t4r(K)=real(t4(K));
t4i(K)=imag(t4(K));
g1(K)=(t1(K)+2)/(t1(K)-1)/(t1(K)-0.5)/(t1(K)+0.2);
g1r(K)=real(g1(K));
g1i(K)=imag(g1(K));
g2(K)=(t2(K)+2)/(t2(K)-1)/(t2(K)-0.5)/(t2(K)+0.2);
g2r(K)=real(g2(K));
g2i(K)=imag(g2(K));
g3(K)=(t3(K)+2)/(t3(K)-1)/(t3(K)-0.5)/(t3(K)+0.2);
g3r(K)=real(g3(K));
g3i(K)=imag(g3(K));
g4(K)=(t4(K)+2)/(t4(K)-1)/(t4(K)-0.5)/(t4(K)+0.2);
g4r(K)=real(g4(K));
g4i(K)=imag(g4(K));
end
plot(g1r,g1i,'g',g2r,g2i,'b',g3r,g3i,'r',g4r,g4i,'m',g1r,-g1i,'g',g2r,-g2i,'b',g3r,-g3i,'r',g4r,-g4i,'m')
axis equal

```

Λεπτομέρεια του σχήματος στις περιοχές τομής με τον αρνητικό πραγματικό άξονα φαίνεται στο κατωτέρω σχήμα.



Από το τελευταίο σχήμα προκύπτει ότι

1. Για $-1/K < -7$ ή ισοδύναμα

$$K < 0.143$$

Όλοι οι πόλοι του αντισταθμισμένου συστήματος βρίσκονται εκτός της απαγορευμένης περιοχής.

2. Για $-7 < -1/K < -0.36$ ή ισοδύναμα

$$0.143 < K < 2.8$$

δύο πόλοι του αντισταθμισμένου συστήματος βρίσκονται εντός της απαγορευμένης περιοχής, δηλαδή στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

3. Για $-0.36 < -1/K$ ή ισοδύναμα

$$2.8 < K$$

όλοι οι πόλοι του αντισταθμισμένου συστήματος βρίσκονται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αξίζει να προσεχθεί ότι οι τιμές είναι προσεγγιστικές καθώς προκύπτουν από μετρήσεις επάνω στο διάγραμμα.

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με χρήση του θεωρήματος του Jury. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi_c(z) = (z-1)(z-0.5)(z+0.2) + K(z+2) = z^3 - 1.3z^2 + (K+0.2)z + (2K+0.1)$$

Η διάταξη Jury είναι

Γραμμή	z^0	z^1	z^2	z^3
1	$2K+0.1$	$K+0.2$	-1.3	1
2	1	-1.3	$K+0.2$	$2K+0.1$
3	$(2K+0.1)^2 - 1$	$(2K+0.1)(K+0.2) + 1.3$	$-1.3(2K+0.1) - (K+0.2)$	
4	$-3.6K - 0.33$	$2K^2 + 0.5K + 1.32$	$4K^2 + 0.4K - 0.99$	

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι γραμμές 2 και 4 προκύπτουν από τις 1 και 3 άμεσα.

Από το κριτήριο του Jury για να είναι το αντισταθμισμένο σύστημα ευσταθές θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις.

$$\psi_c(1) = 1^3 - 1.3 \times 1^2 + (K+0.2) \times 1 + (2K+0.1) = 3K > 0$$

$$(-1)^3 \psi_c(-1) = (-1)^3 \{ (-1)^3 - 1.3 \times (-1)^2 + (K+0.2) \times (-1) + (2K+0.1) \} = -(-2.4 + K) > 0$$

$$|2K+0.1| < 1$$

$$|-3.6K - 0.33| < |4K^2 + 0.4K - 0.99|$$

Από την πρώτη ανισότητα προκύπτει

$$K > 0$$

ενώ από τη δεύτερη

$$K < 2.4$$

Καθώς είναι $K > 0$, η Τρίτη ανισότητα δίνει $(2K + 0.1) < 1$ ή

$$K < 0.45$$

Από την τελευταία ανισότητα προκύπτουν

$$4K^2 + 0.4K - 0.99 > 3.6K + 0.33 \text{ και } 4K^2 + 0.4K - 0.99 > 0$$

είτε

$$-4K^2 - 0.4K + 0.99 > 3.6K + 0.33 \text{ και } 4K^2 + 0.4K - 0.99 < 0$$

Καθώς $0 < K < 0.45$, $4K^2 + 0.4K - 0.99 \leq 0$ και συνεπώς από την τελευταία ανισότητα λαμβάνεται

$$4K^2 + 4K - 0.66 < 0$$

ή

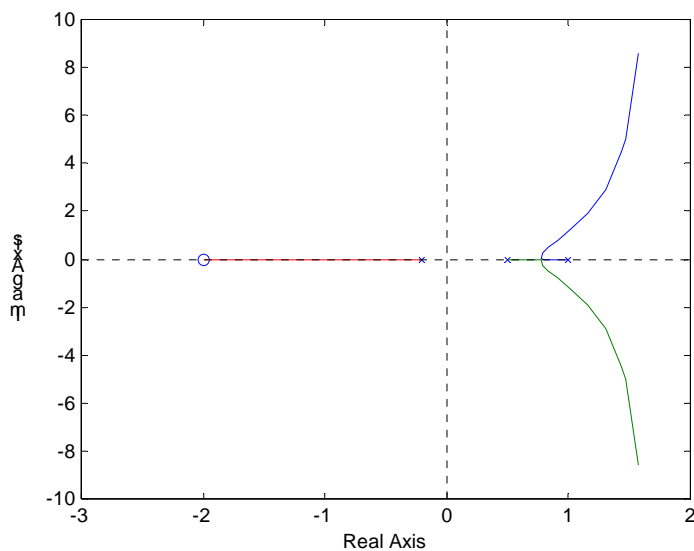
$$-1.144 < K < 0.144$$

Οι ανισότητες συναληθεύουν για

$$0 < K < 0.144$$

και για τις τιμές αυτές το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ευσταθές.

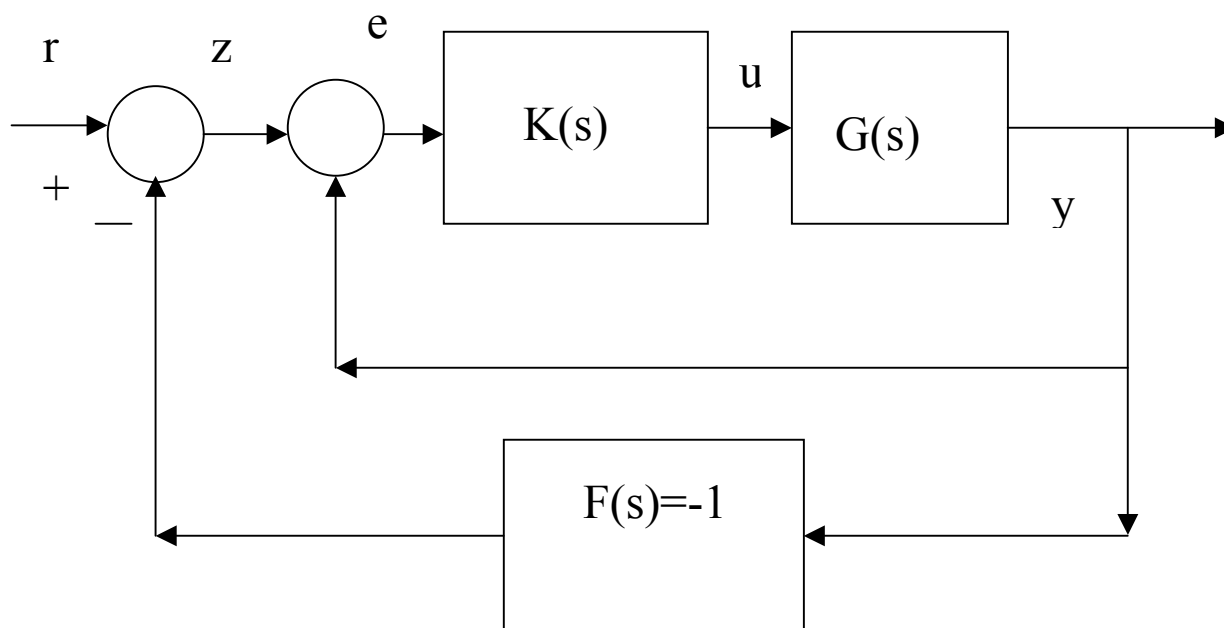
Στο κατωτέρω σχήμα φαίνεται ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του αντισταθμισμένου συστήματος καθώς το K μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το άπειρο. Οι ρίζες οφείλουν να είναι στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου για να είναι το αντισταθμισμένο σύστημα ευσταθές.



Μελέτη ευστάθειας συστήματος ανοικτού βρόχου από το διάγραμμα Nyquist του αντισταθμισμένου συστήματος.

Δίδεται αντισταθμισμένο σύστημα στο οποίο έχει εφαρμοστεί μοναδιαία ανατροφοδότηση εξόδου. Η απαίτηση συνεχούς λειτουργίας του συστήματος καθιστά αδύνατο το άνοιγμα του βρόχου, όμως με την εισαγωγή ημιτονοειδούς σήματος μικρού πλάτους στην είσοδο αναφοράς είναι δυνατόν να ευρεθεί η αρμονική απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου. Ζητείται να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια το σύστημα ανοικτού βρόχου.

Αν στο αντισταθμισμένο σύστημα το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ εφαρμοστεί ανατροφοδότηση εξόδου με $F(s)=-1$, όπως στο Σχήμα, η σχέση που συνδέει τα y, r θα είναι



$$H_c(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)(-1)} = \frac{\frac{GK}{1+GK}}{1 - \frac{GK}{1+GK}} = G(s)K(s)$$

δηλαδή η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ανοικτού βρόχου πριν από την αρχική ανατροφοδότηση. Σύμφωνα με το θεώρημα θα είναι

$$\frac{\Psi_o(s)}{\Psi_c(s)} = 1+H(s)(-1)$$

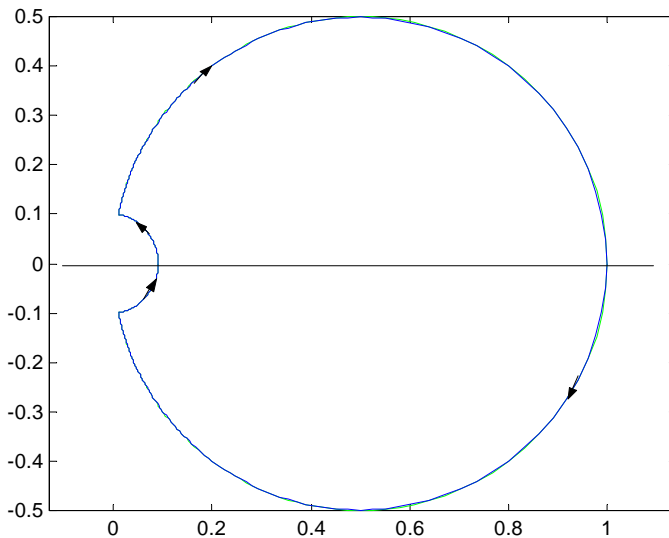
Επειδή το αντισταθμισμένο σύστημα που δίδεται είναι ευσταθές, για να είναι το σύστημα ανοικτού βρόχου ασυμπτωτικά ευσταθές θα πρέπει ο αριθμός των ωρολογιακών περιτρίγουρισμάτων του σημείου $(-1,0)$ από τη συνάρτηση $-H(s)$ να είναι μηδενικός. Αυτό

είναι ισοδύναμο με το να είναι ο αριθμός των ωρολογιακών περιτριγυρισμάτων του σημείου (1,0) από τη συνάρτηση $H(s)$ είναι μηδενικός.

Εάν θεωρηθούν σαν συναρτήσεις μεταφοράς των αντισταθμισμένων συστημάτων

$$H_1(s) = \frac{1000}{s+999} \quad H_2(s) = \frac{1000}{s+1001},$$

τα διαγράμματα Nyquist των $H_1(s)$, $H_2(s)$ φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Αν και τα διαγράμματα φαίνεται να ταυτίζονται, η λεπτομέρεια της περιοχής του σημείου (1,0) δείχνει ότι η $H_1(s)$ περιτριγυρίζει μία φορά ωρολογιακά το (1,0) ενώ η $H_2(s)$ δεν περιτριγυρίζει το σημείο (1,0). Συνεπώς το πρώτο σύστημα ανοικτού βρόχου είναι ασταθές ενώ το δεύτερο ευσταθές.

