

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Τρύφων Κουσιουρής

Ακ. Έτος 2005-2006

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη θέρμανση ενός δωματίου είναι οι εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.7 & -35.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} w$$
$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

όπου,

x_1 : θερμοκρασία του δωματίου.

x_2 : θερμοκρασία του θερμαντικού σώματος.

u : θερμοκρασία του υγρού που κυκλοφορεί στο θερμαντικό σώμα.

w : θερμοκρασία του περιβάλλοντος, η οποία θεωρείται σαν διαταραχή.

- Να εξεταστεί η ελεγχσιμότητα και η παρατηρησιμότητα της περιγραφής.
- Αγνοώντας τη διαταραχή, να εκφραστεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου συναρτήσει του μετασχηματισμού Laplace της εισόδου και των αρχικών συνθηκών.
- Εάν σαν είσοδος θεωρηθεί η $u = r - K x_1$ να βρεθεί για ποιές τιμές του K το αντισταθμισμένο σύστημα παραμένει ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση

A) Η μήτρα ελεγχσιμότητας είναι

$$P_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 24.5 \\ 35 & -1249.5 \end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_c)=2, η περιγραφή είναι ελέγξιμη.

Η μήτρα παρατηρησιμότητας είναι

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_o)=2, η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.

B) Θα είναι

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = A\underline{X}(s) + BU(s)$$

ή

$$\underline{X}(s) = [sI - A]^{-1} \underline{x}(0) + [sI - A]^{-1} BU(s)$$

και

$$Y(s)=C[sI-A]^{-1}\underline{x}(0)+C[sI-A]^{-1}BU(s)$$

Καθώς

$$[sI-A]^{-1}=\frac{1}{(s+1.4)(s+35.7)-0.7^2}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+37.1s+49.49}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}$$

$$Y(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{(s^2+37.1s+49.49)}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}U(s)+\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s^2+37.1s+49.49}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{24.5}{(s^2+37.1s+49.49)}U(s)+\frac{s+35.7}{s^2+37.1s+49.49}x_1(0)+\frac{0.7}{s^2+37.1s+49.49}x_2(0)$$

Γ) Εάν

$$u=r-Kx_1$$

οι εξισώσεις καταστάσεως γίνονται

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.7 & -35.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}(r-Kx_1)+\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}w =$$

$$=\begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.7-35K & -35.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}r+\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}w =$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής θα είναι

$$\psi_c(s)=\det[sI-A_c]=\det\begin{bmatrix} s+1.4 & -0.7 \\ 35K-0.7 & s+35.7 \end{bmatrix}=s^2+37.1s+49.49+24.5K$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^2	1	49.49+24.5K
s	37.1	
s^0	49.49+24.5K	

Για να παραμένει το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει

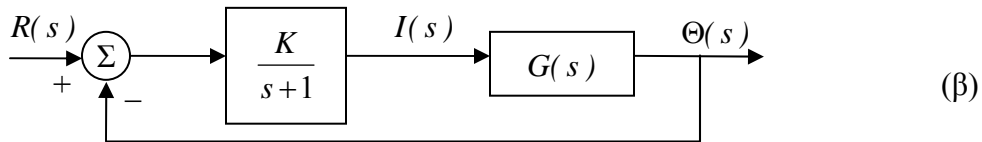
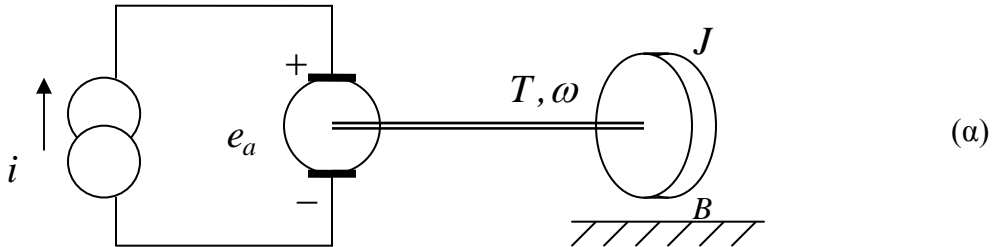
$$0<49.49+24.5K$$

ή ισοδύναμα

$$-2.02<K$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)

Για τον κινητήρα του Σχήματος 2 (α), $T=1 \text{ Nm A}^{-1}$ Xi, $J=1 \text{ Kg m}^2$ και $B=2 \text{ Nm s}^{-1}$, ενώ μετράται η γωνία στροφής του άξονα του κινητήρα, θ .



Σχήμα 2: Κινητήρας συνεχούς ρεύματος με φορτίο, (α) συνδεσμολογία, (β) λειτουργικό διάγραμμα συστήματος κλειστού βρόχου.

α) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{Q(s)}{I(s)}$.

β) Στο σύστημα χρησιμοποιήθηκε ελεγκτής $K(s) = \frac{K}{(s+1)}$, όπως στο Σχήμα 2 (β). Με

χρήση του θεωρήματος του Nyquist να προσδιοριστεί για ποιές τιμές του K το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές καθώς και το περιθώριο κέρδους. Για την κατασκευή του διαγράμματος Nyquist να δοθεί προσοχή:

1. Στο όριο του πραγματικού μέρους της εικόνας καθώς $\omega \rightarrow 0$.
2. Στο σημείο που το διάγραμμα τέμνει τον πραγματικό άξονα.
3. Στο όριο του ορίσματος της εικόνας του χωρίου καθώς $\omega \rightarrow \infty$.

γ) Ο συντελεστής τριβής B εξαρτάται από το ιξώδες του λιπαντικού λαδιού και μεταβάλλεται μεταξύ 1 Nm/s και 4 Nm/s . Για την οικογένεια των συστημάτων που προκύπτει εξετάζοντας τα σημεία τομής με τον αρνητικό πραγματικό άξονα να βρείτε:

1. Για ποιές τιμές του K όλα τα συστήματα που προκύπτουν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή.
2. Για ποιές τιμές του K όλα τα συστήματα που προκύπτουν είναι ασταθή.

δ) Εάν O είναι η αρχή των αξόνων, A το σημείο $(-1/K, 0)$ του μιγαδικού επιπέδου και M η εικόνα του σημείου $j\omega_0 = j1 \text{ rad s}^{-1}$ στο διάγραμμα Nyquist,

1. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{Q(s)}{R(s)}$, θα είναι

$$H(j\omega_0) = \frac{OM}{AM},$$

όπου OM, AM είναι μιγαδικοί αριθμοί.

2. Εάν $K=1$ και $r(t)=0.1\eta\mu(1t)$, να βρεθεί η $\theta(t)$ στη μόνιμη κατάσταση χρησιμοποιώντας το διάγραμμα Nyquist.

Λύση

Θα είναι

$$T = Ai(t) = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt}$$

Εφαρμόζοντας Μετασχηματισμό Laplace με μηδενικές αρχικές συνθήκες, λαμβάνεται

$$T(s) = AI(s) = (Js^2 + Bs)\Theta(s)$$

ή ισοδύναμα

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{I(s)} = \frac{A}{Js^2 + Bs}$$

B) Θεωρώντας το K σαν μεταβλητό κέρδος του απευθείας δρόμου, η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου θα είναι

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{s+1} * \frac{A}{Js^2 + Bs} = \frac{A}{(s+1)(Js+B)s}$$

Για $s=j\omega$, θα είναι

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{A}{(j\omega+1)(Jj\omega+B)j\omega} = \frac{-A(\omega^2 B + \omega^2 J)}{(\omega^2 + \omega^4)(J^2 \omega^2 + B^2)} + j \frac{A(\omega^3 J - \omega B)}{(\omega^2 + \omega^4)(J^2 \omega^2 + B^2)} = X + jY$$

1. Καθώς $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} X = \frac{-A(B+J)}{B^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Y = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A(\omega^3 J - \omega B)}{(\omega^2 + \omega^4)(J^2 \omega^2 + B^2)} = -\infty$$

2. Για το σημείο τομής με τον πραγματικό άξονα θα είναι $Y=0$ ή ισοδύναμα

$$\omega^3 J - \omega B = 0$$

ή

$$\omega^2 = B/J$$

Για την τιμή αυτή του ω το X γίνεται

$$X_c = \frac{-A(B+J)}{(1+B/J)(J^2 B/J+B^2)} = \frac{-AJ}{B(J+B)}$$

Για το όρισμα της εικόνας θα είναι

$$\varphi = \text{τοξεφ} \frac{Y}{X} = \text{τοξεφ} \frac{A(\omega^3 J - \omega B)}{-A(\omega^2 B + \omega^2 J)}$$

και

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{τοξεφ} \frac{(\omega^3 J - \omega B)}{-A(\omega^2 B + \omega^2 J)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{τοξεφ} \frac{-\omega J}{B + J} = \text{τοξεφ}(-\infty)$$

Επειδή καθώς το ω τείνει στο άπειρο $X < 0$ και $Y > 0$, θα ισχύει

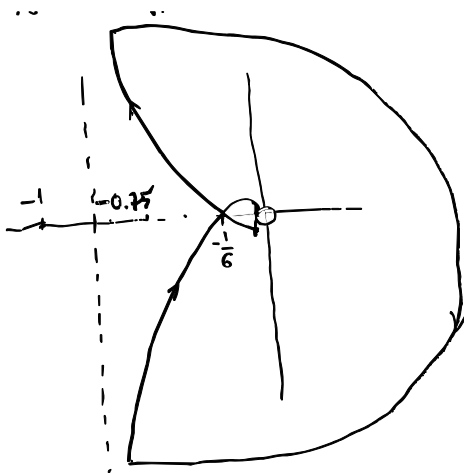
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi = -270^\circ$$

Για τις τιμές $A=1$, $J=1$ και $B=2$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} X = \frac{-A(B+J)}{B^2} = -0.75$$

$$X_c = \frac{-AJ}{B(J+B)} = -\frac{1}{6}$$

Το διάγραμμα Nyquist είναι όπως στο Σχήμα



Το περιθώριο κέρδους θα είναι

$$g_m = \frac{1}{|X_c|} = 6$$

Γ) Για την οικογένεια των συστημάτων που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του B , τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{-AJ}{B_{\max}(J+B_{\max})} \geq X_c \geq \frac{-AJ}{B_{\min}(J+B_{\min})}$$

θα είναι

$$\frac{-1*1}{4(1+4)} = \frac{-1}{20} \geq X_c \geq \frac{-1*1}{1(1+1)} = -\frac{1}{2}$$

Εάν $-1/K < -1/2$ ή ισοδύναμα

$$0 < K < 2$$

όλα τα συστήματα κλειστού βρόχου που προκύπτουν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή γιατί ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων του $-1/K$ είναι ίσος με μηδέν και το σύστημα ανοικτού βρόχου δεν έχει πόλους εντός του χωρίου D.

Εάν $-1/K > -1/20$ ή ισοδύναμα

$$20 < K$$

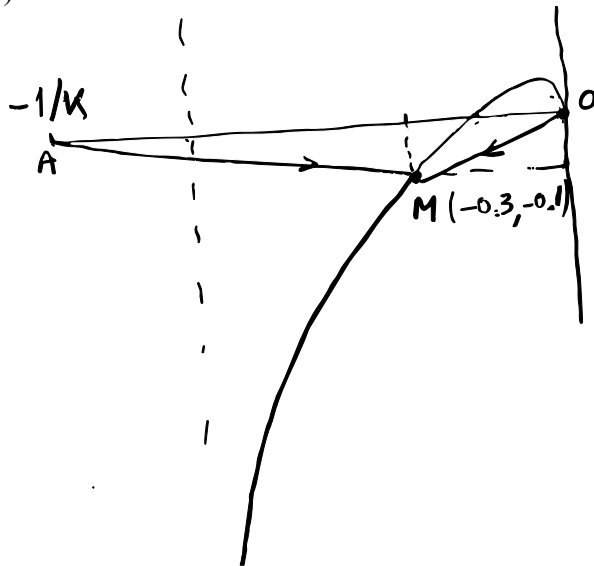
όλα τα συστήματα κλειστού βρόχου που προκύπτουν είναι ασταθή γιατί ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων του $-1/K$ είναι ίσος με δύο και το σύστημα ανοικτού βρόχου δεν έχει πόλους εντός του χωρίου D.

Για

$$2 < K < 20$$

κάποια από τα συστήματα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθή και άλλα ασταθή, εξαρτώμενα από την τιμή του B.

Δ)



Ο μιγαδικός αριθμός AM θα είναι

$$AM = \frac{1}{K} + OM = \frac{1}{K} + \hat{G}(j\omega)$$

οπότε

$$\frac{OM}{AM} = \frac{\hat{G}(j\omega)}{\frac{1}{K} + \hat{G}(j\omega)} = \frac{K\hat{G}(j\omega)}{1 + K\hat{G}(j\omega)} = H(j\omega)$$

Για $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ η εικόνα θα είναι

$$(X, Y) = (-0.3, -0.1)$$

οπότε

$$|H(j\omega)| = \frac{OM}{AM} = \frac{\sqrt{0.1^2 + 0.3^2}}{\sqrt{0.7^2 + 0.1^2}} = 0.447$$

$$\text{Arg}\{OM\} = \text{τοξεφ}\left(\frac{-0.1}{-0.3}\right) = -2.82\text{rad}$$

$$\text{Arg}\{AM\} = \text{τοξεφ}\left(\frac{-0.1}{0.7}\right) = -0.14\text{rad}$$

οπότε

$$\text{Arg}\{H(j1)\} = -2.82 - (-0.14) = -2.68\text{rad}$$

2. Η μόνιμη κατάσταση της $\theta(t)$ θα είναι ημιτονοειδής και θα ισχύει

$$\theta(t) = 0.1 * |H(j1)| * \eta\mu[1*t + \text{Arg}\{H(j1)\}] = 0.1 * 0.447 * \eta\mu[1*t + (-2.68)] = 0.0447 * \eta\mu[1*t + (-2.68)]$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2005)

Δίδεται η περιγραφή ενός συστήματος συνεχούς χρόνου:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$
$$y(t) = (2 \quad -1 \quad 0)x(t)$$

α) Να εξεταστεί η ελεγχιμότητα και η παρατηρησιμότητα της περιγραφής.

β) Να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.

γ) Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια η περιγραφή του συστήματος.

δ) Αν εφαρμοσθεί ο νόμος ελέγχου,

$$u(t) = r(t) - F_1 x_1(t) - F_2 x_2(t)$$

με $r(t)$ μια είσοδο αναφοράς και F_1, F_2 πραγματικούς αριθμούς, να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του αντισταθμισμένου συστήματος.

ε) Να εξετασθεί για ποιές τιμές των F_1, F_2 του ερωτήματος (δ), το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπωτικά ευσταθές. Επίσης, να δειχθεί ότι αν $F_1 = -2 F_2$, δεν είναι δυνατόν να ευσταθειοποιηθεί το δοθέν σύστημα για οποιαδήποτε τιμή του F_1 .

Λύση

Α) Η μήτρα ελεγχιμότητας είναι

$$P_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_c)=3, η περιγραφή είναι ελέγξιμη.

Η μήτρα παρατηρησιμότητας είναι

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Επειδή $\det(P_o)=12$, βαθμός(P_o)=3 και η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.

B) Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$\begin{aligned} G(s) &= C[sI-A]^{-1}BU(s) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s[s(s+2)-1]-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2M_{13} - M_{23}}{(s+2)(s^2-1)} \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} M_{13}(s) &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix} = 1 & M_{23}(s) &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = s \\ G(s) &= \frac{-(s-2)}{(s+2)(s-1)(s+1)} \end{aligned}$$

Γ) Για την ευστάθεια εξετάζονται οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\psi(s) = \det[sI-A] = (s+1)(s-1)(s+2)$$

Καθώς το $\psi(s)$ έχει τη ρίζα $s=1$ η οποία βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, η περιγραφή του συστήματος είναι ασταθής.

Δ) Η περιγραφή του συστήματος μετά την εφαρμογή του νόμου ελέγχου θα είναι

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B(r - F\underline{x}) = (A - BF)\underline{x} + Br \quad y = C\underline{x}$$

όπου

$$F = [F_1 \quad F_2 \quad 0]$$

Οι εξισώσεις καταστάσεως γίνονται

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2-F_1 & 1-F_2 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t)$$

$$y(t) = (2 \quad -1 \quad 0) x(t)$$

E) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi_c(s) = \det[sI - A_c] = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ F_1-2 & F_2-1 & s+2 \end{bmatrix} = s[s(s+2)+F_2-1]+F_1-2 = s^3+2s^2+(F_2-1)s+F_1-2$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^3	1		F_2-1
s^2	2		F_1-2
s	$[2(F_2-1)-F_1+2]/2$		
s^0	F_1-2		

Καθώς $1 > 0$ και $2 > 0$, για να είναι το αντισταθμισμένο σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει

$$[2(F_2-1)-F_1+2]/2 = 2F_2-F_1 > 0 \text{ και } F_1-2 > 0$$

ή ισοδύναμα

$$2F_2-F_1 > 2 > 0$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι τα F_2, F_1 πρέπει να είναι θετικά. Εάν $F_1 = -2F_2$, τα F_2, F_1 είναι ετερόσημα και δεν είναι δυνατόν να ικανοποιείται η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ασυμπτωτική ευσταθειοποίηση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2005)

Δίδεται το ακόλουθο μοντέλο ενός θερμικού συστήματος:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} d(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

όπου,

$x_1(t)$ η θερμοκρασία του δωματίου,

$x_2(t)$ η θερμοκρασία του θερμαντικού σώματος,

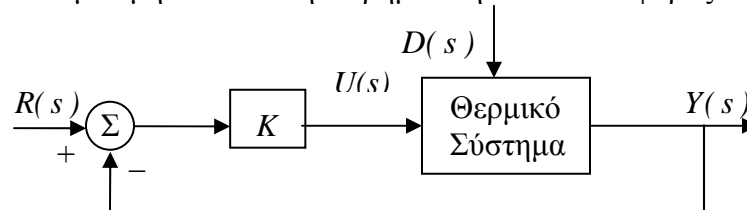
$u(t)$ η παροχή θερμότητας του θερμαντικού υγρού,

$d(t)$ η θερμοκρασία του περιβάλλοντος η οποία θεωρείται σαν διαταραχή.

- 1) Να εκφραστεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου συναρτήσει των μετασχηματισμών Laplace των $u(t)$ και $d(t)$ για μηδενικές αρχικές συνθήκες.
- 2) α) Εάν εφαρμοστεί ο έλεγχος του Σχήματος 1, να εκφραστεί η $Y(s)$ συναρτήσει των $R(s)$ και $D(s)$.

β) Να διερευνηθεί για ποιές τιμές του K , όταν η διαταραχή είναι μηδενική, το σφάλμα στη

μόνιμη κατάσταση σε βηματική είσοδο αναφοράς δεν υπερβαίνει το 5%.



Σχήμα 1: Λειτουργικό διάγραμμα με είσοδο αναφοράς $R(s)$, διαταραχή $D(s)$ και έξοδο $Y(s)$.

- 3) Εάν $d(t) = 10 \eta\mu\left(\frac{2\pi}{24} t\right)$, για K της επιλογής σας ώστε να ισχύει η απαίτηση του ερωτήματος (2β), να ευρεθεί το πλάτος του κυματισμού της θερμοκρασίας του δωματίου στη μόνιμη κατάσταση.

Λύση

A) Από την περιγραφή του συστήματος με μετασχηματισμό Laplace για μηδενικές αρχικές συνθήκες θα είναι

$$(sI-A)\underline{X}(s) = \begin{bmatrix} s+6 & -3 \\ -8 & s+8 \end{bmatrix} \underline{X}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} D(s)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} Y(s) &= [1 \ 0] \underline{X}(s) = [1 \ 0] \frac{1}{s^2+14s+24} \begin{bmatrix} s+8 & 3 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} D(s) \right\} \\ &= \frac{12}{s^2+14s+24} U(s) + \frac{3(s+8)}{s^2+14s+24} D(s) \end{aligned}$$

B) Για την αντιστάθμιση που δίδεται θα είναι

$$U(s) = K[R(s) - Y(s)]$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση της $Y(s)$ λαμβάνεται

$$Y(s) = \frac{12}{s^2+14s+24} KR(s) - \frac{12}{s^2+14s+24} KY(s) + \frac{3(s+8)}{s^2+14s+24} D(s)$$

Επιλύοντας ως προς $Y(s)$, λαμβάνεται

$$Y(s) = \frac{\frac{12}{s^2+14s+24}KR(s)}{\frac{s^2+14s+24+12K}{s^2+14s+24}} + \frac{\frac{3(s+8)}{s^2+14s+24}D(s)}{\frac{s^2+14s+24+12K}{s^2+14s+24}} = \frac{12K}{s^2+14s+24+12K}R(s) + \frac{3(s+8)}{s^2+14s+24+12K}D(s)$$

Για μηδενική διαταραχή θα είναι

$$Y(s) = \frac{12K}{s^2+14s+24+12K}R(s)$$

Εάν η είσοδος αναφοράς είναι μοναδιαία βηματική, $R(s)=1/s$ και εάν το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπωτικά ευσταθές, από το θεώρημα της τελικής τιμής το σφάλμα μόνιμης κατάστασης θα είναι

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \{r(t)-y(t)\} &= \lim_{s \rightarrow 0} \{s[R(s)-Y(s)]\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left[1 - \frac{12K}{s^2+14s+24+12K} \right] R(s) \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left[1 - \frac{12K}{s^2+14s+24+12K} \right] \frac{1}{s} \right\} = \frac{24}{24+12K} \end{aligned}$$

Για την ευστάθεια του αντισταθμισμένου συστήματος χρησιμοποιείται κριτήριο Routh στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής θα είναι

$$\psi_c(s) = s^2 + 14s + 24 + 12K$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^2	1	24+12K
s	14	
s^0	24+12K	

Καθώς το K είναι θετικό η πρώτη στήλη δεν εμφανίζει αλλαγές προσήμου και το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπωτικά ευσταθές για κάθε $K > 0$.

Από τον τύπο του σφάλματος, καθώς $K > 0$ προκύπτει ότι αυτό είναι θετικό, οπότε το K επιλέγεται ώστε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{r(t)-y(t)\} = \frac{24}{24+12K} \leq 0.05$$

ή

$$\frac{57 \cdot 8}{12} = 38 \leq K$$

Στη μόνιμη κατάσταση το τμήμα της εξόδου το οποίο οφείλεται στη διαταραχή θα είναι από την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας

$$y_d(t) = 10 \left| G_d(j\frac{2\pi}{24}) \right| \eta\mu \left[\frac{2\pi t}{24} + \arg[G_d(j\frac{2\pi}{24})] \right]$$

όπου

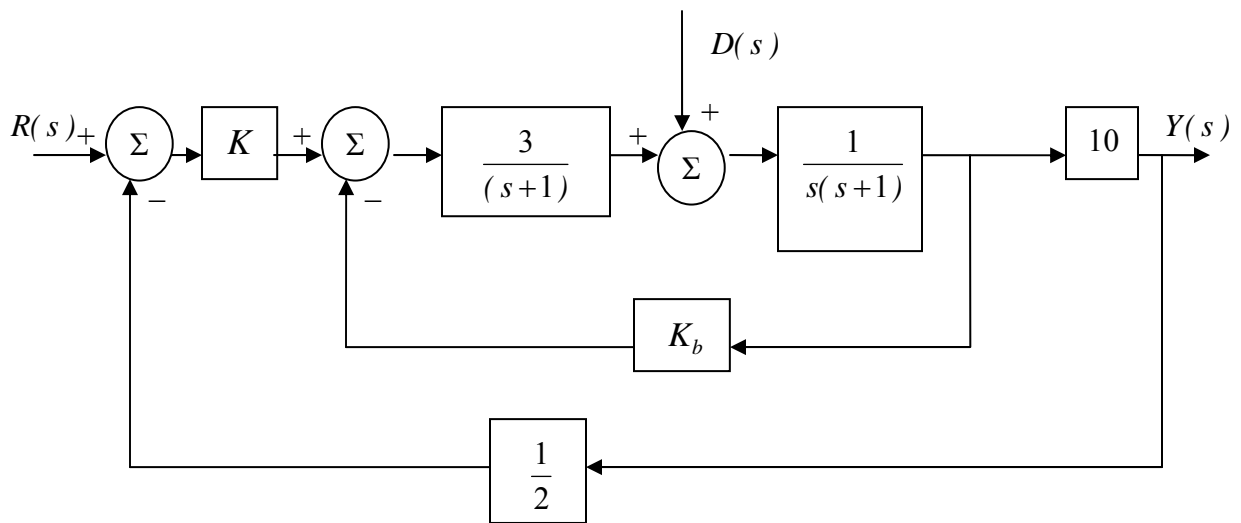
$$G_d = \frac{3(s+8)}{s^2+14s+24+12K}$$

Εάν ληφθεί $K=50$, για το πλάτος του κυματισμού θα ισχύει

$$A_o = 10 \left| G_d(j\frac{2\pi}{24}) \right| = 10 \cdot 3 \left| \frac{8+j0.26}{24+600-0.26^2+j14 \cdot 0.26} \right| = 0.385$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)

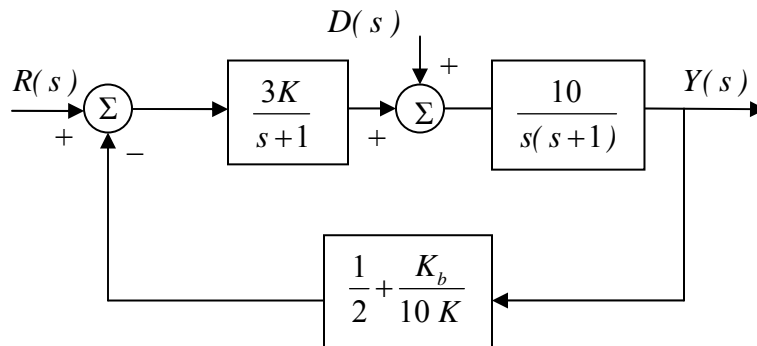
Δίνεται το λειτουργικό διάγραμμα του Σχήματος 1, όπου $R(s) = \frac{A}{s}$ και $D(s) = M$.



Σχήμα 1: Λειτουργικό διάγραμμα με είσοδο αναφοράς $R(s)$, διαταραχή $D(s)$ και έξοδο $Y(s)$.

- Να μετασχηματίσετε το λειτουργικό διάγραμμα σε ισοδύναμη περιγραφή με ένα μόνο κλάδο ανάδρασης.
- Να προσδιοριστούν οι περιοχές τιμών των K και K_b , έτσι ώστε η επίδραση της διαταραχής στην έξοδο του συστήματος να εξουδετερώνεται στη μόνιμη κατάσταση και ταυτόχρονα η έξοδος του συστήματος να ακολουθεί το σήμα εισόδου στη μόνιμη κατάσταση (δηλ. $\lim_{t \rightarrow \infty} \{y(t) - r(t)\} = 0$).

α) Μια ισοδύναμη περιγραφή μπορεί να προκύψει αν ‘μεγαλώσουμε’ τον εσωτερικό κλάδο ανάδρασης προς τα έξω και τον ενσωματώσουμε με τον εξωτερικό:



β) Υπολογίζουμε την έξοδο του κλειστού συστήματος εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας:

$$\frac{Y_r(s)}{R(s)} = \frac{\left(\frac{3K}{s+1}\right)\left(\frac{10}{s(s+1)}\right)}{1 + \left(\frac{30K}{(s+1)(s^2+s)}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{K_b}{10K}\right)} = \frac{30K}{s^3 + 2s^2 + s + 15K + 3K_b}$$

και

$$\frac{Y_d(s)}{D(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \left(\frac{30K}{(s+1)(s^2+s)}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{K_b}{10K}\right)} = \frac{10(s+1)}{s^3 + 2s^2 + s + 15K + 3K_b}$$

οπότε,

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_d(s) = \frac{30K}{s^3 + 2s^2 + s + 15K + 3K_b} \left(\frac{A}{s}\right) + \frac{10(s+1)}{s^3 + 2s^2 + s + 15K + 3K_b} (M)$$

Για να αποκόπτεται η διαταραχή, $d(t)$, στη μόνιμη κατάσταση θα πρέπει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) = 0$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace που ισχύει με την προϋπόθεση ότι η $sY_d(s)$ είναι ευσταθής. Κατασκευάζουμε τον πίνακα Routh για τον προσδιορισμό κατάλληλων συνθηκών.

s^3	1	1
s^2	2	$15K + 3K_b$
s^1	$\frac{2 - 15K - 3K_b}{2}$	0
s^0	$15K + 3K_b$	

οπότε, για να διασφαλίζεται η ζητούμενη ευστάθεια πρέπει

$$0 < 15K + 3K_b < 2$$

Με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι ανισότητες, από το θεώρημα τελικής τιμής προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{10(s+1)}{s^3 + 2s^2 + s + 15K + 3K_b} (M) \right) = 0$$

Η δεύτερη συνθήκη είναι,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - r(t)) = 0$$

Με την ικανοποίηση των πιο πάνω ανισοτήτων η $sY(s)$ είναι ευσταθής και από το θεώρημα τελικής τιμής θέτουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - r(t)) &= \lim_{s \rightarrow 0} (s Y_r(s) - s R(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{30K}{s^3 + 2s^2 + s + 15K + 3K_b} \left(\frac{A}{s} \right) - A \right) \\ &= \frac{30KA}{15K + 3K_b} - A = 0 \end{aligned}$$

οπότε,

$$K_b = 5K$$

Η τελευταία σχέση με τις πιο πάνω ανισότητες συναληθεύουν για

$$0 < K < \frac{1}{5} \quad \text{και} \quad 0 < K_b < \frac{1}{3} \quad \text{με} \quad K_b = 5K$$

Αυτές οι τιμές των K και K_b , εξασφαλίζουν τις απαιτήσεις του προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)

Δίνεται σύστημα μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου

$$G(s) = \frac{K(s + \frac{10}{9})}{s^2(s + 10)}, \quad K > 0$$

- α) Ναδειχθεί ότι υπάρχει K για το οποίο οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος κλειστού βρόχου είναι όλες πραγματικές και ίσες μεταξύ τους και να προσδιοριστεί η τιμή του.
- β) Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών για το ανωτέρω σύστημα.

Σημ.: Μπορείτε, αν θέλετε, να χρησιμοποιήσετε για το ερώτημα (α) μια γενική εξίσωση που έχει τριπλή ρίζα το $-\rho$.

- α) Έστω $-\rho$ η τριπλή πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Τότε, χρησιμοποιώντας την υπόδειξη θέτουμε,

$$(s + \rho)^3 = s^3 + 3\rho s^2 + 3\rho^2 s + \rho^3 = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του δοθέντος συστήματος είναι

$$1 + \frac{K(s + \frac{10}{9})}{s^2(s + 10)} = 0$$

οπότε,

$$s^3 + 10s^2 + Ks + \frac{10}{9}K = 0$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων,

$$\rho = \frac{10}{3}, \quad K = \frac{100}{3}, \quad \rho^3 = \frac{10}{9}K$$

Η τελευταία εξίσωση όντως επαληθεύεται με τις ευρεθείσες τιμές των ρ και K διότι

$$\rho^3 = \frac{10^3}{3^3} = \left(\frac{10}{3^2}\right)\left(\frac{10^2}{3}\right) = \frac{10}{9}K$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $K = \frac{100}{3} = 33.333$ όταν οι ρίζες έχουν την τιμή

$$-\rho = -\frac{10}{3} = -3.333$$

β) Μερικά συμπληρωματικά στοιχεία για το σχεδιασμό του γεωμετρικού τόπου των ριζών είναι τα ακόλουθα:

$$G(s) = \frac{K(s + \frac{10}{9})}{s^2(s + 10)}, \quad K > 0, \quad n = 3, \quad m = 1$$

Η $G(s)$ έχει τρεις πόλους, επομένως υπάρχουν τρεις διακεκριμένοι τόποι (κλάδοι του γεωμετρικού τόπου των ριζών). Το τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών που βρίσκεται μεταξύ του -10 και του $-\frac{10}{9} = -1.111$ ανήκει στο γεωμετρικό τόπο των ριζών επειδή είναι στα αριστερά ενός περιττού αριθμού πόλων και μηδενικών. Το κέντρο των ασυμπτώτων βρίσκεται στο

$$\sigma_1 = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = -\frac{10 - \frac{10}{9}}{3 - 1} = -\frac{40}{9} = -4.443$$

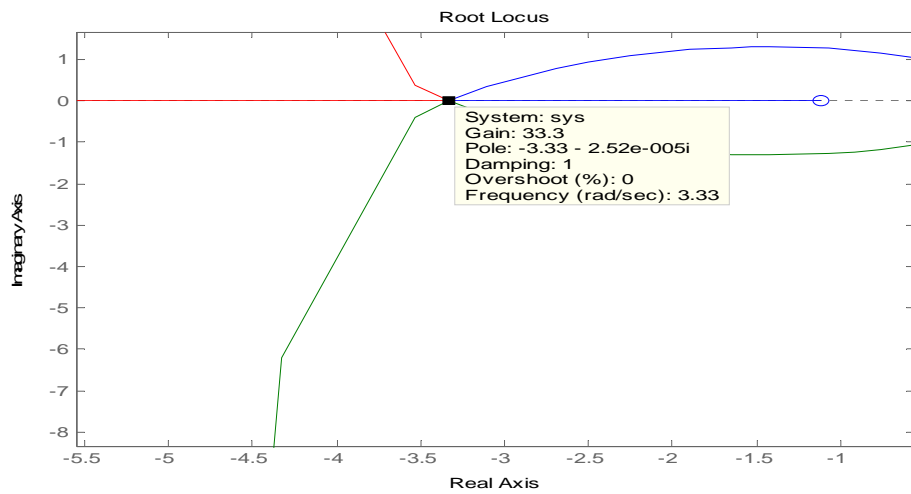
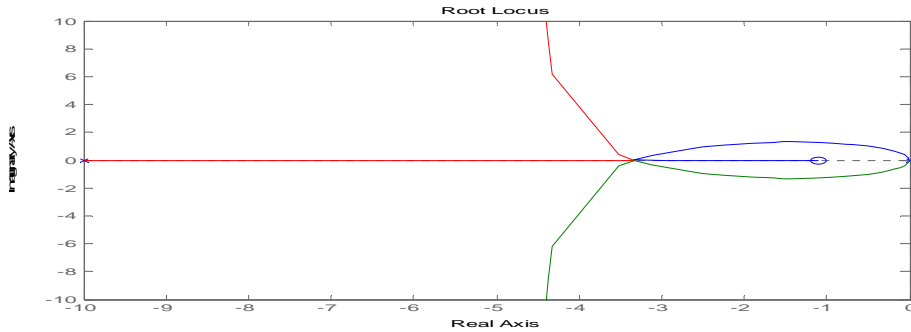
όπου $-p_i$ είναι οι πόλοι και $-z_j$ τα μηδενικά της $G(s)$. Οι γωνίες των ασυμπτώτων δίνονται από τα

$$\theta_\rho = \frac{(2\rho + 1)180^\circ}{n - m}, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$$

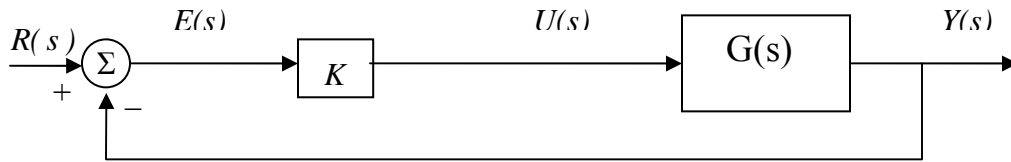
Επομένως, οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι 90° και 270° . Τα σημεία θλάσης μπορούν να υπολογιστούν από

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{K(s + \frac{10}{9})}{s^2(s + 10)} \right] = 0 \Rightarrow -2s^3 - \frac{40}{3}s^2 - \frac{200}{9}s = 0$$

Οι ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι $s=0$ και $s=-3.333$ (διπλή). Οι αντίστοιχες αποδεκτές τιμές του K για αυτές τις ρίζες βρίσκονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση και είναι $K=0$, και $K=33.333$ (όπως στο ερώτημα (α)).



ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2005)



Για το σύστημα κλειστού βρόχου του Σχήματος με $K \geq 0$ δίδεται ότι

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 40}{(s+1)(s+4)(s^2 + 3s + 3)} = \frac{s^2 + s + 40}{s^4 + 8s^3 + 22s^2 + 27s + 12}$$

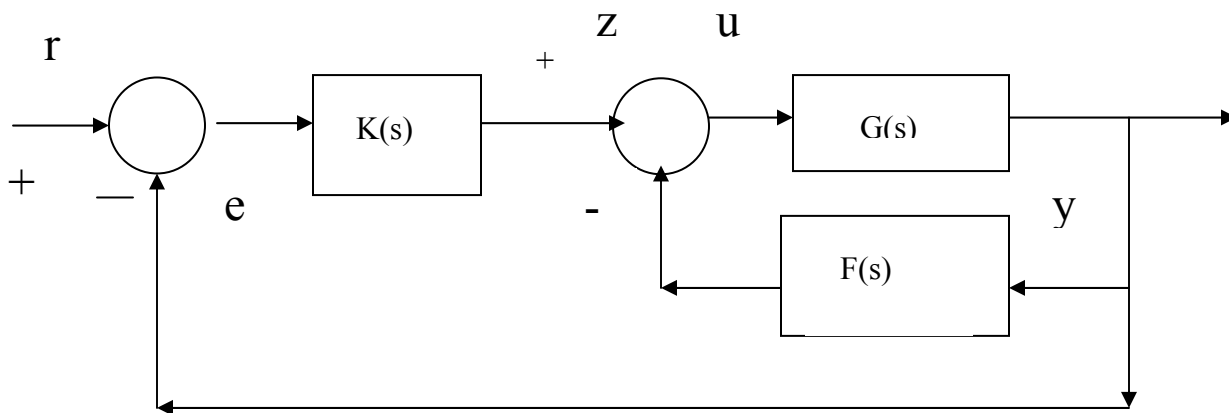
Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος για $K \geq 0$ αφού προσδιοριστούν

- Οι περιοχές του πραγματικού άξονα οι οποίες είναι μέρη του τόπου.
- Οι ασύμπτωτες του γεωμετρικού τόπου.
- Το σημείο τομής των ασυμπτώτων με τον πραγματικό άξονα.
- Οι γωνίες αναχώρησης από τους πόλους του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Οι γωνίες άφιξης στα μηδενικά του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Τα σημεία τομής με το φανταστικό άξονα.
- Το σημείο θλάσης.

Δίδεται ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $p(s) = s^5 + 5.5s^4 + 88s^3 + 477.5s^2 + 868s + 534$ είναι $-1.37 \pm j0.44$, -3.2 και $0.23 \pm j8.93$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Πρόσθετη Εξέταση Νοέμβριος 2005)

Για το σύστημα ελέγχου του Σχήματος δίδονται



$$G(s) = \frac{1}{10s+1} \quad F(s) = as \quad K(s) = \frac{1}{s}$$

1. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.
2. Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου καθώς το a μεταβάλλεται στο διάστημα $(0, \infty)$.
3. Να ευρεθεί για ποιές τιμές του a η βηματική απόκριση του συστήματος είναι πεπερασμένη και δεν εμφανίζει ταλαντώσεις.

Λύση

1. Θα είναι

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}$$

οπότε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K(s)G(s)}{1+G(s)F(s)}}{1 + \frac{K(s)G(s)}{1+G(s)F(s)}} = \frac{K(s)G(s)}{1+G(s)F(s)K(s)G(s)} = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{1}{(10+a)s^2+s+1}$$

2. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών μπορεί να ευρεθεί αναλυτικά. Έστωσαν (x,y) οι συντεταγμένες ενός σημείου του τόπου. Θα ισχύει

$$(10+a)(x+jy)^2 + x+jy+1 = (10+a)(x^2 - y^2 + j2xy) + x+jy+1 = 0$$

Εξισώνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος με το 0, λαμβάνονται

$$(10+a)(x^2 - y^2) + x + 1 = 0$$

$$(10+a)(2xy) + y = 0$$

Από τη δεύτερη σχέση λαμβάνονται εναλλακτικά.

A) $y=0$. Αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση απαιτεί $(10+a)x^2 + x + 1 = 0$, αδύνατο για $a > 0$ καθώς η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική.

B) $(10+a)2x+1=0$. Επιλύοντας ως προς a και αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση, λαμβάνεται

$$\left(\frac{-1}{2x}\right)(x^2 - y^2) + x + 1 = 0$$

ή ισοδύναμα

$$x^2 + y^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 + y^2 = 1$$

Η τελευταία σχέση είναι εξίσωση περιφέρειας κύκλου με κέντρο το σημείο $(-1,0)$ και ακτίνα 1. Τμήμα αυτής της περιφέρειας αποτελεί τον ζητούμενο γεωμετρικό τόπο.

2^{ος} Τρόπος

Εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γραφεί

$$\psi_c(s) = as^2 + 10s^2 + s + 1$$

θα αντιστοιχεί στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός συστήματος απλού βρόχου με ελεγκτή σταθερό κέρδος a και συνάρτηση μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος

$$G_{eq}(s) = \frac{s^2}{10s^2 + s + 1}$$

Ο γεωμετρικός τόπος που ζητείται μπορεί να κατασκευαστεί με τους κανόνες ως εξής:

Ο αριθμός των κλάδων του τόπου είναι 2.

Ο γεωμετρικός τόπος δεν έχει τμήμα του επάνω στον πραγματικό άξονα, καθώς δεν υπάρχει σημείο του πραγματικού άξονα το οποίο να έχει προς τα δεξιά του περιττό αριθμό πόλων και μηδενικών.

Ο γεωμετρικός τόπος αρχίζει από τους πόλους της $G_{eq}(s)$ που είναι τα σημεία

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-40}}{20} = -0.05 \pm j0.312$$

και καταλήγει στα μηδενικά της που είναι το σημείο $s=0$, διπλό μηδενικό.

Ο γεωμετρικός τόπος δεν έχει ασύμπτωτες.

Η γωνία αναχώρησης από τον πόλο $-0.05+j0.312$ θα είναι

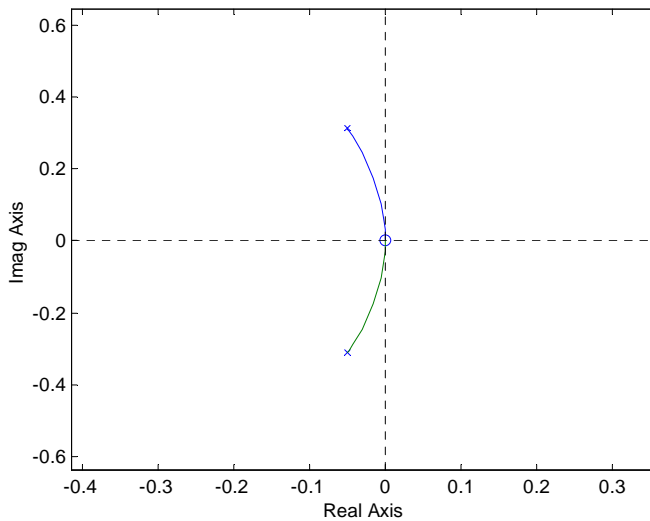
$$\varphi_p = 180^\circ + 2\text{Arg}(-0.05+j0.312) - \text{Arg}(j0.624) = 180^\circ + 2*99.1^\circ - 90^\circ = 288.2^\circ \Rightarrow 288.2 - 360 = -71.8^\circ$$

Οι γωνίες άφιξης στο διπλό μηδενικό θα είναι

$$2\varphi_z = -180^\circ + \text{Arg}(0.05+j0.312) + \text{Arg}(0.05-j0.312) = -180^\circ \Rightarrow \varphi_z = -90^\circ$$

$$2\varphi_z = 180^\circ + \text{Arg}(0.05+j0.312) + \text{Arg}(0.05-j0.312) = 180^\circ \Rightarrow \varphi_z = 90^\circ$$

Ο γεωμετρικός τόπος φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα.



3. Καθώς η βηματική απόκριση πρέπει να είναι πεπερασμένη και να μην εμφανίζει ταλαντώσεις, οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο και να είναι πραγματικές. Από το κριτήριο Routh λαμβάνεται

s^2	$10+a$	1
s	1	
s^0	1	

$$10+a > 0$$

ή ισοδύναμα

$$a > -10$$

Για να έχει το τριώνυμο πραγματικές ρίζες, η διακρίνουσα πρέπει να είναι θετική, ήτοι

$$\Delta = 1 - 4(10+a) = -39 - 4a > 0$$

Ή ισοδύναμα

$$a < -39/4 = -9.75$$

Οι ανισότητες συναληθεύουν για

$$-10 < a < -9.75$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Πρόσθετη Εξέταση Νοέμβριος 2005)

Το μοντέλο ενός συστήματος στη βιομηχανία σιδήρου συνδέει το πάχος h του προϊόντος με την τάση του σ ως εξής

$$\dot{h} + \eta \dot{\sigma} = (1 - 2\eta)h - 3\eta\sigma + 0.94u$$

$$a\dot{h} + 4.25\dot{\sigma} = (a - \delta)h - 12\sigma + 4.75u$$

όπου σαν είσοδος λαμβάνεται η τάση u διέγερσης του κινητήρα, a, δ, η είναι παράμετροι και μετράται το πάχος h .

1. Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς το διάνυσμα $x = [h \ \sigma]^T$.
2. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς.
3. Να προσδιοριστούν οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν τα a, δ, η ώστε το σύστημα να είναι μη ελέγξιμο ή μη παρατηρήσιμο.

Λύση

1. Οι εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$E\dot{x} = A_1x + B_1u$$

όπου

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \eta \\ a & 4.25 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1-2\eta & -3\eta \\ a-\delta & -12 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 4.75 \end{bmatrix}$$

Θα είναι

$$\begin{aligned} \dot{x} &= E^{-1}A_1x + E^{-1}B_1u = \frac{1}{4.25 - a\eta} \begin{bmatrix} 4.25 & -\eta \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2\eta & -3\eta \\ a-\delta & -12 \end{bmatrix} x + \frac{1}{4.25 - a\eta} \begin{bmatrix} 4.25 & -\eta \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.94 \\ 4.75 \end{bmatrix} u = \\ &= \frac{1}{4.25 - a\eta} \begin{bmatrix} 4.25 - 8.5\eta - \eta a + \eta \delta & -0.75\eta \\ 2\eta a - \delta & 3a\eta - 12 \end{bmatrix} x + \frac{1}{4.25 - a\eta} \begin{bmatrix} 3.995 - 4.75\eta \\ 4.75 - 0.94a \end{bmatrix} u = \end{aligned}$$

$$y = Cx = [1 \ 0]x$$

2. Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B = C[sE^{-1}E - E^{-1}A_1]^{-1}E^{-1}B_1 = C[sE - A_1]^{-1}EE^{-1}B_1 = C[sE - A_1]^{-1}B_1$$

οπότε

$$\begin{aligned}
G(s) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s-1+2\eta & \eta s+3\eta \\ as-a+\delta & 4.25s+12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.94 \\ 4.75 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{\{(s-1+2\eta)(4.25s+12) - (\eta s+3\eta)(as-a+\delta)\}} [4.25s+12 \quad -\eta s-3\eta] \begin{bmatrix} 0.94 \\ 4.75 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{(3.995-4.75\eta)s + (11.28-14.25\eta)}{\{(4.25-a\eta)s^2 + (7.75-2\eta a+8.5\eta-\delta\eta)s + (-12+24\eta-3\eta\delta+3\eta a)\}}
\end{aligned}$$

3. Το σύστημα θα είναι μη ελέγξιμο ή μη παρατηρήσιμο εάν υπάρχει κοινός παράγοντας μεταξύ των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή της $G(s)$. Καθώς ο αριθμητής είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, η ρίζα του

$$s = -\frac{(11.28-14.25\eta)}{(3.995-4.75\eta)}$$

πρέπει να είναι και ρίζα του παρονομαστή. Συνεπώς η ζητούμενη σχέση είναι

$$(4.25-a\eta) \left(\frac{11.28-14.25\eta}{-3.995+4.75\eta} \right)^2 + (7.75-2\eta a+8.5\eta-\delta\eta) \left(\frac{11.28-14.25\eta}{-3.995+4.75\eta} \right) + (-12+24\eta-3\eta\delta+3\eta a) = 0$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Φεβρουάριος 2006)

Λύση

α) Η μήτρα ελεγχιμότητας θα είναι

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 10 & 38 \\ 0 & 2 & 10 & 38 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Επειδή οι δύο πρώτες γραμμές της μήτρας ταυτίζονται, η ορίζουσα της θα είναι μηδενική και συνεπώς το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

β) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$H(z) = \frac{\frac{p_1(z)}{q_1(z)+kq_2(z)}}{1+k \frac{p_1(z)}{q_1(z)+kq_2(z)}} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)+kq_2(z)+kp_1(z)}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi(z)=q_1(z)+k[p_1(z)+q_2(z)]$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ισοδύναμου συστήματος ως προς την ευστάθεια θα είναι

$$G_{\text{ισ}}(z)=\frac{p_1(z)+q_2(z)}{q_1(z)}=\frac{\beta z+\beta+1}{-z^3-5z^2-\alpha z+6}$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων θα είναι

$$\sigma=7=\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-5 + \frac{\beta+1}{\beta}}{2} = \frac{-4\beta+1}{2\beta}$$

από την οποία προκύπτει αμέσως

$$\beta=1/18$$

Το σημείο θλάσης προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\frac{dG_{\text{ισ}}(z)}{dz} = \frac{\beta(-z^3-5z^2-\alpha z+6) - (\beta z+\beta+1)(-3z^2-10z-\alpha)}{(-z^3-5z^2-\alpha z+6)^2} = 0$$

ή ισοδύναμα καθώς το σημείο θλάσης είναι στο $z=0$

$$\left. \frac{dG_{\text{ισ}}(z)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{6\beta+(\beta+1)\alpha}{36} = 0$$

από την οποία προκύπτει

$$\alpha = \frac{-6\beta}{\beta+1} = -\frac{6}{19}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Φεβρουάριος 2006)

Λύση

α) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \left(-\frac{1+k^2}{s^2-7s+1} \right)} = \frac{s^2-7s+1}{s^3-7s^2+s-1-k^2}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου, το οποίο είναι το πολυώνυμο του παρονομαστή, δεν έχει όλες τις ρίζες του στο αριστερό ημιεπίπεδο καθώς οι συντελεστές δεν είναι ομόσημοι (Θεώρημα Stodola) και συνεπώς το σύστημα

θα είναι ασταθές και δεν υπάρχουν τιμές του k οι οποίες να εξασφαλίζουν την ευστάθεια του συστήματος και συνεπώς φράγμα στην έξοδο του συστήματος.

β1) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{\frac{s}{s^3+9s^2+ks+27}}{1+\frac{ks}{s^3+9s^2+ks+27}} = \frac{s}{s^3+9s^2+2ks+27}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\psi(s) = s^3 + 9s^2 + 2ks + 27$$

Για να πηγαίνει η κρουστική απόκριση του συστήματος στο 0 ταχύτερα από την e^{-2t} , όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < -2$$

Το πρόβλημα λύνεται με χρήση της διάταξης Routh θέτοντας

$$s = x - 2$$

οπότε το πολυώνυμο που προκύπτει ως προς x θα πρέπει να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Θα είναι

$$y(x) = \psi(x-2) = (x-2)^3 + 9(x-2)^2 + 2k(x-2) + 27 = x^3 + 3x^2 + (2k-24)x + 55-4k$$

Κατασκευάζεται η διάταξη Routh ως ακολούθως.

s^3	1	2k-24
s^2	3	55-4k
s	$\frac{-72+6k-55+4k}{3} = \frac{10k-127}{3}$	
s^0	55-4k	

Για να είναι το $y(x)$ ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες

$$10k-127 > 0 \quad \text{ή} \quad k > 12.7$$

$$55-4k > 0 \quad \text{ή} \quad k < 13.75$$

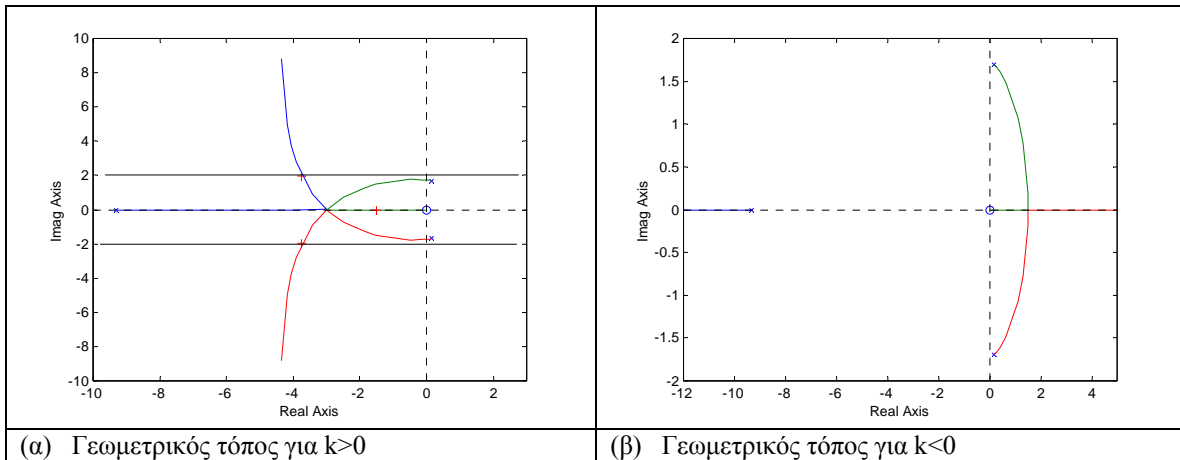
Επομένως η περιοχή τιμών του k θα είναι

$$12.7 < k < 13.75$$

β2) Στο ακόλουθο Σχήμα φαίνονται οι γεωμετρικοί τόποι των πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου για την περιοχή τιμών του k που εξετάζεται. Όπως συνάγεται από το Σχήμα (β), για όλες τις αρνητικές τιμές του k οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου βρίσκονται μέσα στη ζώνη

$$|\operatorname{Im}\{s_i\}| < 2$$

ενώ για k θετικό υπάρχει μία οριακή τιμή k_c του k τέτοια ώστε για κάθε μεγαλύτερη τιμή της k_c πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου να είναι εκτός της επιθυμητής ζώνης.



Έστω $s = x + j2$, x πραγματικό, το σημείο στο οποίο ο γεωμετρικός τόπος εγκαταλείπει τη ζώνη. Το σημείο αυτό θα είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και συνεπώς θα ισχύει

$$y(x) = \psi(x + j2) = (x + j2)^3 + 9(x + j2)^2 + 2k(x + j2) + 27 = x^3 + 9x^2 + (2k - 12)x - 9 + j(6x^2 + 36x + 4k - 8) = 0$$

Από την τελευταία σχέση λαμβάνονται οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} x^3 + 9x^2 + (2k - 12)x - 9 &= 0 \\ 6x^2 + 36x + 4k - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Θα είναι

$$k = 2 - 9x - 1.5x^2$$

και

$$x^3 + 9x^2 + (2k - 12)x - 9 \Big|_{k=2-9x-1.5x^2} = -2x^3 - 9x^2 - 8x - 9 = 0$$

Η μοναδική πραγματική λύση της εξίσωσης είναι

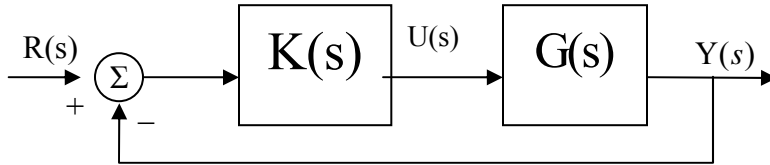
$$x = -3.754$$

και με αντικατάσταση προκύπτει

$$k = 14.647$$

Συνεπώς για $k > 14.647$ υπάρχουν πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου εκτός της ζώνης. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι εάν η ζώνη ήταν στενότερη, θα υπήρχαν τρία σημεία τομής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Φεβρουάριος 2006)



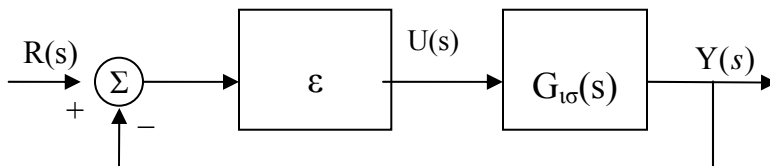
Δεδομένου ότι $K(s)=(s+1)/s$ και $G(s)=1/(Js^2+2s)$, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ανοικτού βρόχου είναι

$$G(s)K(s)=\frac{s+1}{Js^3+2s^2}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι καθώς $J=1+\varepsilon$

$$\psi(s) = Js^3 + 2s^2 + s + 1 = s^3 + 2s^2 + s + 1 + \varepsilon s^3$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ισοδύναμου συστήματος ως προς την ευστάθεια που φαίνεται στο Σχήμα θα είναι



$$G_{\text{ισ}}(s) = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Η μορφή του διαγράμματος Nyquist της $G_{\text{ισ}}(s)$ φαίνεται στο Σχήμα της εκφώνησης. Για τον προσδιορισμό της περιοχής τιμών του ε που εξασφαλίζει την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου πρέπει να ευρεθεί το σημείο τομής του διαγράμματος με τον αρνητικό πραγματικό άξονα. Για $s=j\omega$ θα είναι

$$G_{\text{ισ}}(j\omega) = \frac{(j\omega)^3}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + (j\omega) + 1} = \frac{-j\omega^3}{1 - 2\omega^2 + j(\omega - \omega^3)}$$

Για να είναι το $G_{\text{ισ}}(j\omega)$ πραγματικό, πρέπει

$$1-2\omega^2=0$$

ή ισοδύναμα

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \text{ rad/sec},$$

οπότε

$$G_{\omega}(j\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{8}} = -1$$

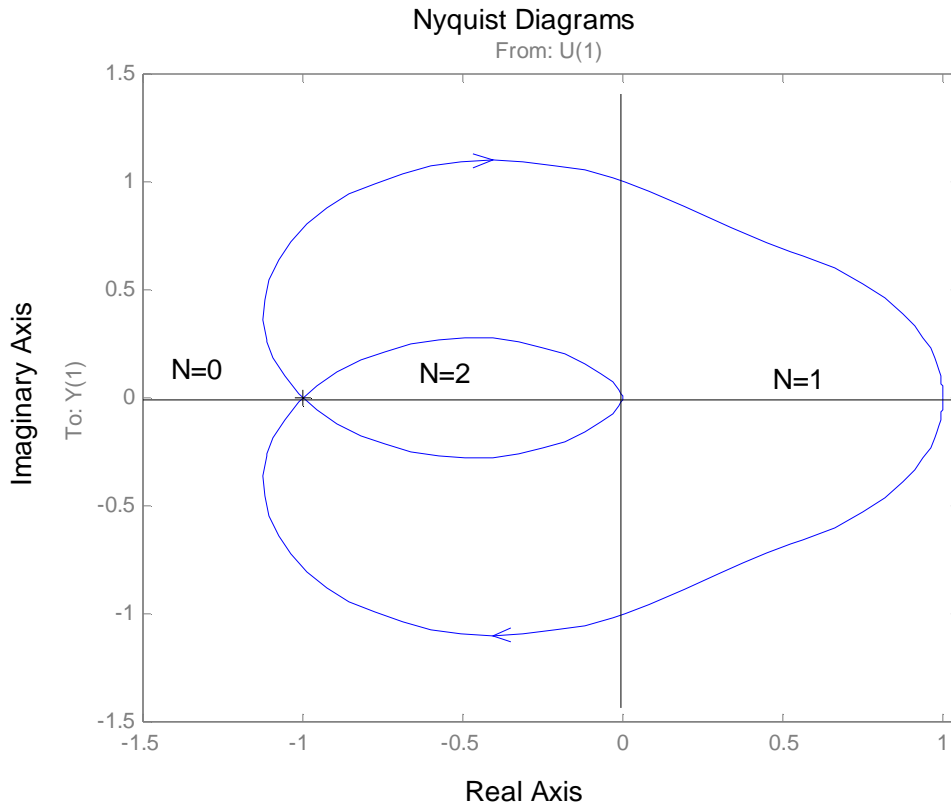
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος ανοικτού βρόχου θα είναι

$$\psi_o(s) = s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Χρησιμοποιείται το κριτήριο Routh για να ευρεθεί ο αριθμός των πόλων του συστήματος ανοικτού βρόχου στο δεξιό ημιεπίπεδο.

s^3	1	1
s^2	2	1
s	1	0
s^0	1	

Καθώς στην πρώτη στήλη δεν υπάρχουν αλλαγές προσήμου, ο αριθμός των πόλων του συστήματος ανοικτού βρόχου στο δεξιό ημιεπίπεδο είναι ίσος με 0.



Για να είναι το σύστημα κλειστού βρόχου ευσταθές πρέπει $N=0$, οπότε

$$-1/\varepsilon < -1$$

ή ισοδύναμα

$$\varepsilon < 1.$$

Εάν η είσοδος $u(t)$ εφαρμόζεται στο σύστημα μέσω internet, εξαιτίας της καθυστέρησης που εισάγεται, θα είναι

$$u(s) = K(s)[R(s) - Y(s)]e^{-sT}$$

οπότε

$$Y(s) = G(s)K(s)e^{-sT}[R(s) - Y(s)]$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)K(s)e^{-sT}}{1 + G(s)K(s)e^{-sT}}$$

Για την ευστάθεια συνεπώς θα πρέπει να εξεταστείτο διάγραμμα Nyquist της $G(s)K(s)e^{-sT}$. Επειδή

$$|e^{-j\omega T}| = 1 \quad \text{για } \forall \omega$$

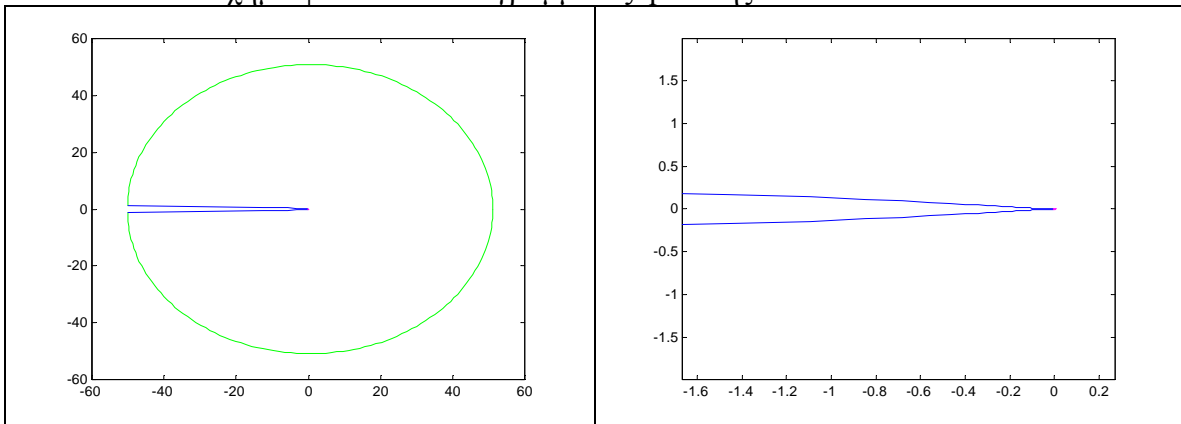
αρκεί να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist της $G(s)K(s)$ και να εξασφαλιστεί ότι στην κυκλική συχνότητα ω_0 για την οποία

$$|G(j\omega_0)K(j\omega_0)| = 1$$

η φάση που εισάγει ο όρος e^{-sT} είναι μικρότερη από τη γωνία

$$\theta_m = \text{περιθώριο φάσης} = \pi + \text{Arg}\{G(j\omega_0)K(j\omega_0)\}$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα Nyquist της



$$G(s)K(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1+j\omega}{-\omega^2(2+j1.5\omega)}$$

Θα είναι

$$|G(j\omega_0)K(j\omega_0)| = \frac{\sqrt{1+\omega_0^2}}{\omega_0^2 \sqrt{4+2.25\omega_0^2}} = 1$$

από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$2.25\omega_0^6 + 4\omega_0^4 - \omega_0^2 - 1 = 0$$

Θέτοντας $\omega_0^2 = x$ η τριτοβάθμια εξίσωση που προκύπτει έχει μοναδική θετική ρίζα την $x=0.54$. Συνεπώς θα είναι

$$\omega_0 = 0.73$$

Θα είναι

$$\arg\{G(j\omega_0)K(j\omega_0)\} = \arg\left\{\frac{1+j0.73}{-0.54(2+j1.1)}\right\} = (0.63 - \pi - 0.5) \text{ rad}$$

Άρα

$$\arg\{G(j\omega_0)K(j\omega_0)\} + \arg\{e^{-j0.73T}\} = (0.63 - \pi - 0.5) - 0.73T > -\pi$$

οπότε

$$0.73T < 0.13$$

ή

$$T < 0.178 \text{sec} = 178 \text{ms.}$$

Εάν η έξοδος μετράται μέσω του internet και η καθυστέρηση θεωρηθεί σταθερή, η είσοδος $u(s)$ θα είναι

$$u(s) = K(s)[R(s) - e^{-sT} Y(s)] e^{-sT}$$

οπότε

$$Y(s) = G(s)K(s)e^{-sT}[R(s) - e^{-sT} Y(s)]$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)K(s)e^{-sT}}{1 + G(s)K(s)e^{-2sT}}$$

Για την ευστάθεια θα πρέπει να εξεταστεί το διάγραμμα Nyquist της $G(s)K(s)e^{-2sT}$. Σύμφωνα με το ερώτημα (β) θα πρέπει να ισχύει για την καθυστέρηση

$$2T < 0.178 \text{sec}$$

ή ισοδύναμα

$$T < 89 \text{ms.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Φεβρουάριος 2006)

Λύση

α) Η σύνθετη αντίσταση του RLC κυκλώματος είναι

$$Z(s) = R + Ls + \frac{1}{Cs}$$

Η ένταση του ρεύματος είναι

$$i(s) = \frac{v(s)}{Z(s)}$$

οπότε

$$G(s) = \frac{i(s)}{v(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

Εάν θεωρηθούν σαν καταστάσεις του συστήματος η τάση του πυκνωτή και το ρεύμα του επαγωγέα, θα είναι

$$C \frac{dv_c}{dt} = i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} + v_c + Ri_L = v(t)$$

και επιλύοντας ως προς τις παραγώγους, λαμβάνεται

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t)$$

β) Για να είναι η $V(x)$ θετικά ορισμένη στην περιοχή της αρχής με

$$V(x) = x_1^2 + ax_2^2$$

πρέπει να ισχύει $a > 0$. Θα είναι

$$W(t) = \frac{dV}{dt} = 2x_1 \dot{x}_1 + 2ax_2 \dot{x}_2 = 2v_c \frac{i_L}{C} + 2ai_L \left(\frac{-v_c}{L} - \frac{Ri_L}{L} \right) = 2v_c i_L \left(\frac{1}{C} - \frac{a}{L} \right) - 2a \frac{R}{L} i_L^2$$

Για να διατηρεί η $W(t)$ το πρόσημό της στην περιοχή της αρχής πρέπει να ληφθεί

$$\frac{1}{C} - \frac{a}{L} = 0$$

οπότε

$$W(t) = \frac{dV}{dt} = -2a \frac{R}{L} i_L^2$$

Καθώς η $W(t)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, το σύστημα θα είναι ευσταθές. Εν τούτοις δεν μπορεί να συναχθεί η ασυμπτωτική του ευστάθεια με αυτή την επιλογή της συνάρτησης Lyapunov.

Για την επιλογή αυτή του a , θα είναι

$$V(x) = x_1^2 + ax_2^2 = v_c^2 + \frac{L}{C} i_L^2 = \frac{2}{C} \left[\frac{1}{2} C v_c^2 + \frac{1}{2} L i_L^2 \right] = \frac{2}{C} E$$

όπου E η αποθηκευμένη ενέργεια στον επαγωγέα και τον πυκνωτή.

γ) Η εξίσωση Lyapunov είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2p_{12}}{L} & \frac{p_{11}}{C} - \frac{Rp_{12}}{L} - \frac{p_{22}}{L} \\ \frac{p_{11}}{C} - \frac{Rp_{12}}{L} - \frac{p_{22}}{L} & 2\left(\frac{p_{12}}{C} - \frac{Rp_{22}}{L}\right) \end{bmatrix} = -Q$$

Λαμβάνοντας

$$Q = 2I_2$$

Προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}\frac{p_{12}}{L} &= 1 \\ \frac{p_{11}}{C} - \frac{Rp_{12}}{L} - \frac{p_{22}}{L} &= 0 \\ \frac{p_{12}}{C} - \frac{Rp_{22}}{L} &= -1\end{aligned}$$

Από τη λύση του συστήματος λαμβάνεται

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CR + \frac{C}{R} + \frac{L}{R} & L \\ L & \frac{L}{R} + \frac{L^2}{CR} \end{bmatrix}$$

Για να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές το σύστημα πρέπει και αρκεί η P να είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή πρέπει και αρκεί να ικανοποιούνται οι ανισότητες

$$\begin{aligned}\frac{L}{R} + \frac{L^2}{CR} &> 0 \\ \left(\frac{L}{R} + \frac{L^2}{CR}\right) \left(CR + \frac{C}{R} + \frac{L}{R}\right) - L^2 &> 0\end{aligned}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\psi(s) = Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}$$

Εφαρμόζεται η διάταξη Routh ως ακολούθως

s^2	L	$1/C$
s	R	
s^0	$1/C$	

Επειδή η διαδικασία κατασκευής της διάταξης δεν σταματάει πρόωρα, για να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές το σύστημα πρέπει και αρκεί να μη συμβαίνουν αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη, δηλαδή πρέπει και αρκεί να ικανοποιούνται οι ανισότητες

$$L/R > 0$$

$$LC > 0$$