ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2008)

Για τον Γεωμετρικό Τόπο των Ριζών της συνάρτησης μεταφοράς

$$G(s) = \frac{as^2 + s + 9}{s(s-5)(s+b)}$$

με K>0 δίδεται ότι η τομή των ασυμπτώτων είναι το σημείο

$$\sigma = -(10+N_0)$$

όπου N_0 το τελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας.

1. Να ευρεθούν οι παράμετροι a,b της G(s).
2. Να ευρεθούν τα τμήματα του πραγματικού άξονα που ανήκουν στον Γεωμετρικό Τόπο των Ριζών της G(s).
3. Να προσδιοριστούν τα σημεία τομής του Γεωμετρικού τόπου των Ριζών με τον φανταστικό άξονα.

(Να σημειώσετε με Χ τα σωστά τετράγωνα)

±j7.697	±j7.738	±j7.786	±j7.847	±j7.872	±j7.906	±j7.934	±j7.971	±j8.012
±j8.043	±j8.124	±j8.187	±j8.216	±j8.321	±j8.369	±j8.441	±j8.581	±j8.746

4. Να ευρεθούν τα σημεία θλάσης του Γεωμετρικού Τόπου των Ριζών.

(Να σημειώσετε με Χ τα σωστά τετράγωνα)

2.2775	2.2789	2.2801	2.2823	2.2832	2.2845	2.2868	2.2881	2.2894
2.2922	2.2937	2.2953	2.2986	2.2998	2.3023	2.3064	2.3109	2.3187

5. Να σχεδιαστεί ο Γεωμετρικός Τόπος των Ριζών
6. Είναι επιθυμητό να ευρεθεί η γωνία υπό την οποία τέμνεται ο φανταστικός άξονας από τον Γεωμετρικό Τόπο των Ριζών. Να προτείνετε μέθοδο για τον προσδιορισμό της γωνίας και να την εφαρμόσετε στον ζητούμενο Γεωμετρικό Τόπο των Ριζών.

Λύση

1. Η τομή των ασυμπτώτων με τον πραγματικό άξονα δίδεται από τον τύπο

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

Για να υπάρχει η τομή απαιτείται να υπάρχουν τουλάχιστον δύο ασύμπτωτοι. Καθώς ο αριθμός των ασυμπτώτων είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή μείον το βαθμό του αριθμητή, πρέπει να είναι

$$a=0$$

διαφορετικά θα υπάρχει μία μόνον ασύμπτωτος. Από τον τύπο λαμβάνεται

$$\sigma = -10 - N_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = \frac{0+5-b-(-9)}{2}$$

ή ισοδύναμα

$$b = 34 + 2N_0$$

Για τα διάφορα N_0 θα είναι

N_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52

2. Τα τμήματα του πραγματικού άξονα που είναι σημεία του Γεωμετρικού τόπου είναι τα διαστήματα

[-b,-9]

[0,5]

3. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi(s) = s(s-5)(s+b) + K(s+9) = s^3 + (b-5)s^2 + (K-5b)s + 9K$$

Εφαρμόζεται η διάταξη Routh ως ακολούθως

s^3	1	K-5b
s^2	b-5	9K
s	$\dfrac{(b-5)(K-5b)-9K}{b-5}$	
s^0	9K	

Για να έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ρίζες επάνω στο φανταστικό άξονα πρέπει

$$\frac{(b-5)(K-5b)-9K}{b-5} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$K = \frac{5b(b-5)}{b-14}$$

Τα σημεία τομής βρίσκονται από τις ρίζες της βοηθητικής εξίσωσης
$B(s)=(b-5)s^2+9K$
οι οποίες είναι

$$\rho_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{9K}{b-5}} = \pm j\sqrt{\frac{45b}{b-14}}$$

Οι τιμές του K και των σημείων τομής για τα διάφορα N_0 είναι ως εξής:

N_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52

K	246.5	253.6	261.2	269.2	277.5	286	294.7	303.5	312.5	321.6
$\rho_{1,2}$	±j8.746	±j8.581	±j8.441	±j8.321	±j8.216	±j8.124	±j8.043	±j7.971	±j7.906	±j7.847

4. Τα σημεία θλάσης προσδιορίζονται από τις ρίζες s_b της εξίσωσης

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{s+9}{s^3+(b-5)s^2-5bs}\right\} = \frac{s^3+(b-5)s^2-5bs-(s+9)[3s^2+2(b-5)s-5b]}{\left[s^3+(b-5)s^2-5bs\right]^2} =$$

$$= -\frac{2s^3+(b+22)s^2+18s(b-5)-45b}{\left[s^3+(b-5)s^2-5bs\right]^2} = 0$$

οι οποίες δίδουν

$$G(s_b) = \frac{-1}{K} < 0$$

Για

$$b=40$$

η εξίσωση γίνεται

$$f(s) = 2s^3 + 62s^2 + 630s - 1800 = 0$$

Για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης μπορούν να δοκιμαστούν οι τιμές που δίδονται. Για τη μείωση των πράξεων μπορεί να ακολουθηθεί ο τρόπος εύρεσης της ρίζας συνάρτησης ως εξής

Για $s_1 = 2.2823$ προκύπτει $f(s_1) = -15.4231$

Για $s_2 = 2.3023$ προκύπτει $f(s_2) = 3.4924$

Το νέο σημείο δοκιμής προκύπτει από τη σχέση

$$s_3 = s_1 + \frac{-f(s_1)}{f(s_2)-f(s_1)}(s_2 - s_1) = 2.2823 + \frac{15.4231}{18.9155} * 0.02 = 2.2986$$

Για $s_3 = 2.2986$ προκύπτει $f(s_3) = -0.0116$

Είναι

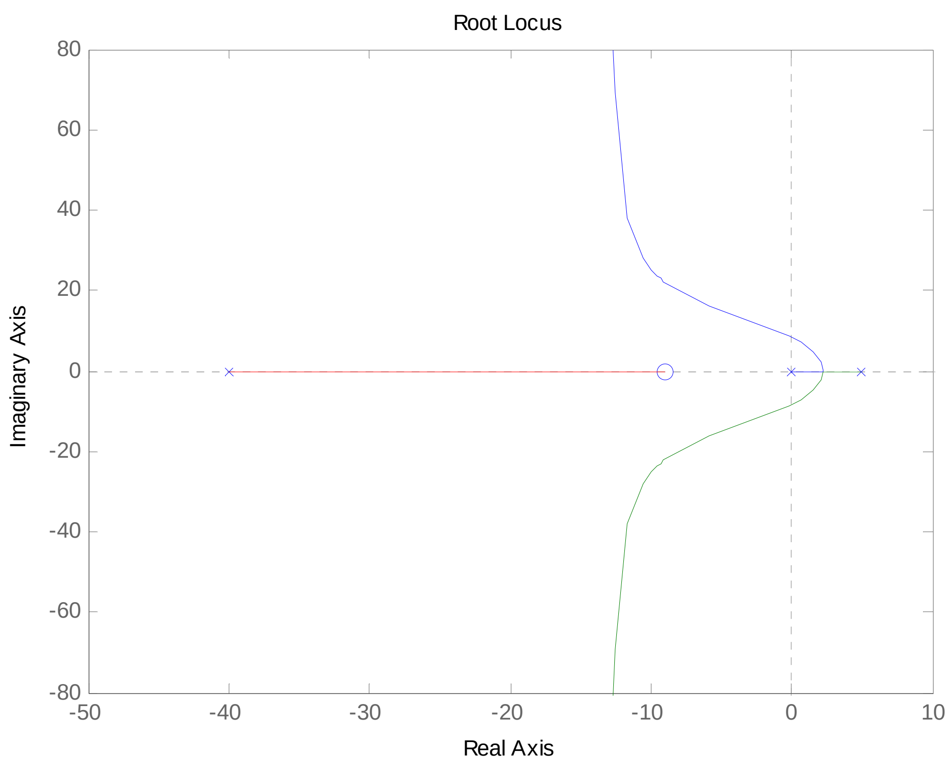
$$G(s)\Big|_{s=2.2986} = \frac{s+9}{s(s-5)(s+40)}\Big|_{s=2.2986} = -0.0430 < 0$$

και συνεπώς το σημείο θλάσης αντιστοιχεί σε K>0 και είναι σημείο του προς κατασκευή γεωμετρικού τόπου

Οι τιμές του σημείου θλάσης για τα διάφορα N_0 είναι ως εξής:

N_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52
s_b	2.3109	2.3064	2.3023	2.2986	2.2953	2.2922	2.2894	2.2868	2.2845	2.2823

Ο Γεωμετρικός Τόπος των Ριζών της G(s) για b=40 δίδεται στο ακόλουθο Σχήμα.



6. Για b=40 τα σημεία τομής με το φανταστικό άξονα είναι ±j8.321 και συμβαίνουν για K=269.2. Η Τρίτη ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου για την τιμή αυτή του K προκύπτει από την παραγοντοποίηση του ψ(s)

$$\psi(s)\Big|_{K=269.2} = s^3 + 35s^2 + 69.2s + 2422.8 = (s^2 + 8.321^2)(s + 35)$$

οπότε θα είναι

$$s = -35$$

Ας θεωρηθεί

$$K = 269.2 + \hat{K}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος λαμβάνει τη μορφή

$$\psi(s) = s(s-5)(s+b) + K(s+9) = s^3 + 35s^2 + (\hat{K} + 69.2)s + 9(\hat{K} + 269.2) =$$
$$= (s+35)(s^2 + 8.321^2) + \hat{K}(s+9)$$

Αν σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών ως προς τη μεταβλητή $\hat{K}$ θα είναι τμήμα του γεωμετρικού τόπου που έχει σχεδιαστεί και θα αναχωρεί από τα σημεία τομής με το φανταστικό άξονα. Η ζητούμενη γωνία μπορεί να προσδιοριστεί από τη γωνία αναχώρησης του γεωμετρικού τόπου από το φανταστικό πόλο. Θα είναι

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Arg}\{j8.321-(-9)\}-\mathrm{Arg}\{j8.321-(-35)\}-\mathrm{Arg}\{j8.321-(-j8.321)\}-\theta_{\alpha\nu}= \\
&=\mathrm{Arg}\{j8.321+9\}-\mathrm{Arg}\{j8.321+35\}-\mathrm{Arg}\{j2*8.321\}-\theta_{\alpha\nu}= \\
&=0.7462-0.2334-\pi/2-\theta_{\alpha\nu}=-\pi
\end{aligned}$$

Η γωνία αναχώρησης θα είναι

$$\theta_{\alpha\nu}=(\pi-1.058)\mathrm{rad}=119.38^{\circ}$$

Επομένως η γωνία που σχηματίζει ο γεωμετρικός τόπος με το φανταστικό άξονα θα είναι

$$\phi=\theta_{\alpha\nu}-90^{\circ}=29.38^{\circ}$$

$2^{\text{ος}}$ Τρόπος

Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\psi(s)=D(s)+KN(s)=0 \qquad (1)$$

όπου N(s), D(s) είναι αντίστοιχα ο αριθμητής και ο παρονομαστής της G(s) προκύπτει η συνάρτηση

$$s=f(K)$$

και ενδιαφέρει να προσδιοριστεί η συνάρτηση ds/dK.

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς K λαμβάνεται

$$\frac{dD(s)}{ds}\frac{ds}{dK}+K\frac{dN(s)}{ds}\frac{ds}{dK}+N(s)=0$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dK}&=\frac{-N(s)}{\dfrac{dD(s)}{ds}+K\dfrac{dN(s)}{ds}}=\frac{-(s+9)}{\dfrac{d(s^3+35s^2-200s)}{ds}+K\dfrac{d(s+9)}{ds}}= \\
&=\left.\frac{-(s+9)}{3s^2+70s-200+K}\right|_{\substack{K=269.2\\ s=j8.321}}=-0.01+j0.0178
\end{aligned}$$

Καθώς

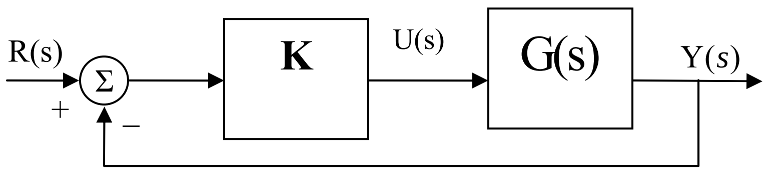
$$\mathrm{Arg}\left\{\frac{ds}{dK}\right\}=\mathrm{Arg}\{-0.01+j0.0178\}=119.38^{\circ}$$

η γωνία ϕ προκύπτει όπως παραπάνω

$$\phi=119.38-90^{\circ}=29.38^{\circ}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2008)

Για το σύστημα κλειστού βρόχου του σχήματος δίδεται ότι



$$G(s) = \frac{s - 0.05(1 + N_1)}{s^2 - s + 1}$$

όπου N_1 είναι το προτελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας.

1. Να προσδιοριστούν τα σημεία τομής της G(jω) με τον πραγματικό άξονα
(Να σημειώσετε με Χ τα σωστά τετράγωνα)

-2	-1.5	-1	-0.75	-0.5	-0.45	-0.4	-0.35	-0.3	-0.25
-0.2	-0.15	-0.1	-0.05	0	0.25	0.5	0.75	1	1.5

2. Να προσδιοριστούν τα σημεία τομής της G(jω) με το φανταστικό άξονα
(Να σημειώσετε με Χ τα σωστά τετράγωνα)

0	±j0.05	±j0.1	±j0.15	±j0.2	±j0.25	±j0.3	±j0.35	±j0.4	±j0.5

3. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist της G(s).
4. Εάν εφαρμοστεί ο έλεγχος του Σχήματος, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Nyquist να ευρεθεί για ποιές τιμές του Κ το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές
(Να εκφράσετε τις συνθήκες σημειώνοντας με Χ τα κατάλληλα τετράγωνα)

Το Κ είναι μεγαλύτερο του

0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6
0.7	0.8	0.9	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4

Το Κ είναι μικρότερο του

0.6667	1.0	1.667	2.0	2.2222	2.5	2.8571	3.3333	4.0	4.6667
5.0	6.0	6.6667	8.0	10.0	12.6667	15.0	20.0	33.333	50

5. Εάν έχει ληφθεί ονομαστική τιμή του κέρδους
K=1.5
να προσδιοριστούν τα όρια μεταβολής του περιθωρίου κέρδους.

Λύση

Εάν τεθεί

$$a = -0.05(1+N_1)$$

η G(jω) θα είναι

$$G(j\omega) = \frac{s+a}{s^2 - s + 1}\Big|_{s=j\omega} = \frac{a+j\omega}{1-\omega^2 - j\omega} = \frac{a+j\omega}{1-\omega^2 - j\omega}\,\frac{1-\omega^2 + j\omega}{1-\omega^2 + j\omega} =$$

$$= \frac{a(1-\omega^2)-\omega^2}{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2} + \frac{j\omega[a+1-\omega^2]}{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2} = X + jY$$

1. Για την εύρεση των σημείων τομής με τον πραγματικό άξονα τίθεται

$$Y=0$$

και προσδιορίζονται τα ω τα οποία ικανοποιούν τη σχέση. Αυτά είναι τα ακόλουθα

$$\omega=0$$

$$\omega^2=a+1$$

$$\omega=\infty$$

Για ω=0 προκύπτει

$$X_1 = \frac{a(1-\omega^2)-\omega^2}{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}\Big|_{\omega=0} = a$$

Για $\omega^2=a+1$ προκύπτει

$$X_2 = \frac{a(1-\omega^2)-\omega^2}{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}\Bigg|_{\omega^2=a+1} = \frac{a(-a)-(1+a)}{\left(-a\right)^2+(1+a)} = \frac{-a^2-a-1}{a^2+a+1} = -1$$

Για ω=∞ προκύπτει

$$X_3 = \frac{a(1-\omega^2)-\omega^2}{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}\Big|_{\omega=\infty} = 0$$

Συνεπώς τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα είναι τα σημεία -1, 0 και ανάλογα με το N_1 τα ακόλουθα

N_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_3	-0.05	-0.1	-0.15	-0.2	-0.25	-0.3	-0.35	-0.4	-0.45	-0.5

2. Για τον προσδιορισμό των σημείων τομής με το φανταστικό άξονα τίθεται

$$X=0$$

και προσδιορίζονται τα ω τα οποία ικανοποιούν τη σχέση. Αυτά είναι
α) Τα ω τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

$$a(1-\omega^2)-\omega^2=0$$

ή ισοδύναμα

$$\omega^2=\frac{a}{1+a}$$

Δεδομένου ότι το a είναι στο διάστημα (-1,0), δεν υπάρχουν ω τα οποία ικανοποιούν τη σχέση.

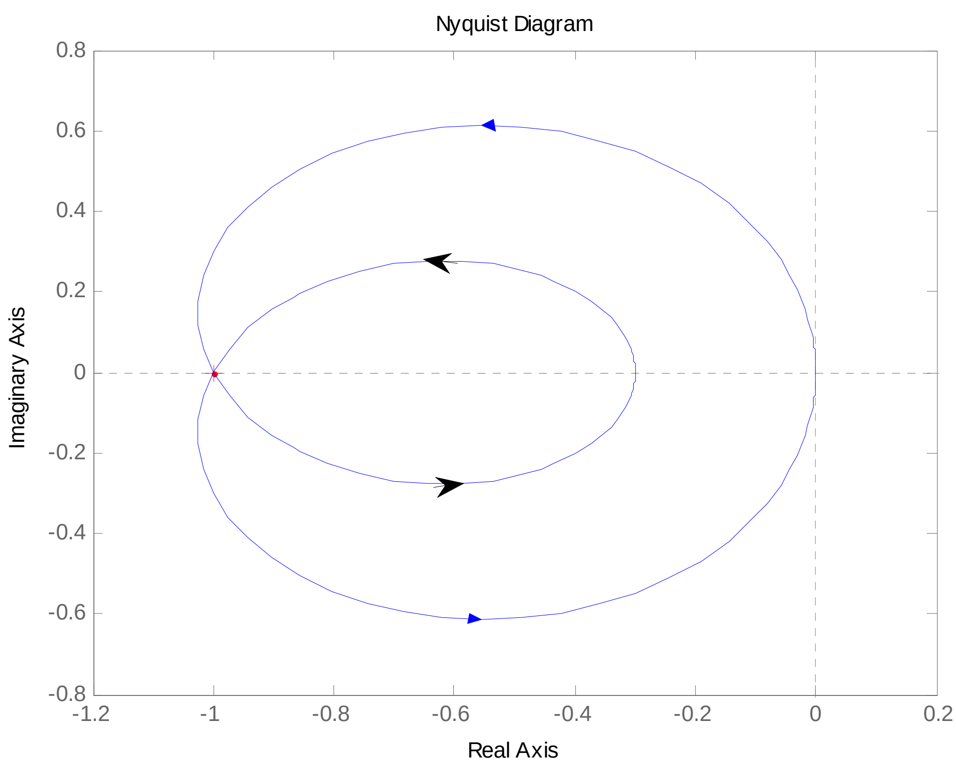
β) $$\omega=\infty$$

Για $\omega=\infty$ το σημείο τομής με το φανταστικό άξονα προκύπτει

$$Y_1=\frac{\omega[a+1-\omega^2]}{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}\Big|_{\omega=\infty}=0$$

3. Το διάγραμμα Nyquist της G(s) φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα για

$$a=-0.3$$



4. Το προς έλεγχο σύστημα είναι ασταθές καθώς έχει δύο πόλους, τους

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

στο δεξιό ημιεπίπεδο. Για να είναι ευσταθές το σύστημα κλειστού βρόχου πρέπει το σημείο -1/K να περιτριγυρίζεται δύο φορές ανθωρολογιακά από το διάγραμμα Nyquist της G(s). Αυτό σημαίνει ότι πρέπει

$$-1 < -\frac{1}{K} < a$$

ή ισοδύναμα

$$1 < K < \frac{-1}{a} = \frac{20}{N_1 + 1}$$

Συνεπώς το K πρέπει να είναι μεγαλύτερο της μονάδας ανεξάρτητα του Αριθμού Μητρώου και μικρότερο του K_{max} το οποίο ανάλογα με το N_1 είναι

N_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_{max}	20	10	6.6667	5	4	3.3333	2.8571	2.5	2.2222	2

5. Για το περιθώριο κέρδους K_c θα ισχύει

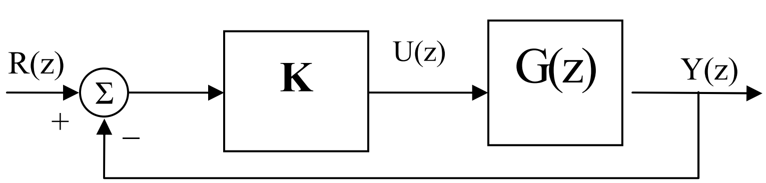
$$1 < K = K_N K_c < \frac{-1}{a} = \frac{20}{N_1 + 1}$$

οπότε

$$\frac{1}{K_N} = 0.6667 < K_c < \frac{20}{(N_1 + 1)K_N} = \frac{40}{(N_1 + 1)3}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2008)

Για το σύστημα κλειστού βρόχου του σχήματος δίδεται ότι



$$G(z) = \frac{1}{z(z + 0.2)(z + 0.1 * N_2)}$$

όπου N_2 είναι το τρίτο από το τέλος ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας.

1. Να προσδιοριστεί η τιμή του K ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα

$$\lim_{k\to\infty}\left\{r(k)-y(k)\right\}$$

(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

0.05	0.08	0.13	0.16	0.2	0.24	0.3	0.32	0.35	0.4
0.45	0.48	0.52	0.56	0.6	0.64	0.7	0.72	0.8	Κανένα

2. Για την επιλογή του ερωτήματος 1 να ευρεθεί το

$$\lim_{k\to\infty}\left\{y(k)/K\right\}$$

(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

0.6	0.55	0.5	0.4902	0.4885	0.4808	0.4752	0.4717	0.4683	0.4630
0.4602	0.4545	0.45	0.4464	0.4415	0.4386	0.4310	0.4250	0.4237	0.4189

Λύση

Εάν τεθεί

$$b=0.1*N_2>0$$

η συνάρτηση μεταφοράς του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$H(z)=\frac{KG(z)}{1+KG(z)}=\frac{K}{z(z+0.2)(z+b)+K}$$

Ο μετασχηματισμός Z του σφάλματος

$$e(k)=r(k)-y(k)$$

θα είναι

$$E(z)=R(z)-Y(z)=[1-H(z)]R(z)=\frac{1}{1+KG(z)}R(z)$$

Εάν η συνάρτηση

$$(1-z^{-1})E(z)=[1-H(z)](1-z^{-1})R(z)$$

έχει όλους τους πόλους της εντός του μοναδιαίου κύκλου, θα ισχύει το θεώρημα της τελικής τιμής και

$$\lim_{k\to\infty}\left\{e(k)\right\}=\lim_{z\to 1}\left\{(1-z^{-1})E(z)\right\}=\lim_{z\to 1}\left\{(1-z^{-1})[1-H(z)]R(z)\right\}$$

Καθώς η 1-H(z) δεν έχει μηδενικό στο 1 και η R(z) έχει πολλαπλούς πόλους στο 1 εάν η r(k) είναι η συνάρτηση αναρριχήσεως ή η παραβολική συνάρτηση, το πρόβλημα έχει νόημα (το σφάλμα δεν απειρίζεται) μόνο για τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση για την οποία

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

Συνεπώς

$$e_{ss} = \lim_{k\to\infty}\{e(k)\} = \lim_{z\to 1}\{(1-z^{-1})[1-H(z)]R(z)\} = \lim_{z\to 1}\{1-H(z)\} = \frac{1.2*(1+b)}{1.2*(1+b)+K}$$

Καθώς

$$\frac{de_{ss}}{dK} = \frac{-1.2*(1+b)}{[1.2*(1+b)+K]^2} < 0$$

η ελαχιστοποίηση του σφάλματος θα συμβαίνει για την μέγιστη τιμή του K που εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του αντισταθμισμένου συστήματος. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi(z) = z(z+0.2)(z+b)+K = z^3+(b+0.2)z^2+0.2bz+K$$

Εφαρμόζεται το κριτήριο ευστάθειας των Jury-Blanchard

Γραμμή	z^0	z^1	z^2	z^3
1	K	0.2b	b+0.2	1
2	1	b+0.2	0.2b	K
3	K^2-1	0.2bK-b-0.2	Kb+0.2K-0.2b	
4	Kb+0.2K-0.2b	0.2bK-b-0.2	K^2-1	

Απαιτείται να ισχύουν οι ανισότητες

$$\psi(1) = z(z+0.2)(z+b)+K\Big|_{z=1} = 1.2(1+b)+K > 0 \qquad (1)$$

$$(-1)^3\psi(-1) = -0.8(b-1)-K > 0 \qquad (2)$$

$$|K| < 1 \qquad (3)$$

$$|K^2-1| > |Kb+0.2K-0.2b| \qquad (4)$$

Στη συνέχεια επιλύεται το θέμα για

b=0.5

Από την (1) προκύπτει

$$-1.8 < K \qquad (5)$$

Από την (2) προκύπτει

$$K<0.4 \qquad (6)$$

Από την (3) προκύπτει

$$-1 < K < 1 \qquad (7)$$

Από την (4) λαμβάνοντας υπόψη και την (7) λαμβάνονται οι ακόλουθες σχέσεις

Εάν

$$Kb+0.2K-0.2b = 0.7K-0.1 > 0$$

ή ισοδύναμα

$$0.1429 < K \qquad (8.\alpha)$$

θα είναι

$$1-K^2 > 0.7K-0.1$$

ή ισοδύναμα

$$K^2+0.7K-1.1 < 0$$

η οποία αληθεύει για

$$-1.4557 < K < 0.7557 \quad (8.\beta)$$

Οι σχέσεις (8.α) και (8.β) συναληθεύουν για

$$0.1429 < K < 0.7557 \quad (9.\alpha)$$

Εάν

$$Kb + 0.2K - 0.2b = 0.7K - 0.1 < 0$$

ή ισοδύναμα

$$K < 0.1429 \quad (8.\gamma)$$

θα είναι

$$1 - K^2 > -0.7K + 0.1$$

ή ισοδύναμα

$$K^2 - 0.7K - 0.9 < 0$$

η οποία αληθεύει για

$$-0.6612 < K < 1.3612 \quad (8.\delta)$$

Οι σχέσεις (8.γ) και (8.δ) συναληθεύουν για

$$-0.6612 < K < 0.1429 \quad (9.\alpha)$$

Επομένως η σχέση (4) αληθεύει για

$$-0.6612 < K < 0.7557 \quad (10)$$

Επομένως οι σχέσεις (1) έως (4) συναληθεύουν για

$$-0.6612 < K < 0.4 \quad (11)$$

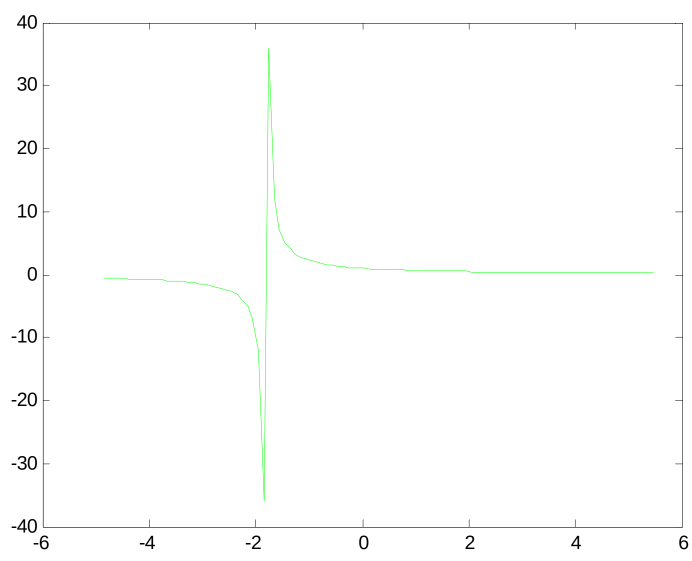
Η βέλτιστη τιμή του K θα είναι

$$K_{opt} = 0.4 - \varepsilon$$

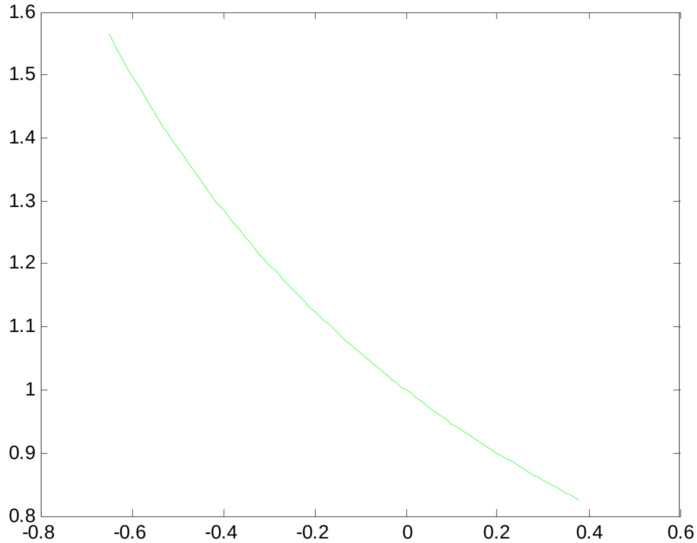
όπου ε>0 μπορεί να ληφθεί απεριόριστα μικρό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όπως φαίνεται και από το κατωτέρω σχήμα, η συνάρτηση του σφάλματος εμφανίζει ασυνέχεια για την τιμή K=-1.8 και καθώς είναι παντού φθίνουσα θα ήταν δυνατόν το σφάλμα για αρνητικά K να είναι μικρότερο του σφάλματος για θετικά K.



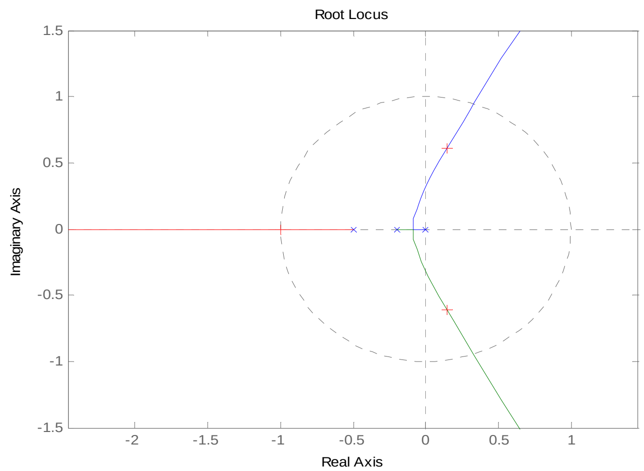
Επειδή το σφάλμα ενδιαφέρει μόνο όταν το σύστημα είναι ευσταθές και στο ακόλουθο σχήμα εξετάζεται η περίπτωση που το K οδηγεί σε ευσταθές σύστημα κλειστού βρόχου, εξάγεται το συμπέρασμα ότι το σφάλμα μειώνεται όσο αυξάνει το K και συνεπώς η τιμή K=0.4-ε οδηγεί στο ελάχιστο σφάλμα.



Για τα διάφορα N_2 θα είναι

N_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_{opt}	0.8-ε	0.72-ε	0.64-ε	0.56-ε	0.48-ε	0.4-ε	0.32-ε	0.24-ε	0.16-ε	0.08-ε

Για να γίνει κατανοητό τι συμβαίνει στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ο γεωμετρικός τόπος των ριζών της G(z). Για K=0.4 ο ένας πόλος του αντισταθμισμένου συστήματος βρίσκεται στο σημείο -1 ενώ οι άλλοι δύο είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Αυτή είναι και η οριακή τιμή για την ασυμπτωτική ευστάθεια του αντισταθμισμένου συστήματος



Για το όριο της εξόδου θα ισχύει

$$\lim_{k\to\infty}\left\{y(k)/K\right\} = \lim_{z\to1}\left\{(1-z^{-1})Y(z)/K\right\} = \lim_{z\to1}\left\{H(z)/K\right\} = \frac{1}{1.2*1.5+K_{opt}} = \frac{1}{2.2-\varepsilon} \approx 0.4545$$

Για τα διάφορα N_2 θα είναι

N_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
e_{ss}	0.5	0.4902	0.4808	0.4717	0.4630	0.4545	0.4464	0.4386	0.4310	0.4237

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2008)

Για το σύστημα διακριτού χρόνου

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+N_0 \end{bmatrix} u(k) \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου N_0 είναι το τελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας, είναι επιθυμητό

$$\underline{x}(5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 24 \end{bmatrix}$$

1. Να εξεταστεί εάν είναι δυνατόν να επιτευχθεί αυτή η κατάσταση με u(2)=u(0)=0.
2. Να προσδιοριστεί η τιμή της u(1)
   (Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

Κανένα	0.1	0.2	0.3	0.3333	0.35	0.375	0.4	0.4286	0.45

0.5	0.6	0.75	0.8	0.9	1	1.5	2	3	5

Λύση

Εάν θεωρηθεί

$$b=1+N_0$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι η αρχική συνθήκη είναι μηδενική, θα είναι

$$\underline{x}(5) = A^5\underline{x}(0) + A^4Bu(0) + A^3Bu(1) + A^2Bu(2) + ABu(3) + Bu(4) =$$

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(4) \\ u(3) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 2b & 2^2 b & 2^3 b & 2^4 b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(4) \\ u(3) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Καθώς απαιτείται

$$u(2)=u(0)=0,$$

το δεδομένο διάνυσμα θα επιτυγχάνεται μόνο εάν το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & 2b & 2^3 b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(4) \\ u(3) \\ u(1) \end{bmatrix}$$

έχει λύση. Επειδή

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & 2b & 2^3 b \end{bmatrix} = -2^3 b \neq 0$$

το ανωτέρω σύστημα έχει ως λύση το διάνυσμα

$$u(4) = 2$$

$$u(3) = -1$$

$$u(1) = \frac{24}{2^3 b} = \frac{3}{1+N_0}$$

Κατόπιν τούτου οι σωστές απαντήσεις είναι ως εξής

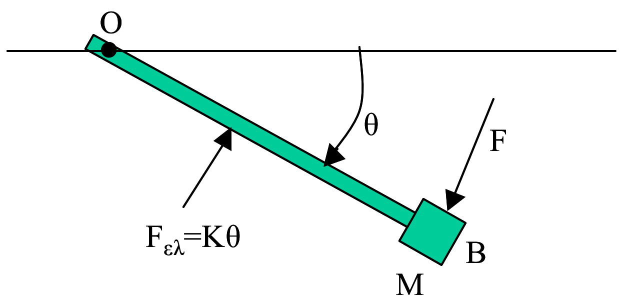
N_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u(1)	3	1.5	1	0.75	0.6	0.5	0.4286	0.375	0.3333	0.3

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Αξίζει να προσεχθεί ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο επειδή η μήτρα

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & 2b & 2^2 b \end{bmatrix}$$

είναι ομαλή. Όμως το διάνυσμα $\underline{x}(5)$ δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί εάν απαιτηθεί η u(4) ή η u(3) να είναι μηδενική.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2008)



Μάζα M είναι στερεωμένη στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους L και περιστρέφεται ως προς το σταθερό άλλο άκρο O της ράβδου επάνω σε οριζόντιο επίπεδο. O συντελεστής δυναμικής τριβής μεταξύ της μάζας και του επιπέδου είναι B. Επι της μάζας δρά δύναμη F η οποία είναι πάντοτε κάθετη στη ράβδο. Σε απόσταση

$$L_1 = 0.05*(1+N_1)*L$$

από το O, όπου N_1 είναι το προτελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας, δρά επί της ράβδου δύναμη από ελατήριο, κάθετη στη ράβδο με μέτρο ίσο προς K*θ, όπως στο σχήμα. Η ροπή αδρανείας της μάζας ως προς το σημείο O είναι ίση προς

$$J = M*L^2$$

Δίδονται οι τιμές των στοιχείων σε μονάδες του MKSA συστήματος ως εξής:
K=100, B=1, L=5, J=8. Για τις εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος ως προς το διάνυσμα

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

η μήτρα έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Να προσδιοριστεί ο λόγος

$$\boxed{\frac{a_{21}}{a_{22}} =}$$

Λύση

Καθώς η γωνία θ λαμβάνεται κατά την ωρολογιακή φορά, θα είναι

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=\sum_i M_i$$

όπου M_i οι ροπές που εφαρμόζονται στο σύστημα και λαμβάνονται σαν θετικές οι ροπές που έχουν ωρολογιακή φορά.
Η δύναμη F εφαρμόζει ωρολογιακή ροπή ίση με

$$M_1=F*L$$

Η δύναμη του ελατηρίου εφαρμόζει ανθωρολογιακή ροπή με τιμή

$$M_2=-F_{\varepsilon\lambda}*L_1=-K*\theta*0.05*(1+N_1)*L$$

Η δύναμη της τριβής εφαρμόζει ανθωρολογιακή ροπή με τιμή

$$M_3=-B*v*L=-B*L^2*\frac{d\theta}{dt}$$

Η εξίσωση κινήσεως θα είναι

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=F*L-K*\theta*0.05*(1+N_1)*L-B*L^2\frac{d\theta}{dt}$$

Οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς το διάνυσμα x θα είναι

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \dfrac{-K*0.05*(1+N_1)*L}{J} & \dfrac{-B*L^2}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{L}{J}\end{bmatrix}F$$

Συνεπώς

$$\frac{a_{21}}{a_{22}}=\frac{\dfrac{-K*0.05*(1+N_1)*L}{J}}{\dfrac{-B*L^2}{J}}=\frac{K*0.05*(1+N_1)}{B*L}=\frac{100*0.05*(1+N_1)}{1*5}=1+N_1$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2008)

Έστω ότι ένα σύστημα έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\psi(s)=s^3+(K+7)s^2+(4K+17)s+(3K+15)$$

Να σημειώσετε ποιό από τα παρακάτω διαστήματα αποτελεί το σύνολο των τιμών του K για τις οποίες όλες οι ρίζες του πολυωνύμου έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του -2.

(0,1)	(2,3)	(3,4)	(2,4)	(1,3)	(2,5)	Κανένα από τα προηγούμενα
X						

Λύση

Θέτοντας

$$s = -2 + \hat{s}$$

προκύπτει το πολυώνυμο

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\hat{s}) &= \psi(\hat{s}-2) = (\hat{s}-2)^3 + (K+7)(\hat{s}-2)^2 + (4K+17)(\hat{s}-2) + (3K+15) = \\ &= \hat{s}^3 - 6\hat{s}^2 + 12\hat{s} - 8 + K\hat{s}^2 - 4K\hat{s} + 4K + 7\hat{s}^2 - 28\hat{s} + 28 + 4K\hat{s} - 8K + 17\hat{s} - 34 + 3K + 15 = \\ &= \hat{s}^3 + (K+1)\hat{s}^2 + \hat{s} + 1 - K\end{aligned}$$

Εάν το $\hat{\psi}(\hat{s})$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, οι ρίζες του ψ(s) θα έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του -2. Εφαρμόζεται η διάταξη Routh

s^3	1	1
s^2	K+1	1-K
s	$\frac{K+1-1+K}{K+1} = \frac{2K}{K+1}$	
s^0	1-K	

Επεισή το πρώτο στοιχείο της πρώτης στήλης είναι θετικό, πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$K+1>0$$

$$2K>0$$

$$1-K>0$$

Οι ανισότητες συναληθεύουν στο διάστημα

$$0<K<1$$

(Σημειώνεται το πρώτο τετράγωνο από όλους τους σπουδαστές).