Ε.Μ.Π. ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ: Σ. Ε. Ρ.
ΜΑΘΗΜΑ: Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο
ΕΞΑΜΗΝΟ: 5^{ο}
ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ: Τ. Γ. Κουσιουρής
Γ.Π. Παπαβασιλόπουλος
Γ. Ρηγάτος
ΠΕΡΙΟΔΟΣ: Φεβρουαρίου
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 10/3/2009

Αριθμός Μητρώου	Ονοματεπώνυμο

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

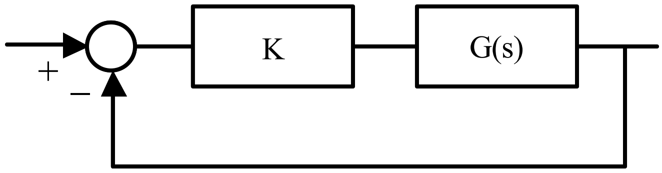
ΘΕΜΑ	**Βαθμολογία**	**Βαθμός Σπουδαστή**
ΘΕΜΑ 1.1	**1**	
ΘΕΜΑ 1.2	**0.5**	
ΘΕΜΑ 2.1	**0.5**	
ΘΕΜΑ 2.2	**0.5**	
ΘΕΜΑ 2.3	**0.5**	
ΘΕΜΑ 2.4	**0.5**	
ΘΕΜΑ 3.1	**0.4**	
ΘΕΜΑ 3.2	**0.4**	
ΘΕΜΑ 3.3	**0.5**	
ΘΕΜΑ 3.4	**0.5**	
ΘΕΜΑ 3.5	**0.7**	
ΘΕΜΑ 4.1	**0.8**	
ΘΕΜΑ 4.2	**0.5**	
ΘΕΜΑ 4.3	**0.7**	
ΘΕΜΑ 5.1	**0.5**	
ΘΕΜΑ 5.2	**1**	
ΘΕΜΑ 5.3	**0.5**	
ΣΥΝΟΛΟ	**10**	

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι λύσεις των θεμάτων της εξέτασης στο μάθημα «Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο». Οι λύσεις είναι γενικές, ώστε να ισχύουν για όλες τις περιπτώσεις των διαφορετικών αριθμών Μητρώου. Επίσης δίδονται περισσότερες από μία λύσεις σε κάθε πρόβλημα για να δειχθεί ο πλουραλισμός στη λύση τους. Τέλος περιέχονται παρατηρήσεις για λάθη τα οποία έγιναν, ώστε να μην επαναληφθούν σε μελλοντικές εξετάσεις.

Τρύφων Κουσιουρής

ΘΕΜΑ 1ο

Για το σύστημα κλειστού βρόχου του σχήματος δίδεται ότι



$$G(s) = \frac{s+b}{s^2(s+5)(s+1+N_2)} \quad \text{με} \quad b \neq 0$$

όπου N_2 είναι το τρίτο από το τέλος ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας. Η περιοχή μεταβολής του K για τα οποία το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές είναι

$$0 < K < 20\,.$$

1. Να προσδιοριστεί η τιμή του b

(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

0.05	0.12	0.23	0.28	0.67	1.02	1.56	1.87	1.98	2.30
2.56	2.65	2.78	2.84	2.96	3.02	3.11	3.16	3.24	Κανένα

2. Να προσδιοριστεί η κρίσιμη κυκλική συχνότητα ω_c στην οποία το σύστημα κλειστού βρόχου μεταβαίνει από την ευστάθεια σε αστάθεια.

(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

1.91	1.83	1.75	1.69	1.62	1.58	1.55	1.53	1.49	1.45
1.41	1.37	1.35	1.29	1.24	1.22	1.20	1.17	1.15	Κανένα

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι εάν τεθεί

$$a = N_2 + 1$$

ως ακολούθως

$$p(s) = s^2(s+5)(s+1+N_2) + K(s+b) = s^4 + (5+a)s^3 + 5as^2 + Ks + Kb$$

Εφαρμόζεται η διάταξη Routh

s^4	1	5a	Kb
s^3	5+a	K	0
s^2	$\dfrac{(5+a)5a-K}{(5+a)}$	Kb	
s	$\dfrac{\dfrac{[(5+a)5a-K]K-Kb(5+a)^2}{(5+a)}}{\dfrac{(5+a)5a-K}{(5+a)}}$		
s^0	Kb		

Για να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές το σύστημα θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες, δεδομένου ότι 1>0 και 5+a>0

$$(5+a)5a - K = 5a^2 + 25a - K > 0$$

$$[(5+a)5a - K]K - Kb(5+a)^2 > 0$$

$$Kb>0$$

Για K=0 και K=20 το σύστημα μεταβαίνει από την ευστάθεια στην αστάθεια. Αυτό σημαίνει ότι για τις τιμές αυτές μία πραγματική ρίζα ή δύο μιγαδικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου διασχίζουν το φανταστικό άξονα

Για K=0 το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα στο s=0. Καθώς b≠0, το σύστημα θα έχει διπλό πόλο στο 0 ο οποίος εμφανίζεται στην G(s) και συνεπώς θα είναι ασταθές.

Για K=20 το σύστημα κλειστού βρόχου πρέπει να έχει φανταστικούς πόλους ή ισοδύναμα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο φανταστικές ρίζες. Συνεπώς ο όρος που αντιστοιχεί στη γραμμή s της διάταξης Routh πρέπει να μηδενίζεται, δηλαδή

$$[(5+a)5a - K]K - Kb(5+a)^2 = [(5+a)5a - 20]20 - 20b(5+a)^2 = 0$$

ή ισοδύναμα

$$b = \frac{5a^2 + 25a - 20}{(5+a)^2}$$

Αντικαθιστώντας τη γραμμή με τους συντελεστές της παραγώγου του βοηθητικού πολυωνύμου, λαμβάνεται η ακόλουθη διάταξη Routh

s^4	1	5a	20b
s^3	5+a	20	0
s^2	$\frac{(5+a)5a-20}{(5+a)}$	20b	
s	$2\frac{(5+a)5a-20}{(5+a)}$	0	
s^0	20b		

Για b>0 δεν υπάρχουν αλλαγές στην πρώτη στήλη της διάταξης Routh και συνεπώς οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου θα είναι επάνω στο φανταστικό άξονα. Το βοηθητικό πολυώνυμο θα είναι

$$B(s) = \frac{(5+a)5a - 20}{(5+a)} s^2 + 20b$$

οπότε η κρίσιμη κυκλική συχνότητα θα είναι

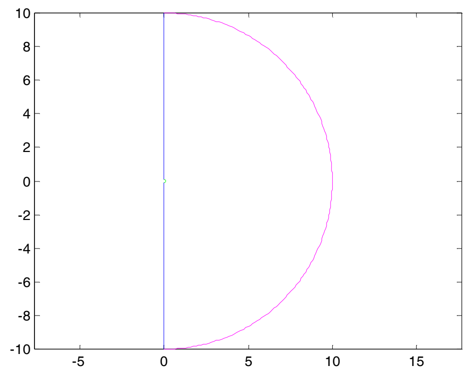
$$\omega_c^2 = \frac{20b(5+a)}{5a^2 + 25a - 20} = \frac{20}{5+a}$$

Ανάλογα με το N_2 τα αποτελέσματα είναι ως εξής

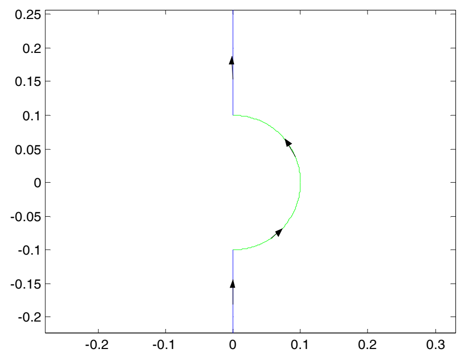
N_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	0.28	1.02	1.56	1.98	2.30	2.56	2.78	2.96	3.11	3.24
ω_c	1.83	1.69	1.58	1.49	1.41	1.35	1.29	1.24	1.20	1.15

$2^{ος}$ Τρόπος λύσεως

Για τη λύση του προβλήματος μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Nyquist. Εάν θεωρηθεί η κλειστή διαδρομή του κατωτέρω σχήματος (α) με παράκαμψη της αρχής των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα (β),

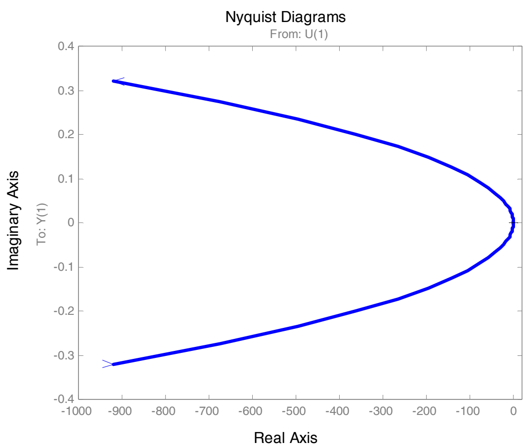


Σχήμα α.

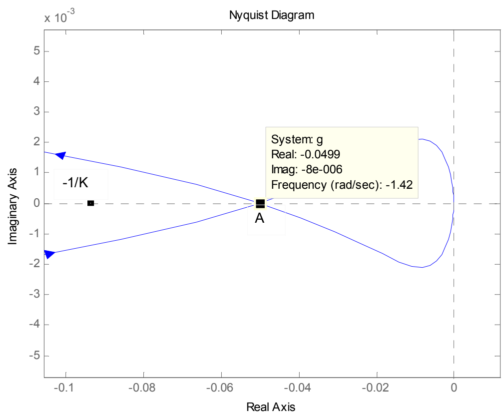


Σχήμα β.

το διάγραμμα Nyquist της G(s) θα είναι όπως στο σχήμα (γ) συμπληρωμένο με την επ' άπειρο περιφέρεια από τη γωνία 180^{o} –ε έως -180^{o} +ε, ε>0. Στο Σχήμα (δ) φαίνεται λεπτομέρεια του διαγράμματος στην περιοχή της αρχής των αξόνων.



Σχήμα γ.



Σχήμα δ.

Καθώς το σύστημα ανοικτού βρόχου δεν έχει πόλους εντός του περιγράμματος D, το σύστημα κλειστού βρόχου θα είναι ευσταθές εάν το -1/K είναι αριστερά του σημείου τομής A του διαγράμματος Nyquist με τον αρνητικό πραγματικό άξονα. Δεδομένου ότι το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές μόνο στην περιοχή 0<K<20, η τετμημένη του σημείου A θα είναι ίση με -1/20=-0.05. Η κρίσιμη κυκλική συχνότητα θα είναι η κυκλική συχνότητα η οποία αντιστοιχεί στο σημείο A. Θα είναι

$$G(j\omega)=\frac{j\omega+b}{(j\omega)^2(j\omega+5)(j\omega+a)}=-\frac{(j\omega+b)(5-j\omega)(a\text{-}j\omega)}{\omega^2(\omega^2+25)(\omega^2+a^2)}=$$

$$=\frac{-5ba-5\omega^2+b\omega^2-a\omega^2}{\omega^2(\omega^2+25)(\omega^2+a^2)}+j\frac{5b\omega-5a\omega+ab\omega+\omega^3}{\omega^2(\omega^2+25)(\omega^2+a^2)}=X+jY$$

Θέτοντας

$$Y=0$$

και δεδομένου ότι για ω=0 η εικόνα είναι στο άπειρο, λαμβάνεται

$$\omega^2=5a-5b-ab$$

Αντικαθιστώντας το ω^2 στο X, λαμβάνεται

$$X=\frac{-5ba-5\omega^2+b\omega^2-a\omega^2}{\omega^2(\omega^2+25)(\omega^2+a^2)}=\frac{-5ba+\left[b-a-5\right](5a-5b-ab)}{(5a-5b-ab)\left[5a-5b-ab+25\right]\left[5a-5b-ab+a^2\right](\omega^2+25)(\omega^2+a^2)}=$$

$$=\frac{1}{(5+a)(5b-5a+ab)}=-\frac{1}{20}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$b=\frac{5a^2+25a-20}{(5+a)^2}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του b στο ω^2 λαμβάνεται

$$\omega_c^2=5a-b(5+a)=5a-(5+a)\frac{5a^2+25a-20}{(5+a)^2}=\frac{20}{5+a}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟ ΛΑΘΟΣ

Πολλοί σπουδαστές μηδενίζουν το στοιχείο της πρώτης στήλης της διάταξης Routh που αντιστοιχεί στη γραμμή s ως εξής

$$[(5+a)5a-K]K-Kb(5+a)^2=0$$

ή ισοδύναμα

$$b=\frac{[(5+a)5a-K]}{(5+a)^2}$$

και αντικαθιστώντας τις ακραίες τιμές του K καταλήγουν στη σχέση

$$\frac{[(5+a)5a-20]}{(5+a)^2}<b<\frac{5a}{5+a}$$

Στη συνέχεια επιλέγουν μία ενδιάμεση τιμή του b και προσδιορίζουν την κρίσιμη κυκλική συχνότητα.

Η διαδικασία αυτή είναι λανθασμένη. Η περιοχή μεταβολής του K είναι

$$K_{min}=0<K<K_{max}=20$$

Το K_{min} προσδιορίζεται από την αλλαγή προσήμου μεταξύ της προτελευταίας και της τελευταίας γραμμής της διάταξης Routh. Το K_{max} προσδιορίζεται από το μηδενισμό της προτελευταίας γραμμής της διάταξης Routh και είναι οριακή περίπτωση δύο αλλαγών προσήμου μεταξύ των στοιχείων της πρώτης στήλης των γραμμών s^2, s και μεταξύ των στοιχείων της πρώτης στήλης των γραμμών s, s^0. Εκείνο το οποίο διαπράττουν οι σπουδαστές είναι ότι θεωρούν μεταβλητό το K_{max} στην ανωτέρω περιοχή η δε επιλογή του b καθορίζει ένα K_{max} στην περιοχή (0,20) διαφορετικό από αυτό που δίδεται (K_{max}=20).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2

Επροτάθη από σπουδαστή η χρήση του θεωρήματος του Kharitonov για τη λύση του προβλήματος. Αυτό δεν είναι σωστό για τους ακόλουθους λόγους.

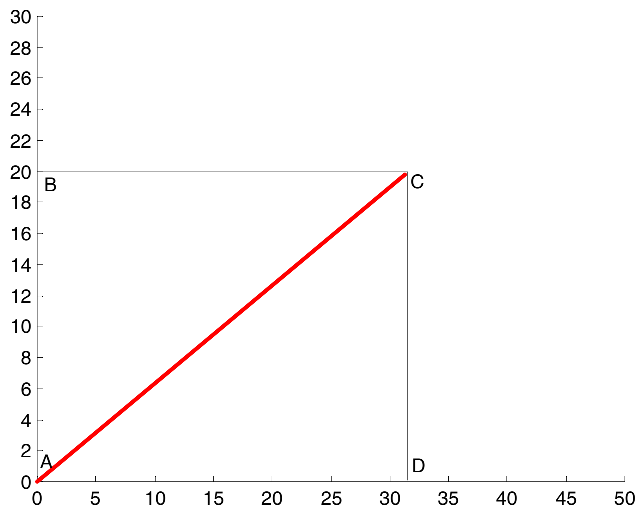
1. Στο θεώρημα οι συντελεστές μεταβάλλονται σε κλειστά διαστήματα ενώ στην προκείμενη περίπτωση το διάστημα μεταβολής του K είναι ανοικτό.

2. Οι συντελεστές μεταβάλλονται ανεξάρτητα στα διαστήματα. Στην περίπτωση αυτή οι μόνοι μεταβαλλόμενοι συντελεστές είναι ο συντελεστής του s και ο σταθερός όρος. Το θεώρημα του Kharitonov δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ευστάθεια των πολυωνύμων που οι συντελεστές τους του s και του s^0 βρίσκονται στο παραλληλόγραμμο ABCD του ακόλουθου σχήματος. Όμως, καθώς το b θεωρείται σταθερό, οι συντελεστές των πολυωνύμων που εξετάζονται ανήκουν στην ευθεία AC και δεν εξασφαλίζεται η ταύτιση των δύο απαντήσεων. Αυτό συμβαίνει στην προκείμενη περίπτωση, καθώς το πολυώνυμο Kharitonov

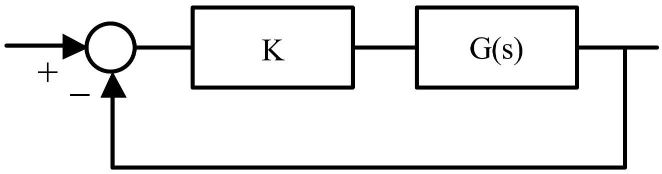
$$\overline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \overline{a}_4 s^4 = 20b + 5as^2 + (5+a)s^3 + s^4$$

είναι ασταθές, όπως προκύπτει από την ακόλουθη διάταξη Routh.

s^4	1	5a	20b
s^3	5+a	0	0
s^2	5a	20b	
s	$\dfrac{-20b(5+a)}{5a}$	0	
s^0	20b		



ΘΕΜΑ 2^{o}



Για τον Γεωμετρικό Τόπο των Ριζών της συνάρτησης μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+s+a}$$

με K>0 και

$$a = N_0+10$$

όπου N_0 το τελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας.

1. Να δειχθεί ότι τμήματα του γεωμετρικού τόπου είναι τόξα περιφέρειας με κέντρο το σημείο -3 της οποίας ζητείται να προσδιοριστεί η ακτίνα.
2. Να ευρεθούν τα τμήματα του πραγματικού άξονα που ανήκουν στον Γεωμετρικό Τόπο των Ριζών της G(s) και λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα (1) να σχεδιαστεί αυτός.
3. Να προσδιοριστεί η περιοχή μεταβολής του K ώστε η επί τοις εκατό υπερπήδηση να είναι μικρότερη του 20% για βηματική είσοδο.
4. Να προσδιοριστεί η περιοχή μεταβολής του K ώστε ο χρόνος κορυφής να είναι μικρότερος των 2sec για βηματική είσοδο.

Λύση

Ας θεωρηθεί

$$G(s) = \frac{s+b}{s^2+s+a}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$p(s) = s^2 + s + a + K(s+b) = s^2 + (1+K)s + a + Kb$$

Έστω x+jy μία ρίζα του p(s). Θα είναι

$$(x+jy)^2 + (1+K)(x+jy) + a + Kb = x^2 - y^2 + (1+K)x + a + Kb + j[2xy + (1+K)y] = 0$$

Εξισώνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος με το μηδέν λαμβάνονται οι σχέσεις

$$x^2 - y^2 + (1+K)x + a + Kb = 0$$
$$2xy + (1+K)y = 0$$

Από τη δεύτερη σχέση λαμβάνεται

$$y=0$$

που οδηγεί στα τμήματα του γεωμετρικού τόπου που βρίσκονται επάνω στον πραγματικό άξονα είτε

$$K = -2x - 1$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του Κ στην πρώτη σχέση, λαμβάνεται

$$x^2 - y^2 + (-2x)x + a + (-2x - 1)b = -x^2 - y^2 - 2xb + a - b = 0$$

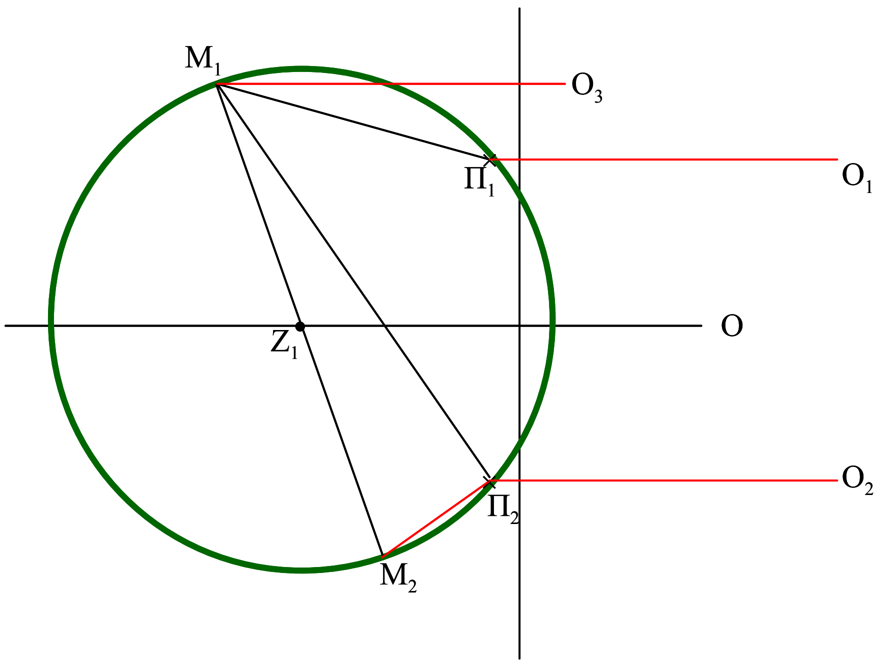
ή ισοδύναμα

$$(x + b)^2 + y^2 = b^2 + a - b$$

η οποία είναι η εξίσωση περιφέρειας με κέντρο το σημείο –b, δηλαδή το –3 και ακτίνα

$$R = \sqrt{b^2 + a - b} = \sqrt{6 + a}$$

$2^{ος}$ Τρόπος λύσεως



Έστω M_1 σημείο του Γεωμετρικού τόπου των Ριζών. Θα είναι

$$\text{Γωνία }(OZ_1M_1) - \text{Γωνία }(O_1\Pi_1M_1) - \text{Γωνία }(O_2\Pi_2M_1) = -180^o$$

Καθώς

$$\text{Γωνία }(O_3M_1Z_1) = 180^o - \text{Γωνία }(OZ_1M_1)$$

$$\text{Γωνία }(O_3M_1\Pi_1) = 180^o - \text{Γωνία }(O_1\Pi_1M_1)$$

$$\text{Γωνία }(O_3M_1\Pi_2) = 180^o - \text{Γωνία }(O_2\Pi_2M_1)$$

θα είναι

$$\text{Γωνία }(O_3M_1Z_1) = \text{Γωνία }(O_3M_1\Pi_1) + \text{Γωνία }(O_3M_1\Pi_2)$$

ή ισοδύναμα

$$\text{Γωνία }(O_3M_1\Pi_1) = \text{Γωνία}(Z_1M_1\Pi_2)$$

Κατασκευάζεται η $M_2\Pi_2$ κάθετος στην $M_1\Pi_2$ και έστω M_2 το σημείο τομής της με την προέκταση της M_1Z_1.
Το τετράπλευρο $M_1\Pi_1\Pi_2M_2$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο καθώς για τις απέναντι γωνίες του ισχύει

Γωνία $(\Pi_2 M_2 M_1)$+Γωνία$(M_1\Pi_1\Pi_2)=90^o$ - Γωνία$(Z_1 M_1 \Pi_2)$ $+90^o$ + Γωνία $(O_3 M_1 \Pi_1)=180^o$

Το M_1M_2 είναι διάμετρος του κύκλου επειδή η γωνία $M_2\Pi_2M_1$ είναι ορθή.
Ο κύκλος διέρχεται από τα γνωστά σημεία Π_1, Π_2 και το κέντρο του θα ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$. Καθώς το σημείο Z_1 είναι το σημείο τομής της M_1M_2 και της μεσοκαθέτου του μήματος $\Pi_1\Pi_2$ θα είναι το κέντρο του κύκλου και η πρόταση αποδείχτηκε.
Η ακτίνα του κύκλου θα είναι

$$R=Z_1\Pi_1$$

Καθώς

$$\Pi_1 = \frac{-1+j\sqrt{4a-1}}{2}$$

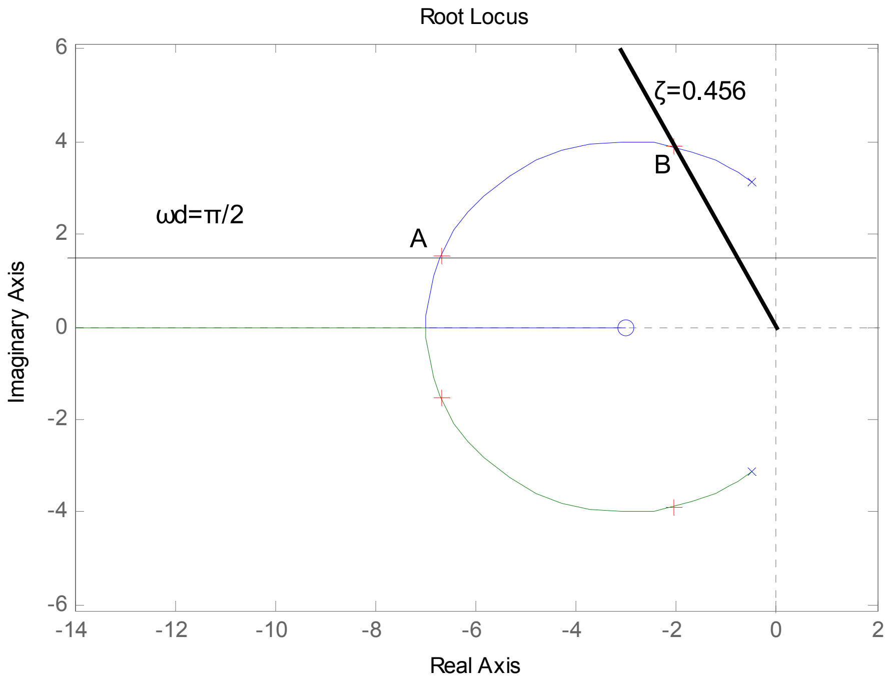
$$Z_1=-3+j0$$

θα είναι

$$R = Z_1\Pi_1 = \sqrt{\left(-3-\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{4a-1}}{2}\right)^2} = \sqrt{6.25+\frac{4a-1}{4}} = \sqrt{a+6}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Η ακτίνα του κύκλου μπορεί να προσδιοριστεί ανεξάρτητα από την απόδειξη της μορφής του γεωμετρικού τόπου τη στιγμή που είναι γνωστό το κέντρο και ένα σημείο επάνω στην περιφέρεια (το Π_1 ή το Π_2).
Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί σαν σημείο της περιφέρειας το σημείο θλάσης του γεωμετρικού τόπου

2. Τα τμήματα του πραγματικού άξονα που είναι τμήματα του γεωμετρικού τόπου έχουν εκ δεξιών τους περιττό αριθμό πόλων και μηδενικών του συστήματος ανοικτού βρόχου. Συνεπώς τμήμα του γεωμετρικού τόπου είναι το διάστημα
$(-\infty,-3]$
Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα για $N_0=0$.



3. Η επί τοις εκατό υπερπήδηση για σύστημα με δύο πόλους χωρίς μηδενικό δίνεται από τη σχέση

$$M_p = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) < 0.2$$

Για επικρατούντες πόλους η τελευταία σχέση δίνει

$$\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} < \ln(0.2) = -1.61$$

ή ισοδύναμα

$$\zeta > \sqrt{\frac{1.61^2}{1.61^2 + \pi^2}} = \sqrt{0.208} = 0.456$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου γίνεται

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + (1+K)s + a + 3K$$

από την οποία προκύπτει

$$\zeta = \frac{1+K}{2\sqrt{a+3K}} > 0.456$$

Καθώς το K είναι θετικό, από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$(1+K)^2 > 4 * 0.208 * (a+3K)$$

ή ισοδύναμα

$$K^2 - 0.496K + 1 - 0.832a > 0$$

Επειδή το K είναι θετικό και οι ρίζες του τριωνύμου είναι

$$K_{1,2} = \frac{0.496 \pm \sqrt{0.496^2 - 4(1 - 0.832a)}}{2}$$

η προδιαγραφή θα ισχύει όταν

$$K > \frac{0.496 + \sqrt{0.496^2 - 4(1 - 0.832a)}}{2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Η λύση μπορεί να δοθεί και γραφικά υπολογίζοντας το K που αντιστοιχεί στο σημείο Β του γεωμετρικού τόπου των ριζών (η μαύρη ευθεία αντιστοιχεί σε ζ=0.456).

Για τα διάφορα a οι τιμές είναι όπως στον ακόλουθο πίνακα.

N_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K>	2.96	3.11	3.26	3.39	3.52	3.65	3.77	3.88	3.99	4.10

4. Για τον χρόνο κορυφής θα ισχύει

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a+3K}\sqrt{1-\left(\dfrac{1+K}{2\sqrt{a+3K}}\right)^2}} < 2$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 2.467 < \frac{4(a+3K)-(1+K)^2}{4}$$

ή ισοδύναμα

$$K^2 - 10K + 10.868 - 4a < 0$$

Καθώς οι ρίζες του τριωνύμου είναι ίσες με

$$K_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(10.868 - 4a)}}{2}$$

και το K είναι θετικό, η προδιαγραφή θα ισχύει για

$$0 < K < \frac{10 + \sqrt{100 - 4(10.868 - 4a)}}{2}$$

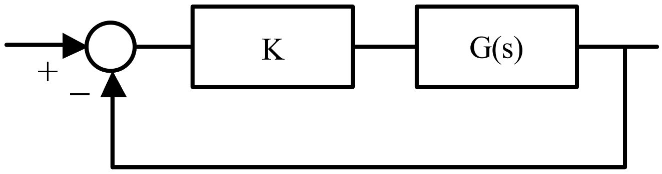
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Η λύση μπορεί να δοθεί και γραφικά υπολογίζοντας το K που αντιστοιχεί στο σημείο Α του γεωμετρικού τόπου των ριζών (η μαύρη ευθεία αντιστοιχεί σε ω_d=π/2).

Για τα διάφορα a οι τιμές είναι όπως στον ακόλουθο πίνακα.

N_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0<K<	12.36	12.62	12.88	`13.13	13.37	13.61	13.84	14.06	14.28	14.49

ΘΕΜΑ 3^{o}

Για το σύστημα κλειστού βρόχου του σχήματος δίδεται ότι



$$G(s)=\frac{50(s+1)}{(s-1)(s+N_1+3)}$$

όπου N_1 είναι το προτελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας.

1) Να προσδιοριστούν τα σημεία τομής της G(jω) με τον πραγματικό άξονα
2) Να προσδιοριστούν τα σημεία τομής της G(jω) με το φανταστικό άξονα
3) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist της G(s).
4) Εάν εφαρμοστεί ο έλεγχος του Σχήματος, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Nyquist να ευρεθεί για ποιές τιμές του K το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές
5) Εάν έχει ληφθεί ονομαστική τιμή του κέρδους

$$K=2$$

να προσδιοριστούν τα όρια μεταβολής
   - του περιθωρίου κέρδους.
   - του περιθωρίου φάσης.

Λύση

Ας τεθεί

$$a=N_1+3$$

Η G(s) για s=jω λαμβάνει τη μορφή

$$G(j\omega)=\frac{50(j\omega+1)}{(j\omega-1)(j\omega+a)}=\frac{50(j\omega+1)(-j\omega-1)(-j\omega+a)}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)}=\frac{-50(1-\omega^2+2j\omega)(a-j\omega)}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)}=$$

$$=\frac{-50[a(1-\omega^2)+2\omega^2]}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)}+j\frac{-50[2a\omega-\omega(1-\omega^2)]}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)}=X+jY$$

Για την εύρεση των σημείων τομής με τον πραγματικό άξονα τίθεται

$$Y=\frac{-50[2a\omega-\omega(1-\omega^2)]}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)}=\frac{-50\omega[2a-1+\omega^2]}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)}=0$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις τις

$$\omega=0$$

για την οποία προκύπτει

$$X = -50/a$$

και

$$\omega=\infty$$

για την οποία προκύπτει

$$X = 0$$

2. Για την εύρεση των σημείων τομής με τον φανταστικό άξονα τίθεται

$$X = \frac{-50[a(1-\omega^2)+2\omega^2]}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)} = \frac{-50[a+(2-a)\omega^2]}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)} = 0$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις τις

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{a-2}}$$

για την οποία προκύπτει

$$Y = \frac{-50\sqrt{\frac{a}{a-2}}\left[2a-\left(1-\frac{a}{a-2}\right)\right]}{\left(1+\frac{a}{a-2}\right)\left(a^2+\frac{a}{a-2}\right)} = \frac{-50\sqrt{\frac{a}{a-2}}\left[\frac{2(a-1)^2}{a-2}\right]}{2\left(\frac{a-1}{a-2}\right)a\left(\frac{(a-1)^2}{a-2}\right)} = \frac{-50}{a-1}\sqrt{\frac{a-2}{a}}$$

και

$$\omega=\infty$$

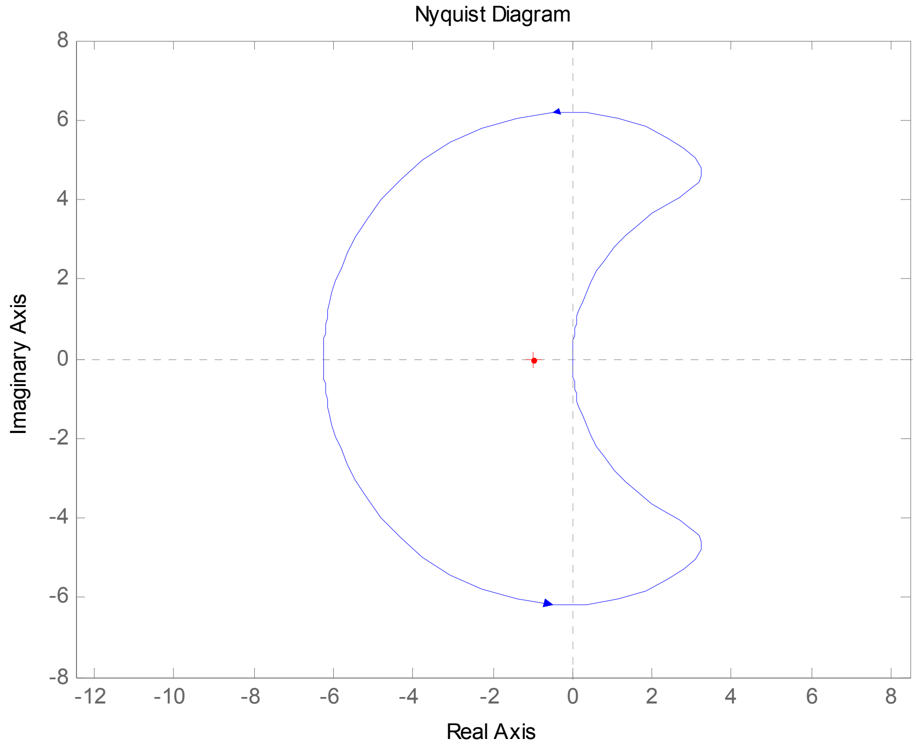
για την οποία προκύπτει

$$Y = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Πολλοί σπουδαστές επιλύουν τις εξισώσεις Re{G(jω)}=0 (αντίστοιχα Im{G(jω)}=0) αλλά δεν αντικαθιστούν τις λύσεις στο Im{G(jω)} (αντίστοιχα στο Re{G(jω)}) για να προσδιορίσουν τα σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα ((αντίστοιχα τον πραγματικό άξονα). Στην ουσία προσδιορίζουν τα ω στα οποία συμβαίνουν οι τομές αλλά όχι τις τομές οι οποίες είναι τα ζητούμενα.

3. Το διάγραμμα Nyquist της G(s) για N_1=5 φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα



4. Το σύστημα ανοικτού βρόχου έχει ένα ασταθή πόλο στο s=1. Από το ανωτέρω διάγραμμα Nyquist προκύπτουν τα ακόλουθα.

Εάν

$$-1/K<-50/a$$

ή ισοδύναμα

$$0 < K < \frac{a}{50}$$

ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων N του σημείου -1/K είναι ίσος με 0 και συνεπώς το σύστημα κλειστού βρόχου έχει

$$N_{cl} = N_{ol} + N = 1$$

ασταθή πόλο.
Εάν

$$-50/a<-1/K$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{a}{50} < K$$

ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων N του σημείου -1/K είναι ίσος με -1 και συνεπώς το σύστημα κλειστού βρόχου έχει

$$N_{cl} = N_{ol} + N = 0$$

ασταθείς πόλους, δηλαδή είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
Εάν

$$0<-1/K$$

ή ισοδύναμα

$$K < 0$$

ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων N του σημείου -1/K είναι ίσος με 0 και συνεπώς το σύστημα κλειστού βρόχου έχει

$$N_{cl} = N_{ol} + N = 1$$

ασταθή πόλο.
Επομένως το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν

$$\frac{a}{50} < K$$

5. Εάν η ονομαστική τιμή K_N του K είναι ίση με 2 το περιθώριο κέρδους g_m προς τα κάτω θα είναι

$$\frac{a}{50} = K_N g_m$$

οπότε

$$g_m = \frac{a}{100}$$

Το περιθώριο κέρδους προς τα πάνω είναι απεριόριστο.

Καθώς το K_N=2, το περιθώριο φάσεως θα ευρίσκεται από το όρισμα της G(jω) στην κυκλική συχνότητα ω_θ στην οποία τέμνει την περιφέρεια με κέντρο την αρχή και ακτίνα $1/K_N$=0.5
Θα είναι

$$\left|G(j\omega_\theta)\right| = \left|\frac{50(j\omega_\theta + 1)}{(j\omega_\theta - 1)(j\omega_\theta + a)}\right| = \frac{50}{\sqrt{\omega_\theta^2 + a^2}} = \frac{1}{2}$$

οπότε

$$\omega_\theta = \sqrt{100^2 - a^2}$$

Καθώς για την τιμή αυτή του ω το πραγματικό μέρος της G(jω) είναι θετικό, το όρισμα της G(jω) θα είναι

$$\varphi = \mathrm{Arg}\left\{G(j\omega)\right\} = \text{τοξεφ}\left\{\frac{\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]}{\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]}\right\} = \text{τοξεφ}\left\{\frac{\dfrac{-50[2a\omega - \omega(1-\omega^2)]}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)}}{\dfrac{-50[a(1-\omega^2)+2\omega^2]}{(1+\omega^2)(a^2+\omega^2)}}\right\} =$$

$$= \text{τοξεφ}\left\{\frac{[2a\omega_\theta - \omega_\theta(1-\omega_\theta^2)]}{[a(1-\omega_\theta^2)+2\omega_\theta^2]}\right\} = \text{τοξεφ}\left\{\frac{\sqrt{100^2-a^2}[2a-1+100^2-a^2]}{a+(2-a)(100^2-a^2)}\right\}$$

Το περιθώριο φάσεως θα είναι

$$\theta_m = 180^o + \varphi$$

Για τα διάφορα a οι τιμές είναι όπως στον ακόλουθο πίνακα.

N_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
θ_m	90.57°	91.15°	91.72°	92.29°	92.87°	93.44°	94.01°	94.59°	95.16°	95.74°

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η λύση μπορεί να δοθεί και γραφικά με τη χρήση μοιρογνωμονίου, σχεδιάζοντας τον κύκλο με κέντρο την αρχή και ακτίνα 0.5 και βρίσκοντας την τομή του με το διάγραμμα Nyquist.

ΘΕΜΑ 4^o

Δίδεται σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\underline{x}(k+1)=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}(k)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}(k) \qquad \underline{x}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα, η παρατηρησιμότητα και η ευστάθεια του συστήματος.
2. Είναι επιθυμητό το σύστημα να οδηγηθεί στην κατάσταση

   $$\underline{x}(M)=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Να προσδιοριστεί ο ελάχιστος αριθμός βημάτων M για να επιτευχθεί ο στόχος και η αντίστοιχη είσοδος. Εάν σαν κόστος της οδήγησης θεωρηθεί το

   $$J(M)=(N_1+1)u^2(0)+\sum_{i=1}^{M-1}u^2(i)$$

   όπου N_1 το προτελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, να ευρεθεί η τιμή του J.
3. Εάν ληφθεί M=3 (το σύστημα επιτυγχάνει το στόχο σε τρία βήματα), να προσδιοριστούν οι εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι είσοδοι u(0), u(1) και u(2) ώστε να επιτυγχάνεται ο στόχος και να ευρεθεί η είσοδος η οποία ελαχιστοποιεί το κριτήριο J(3).

Λύση

Η μήτρα ελεγξιμότητος θα είναι

$$P_c=\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Καθώς

$$\det(P_c)=\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=-1\neq 0$$

ο βαθμός της μήτρας ελεγξιμότητος είναι ίσος με την τάξη της περιγραφής και η περιγραφή είναι ελέγξιμη.
Η μήτρα παρατηρησιμότητος θα είναι

$$P_o=\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Καθώς

$$\det(P_o)=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}=1\neq 0$$

ο βαθμός της μήτρας παρατηρησιμότητος είναι ίσος με την τάξη της περιγραφής και η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής είναι

$$p(z)=\det(zI-A)=\det\begin{bmatrix} z-0.5 & -1 \\ 0.25 & z \end{bmatrix}=z^2-0.5z+0.25$$

και έχει ρίζες

$$z_{1,2}=\frac{0.5\pm\sqrt{0.5^2-4*0.25}}{2}=\frac{0.5\pm j\sqrt{0.75}}{2}$$

εντός του μοναδιαίου κύκλου αφού

$$\left|z_{1,2}\right|=\left|\frac{0.5\pm j\sqrt{0.75}}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

Επομένως η περιγραφή είναι ευσταθής.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ-ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟ ΛΑΘΟΣ
Πολλοί σπουδαστές χρησιμοποίησαν το θεώρημα Routh για να εξετάσουν την ευστάθεια της περιγραφής. Το κριτήριο Routh εφαρμόζεται για να ελεγχθεί εάν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο. Καθώς το σύστημα είναι διακριτού χρόνου, απαιτείται οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου να είναι στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Για τον έλεγχο της θέσης των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πρέπει να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο Jury. Η χρήση του κριτηρίου Routh μπορεί να γίνει μετά από απεικόνιση του εσωτερικού του μοναδιαίου κύκλου στο αριστερό ημιεπίπεδο μέσω της σύμμορφης απεικόνισης

$$z=\frac{1+s}{1-s}$$

δηλαδή εξετάζεται το πολυώνυμο

$$\psi(s)=(1-s)^2*p(z)\Big|_{z=\frac{1+s}{1-s}}=(1-s)^2\left[\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2-0.5\left(\frac{1+s}{1-s}\right)+0.25\right]=1.75s^2+1.5s+0.75$$

2. Καθώς

$$\underline{x}(1)=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}(0)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(0)$$

ο στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί σε ένα βήμα.
Καθώς

$$\underline{x}(2)=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}(1)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(1)=\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

οστόχος επιτυγχάνεται πάντα σε δύο βήματα. Η λύση είναι μοναδική και προκύπτει

$$u(0)=2$$

$$u(1)=1$$

Το κόστος της οδήγησης προκύπτει

$$J(2)=(N_1+1)u^2(0)+u^2(1)=25$$

Για τα διάφορα N_1 οι τιμές είναι όπως στον ακόλουθο πίνακα.

N_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
J(2)	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41

3. Εάν η μετάβαση γίνει σε τρία βήματα, θα είναι

$$\underline{x}(3)=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η λύση δεν είναι μοναδική. Εάν θεωρηθεί

$$u(0)=q$$

θα είναι

$$u(1)=2-0.5*q$$

$$u(2)=1+0.25*q$$

Το κόστος της οδήγησης θα είναι

$$J(3)=(N_1+1)u^2(0)+u^2(1)+u^2(2)=(N_1+1)q^2+(2-0.5q)^2+(1+0.25q)^2=(N_1+1.3125)q^2-1.5q+5$$

Για την ελαχιστοποίηση του κόστους πρέπει

$$\frac{dJ}{dq}=(2N_1+2.625)q-1.5=0$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$q=u(0)=\frac{1.5}{2N_1+2.625}$$

οπότε

$$u(1)=2-0.5*\frac{1.5}{2N_1+2.625}$$

$$u(2)=1+0.25*\frac{1.5}{2N_1+2.625}$$

Το ελάχιστο κόστος της οδήγησης θα είναι

$$J(3)=(N_1+1)\left[\frac{1.5}{2N_1+2.625}\right]^2+\left[2-0.5*\frac{1.5}{2N_1+2.625}\right]^2+\left[1+0.25*\frac{1.5}{2N_1+2.625}\right]^2$$

Για τα διάφορα N_1 οι τιμές είναι όπως στον ακόλουθο πίνακα.

N_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u(0)	0.5714	0.3243	0.2264	0.1739	0.1412	0.1188	0.1026	0.0902	0.0805	0.0727
u(1)	1.7143	1.8378	1.8868	1.9130	1.9294	1.9406	1.9487	1.9549	1.9597	1.9636
u(2)	1.1429	1.0811	1.0566	1.0435	1.0353	1.0297	1.0256	1.0226	1.0201	1.0182
J(3)	4.5714	4.7568	4.8302	4.8696	4.8941	4.9109	4.9231	4.9323	4.9396	4.9455

ΘΕΜΑ 5ο

Η εξίσωση κινήσεως εκκρεμούς δίδεται από τη σχέση

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\eta\mu\theta=0$$

1. Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς το διάνυσμα

$$x^T=\begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

   και να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.
2. Να ευρεθούν τα γραμμικοποιημένα μοντέλα του συστήματος στις περιοχές των δύο διαφορετικών σημείων ισορροπίας. Τί συμπεράσματα εξάγετε από την ευστάθεια ή την αστάθεια των ανωτέρω γραμμικών μοντέλων ως προς την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος;
3. Για το σημείο ισορροπίας όπου θ=0 να χρησιμοποιηθεί σαν συνάρτηση Lyapunov η

$$V(x)=0.5x_2^2+1-\sigma\upsilon\nu(x_1)$$

   Τί συμπέρασμα εξάγεται για την ευστάθεια ή την αστάθεια του σημείου αυτού ισορροπίας;

Λύση

1. Οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς το διάνυσμα που δίδεται θα είναι

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-\eta\mu(x_1)$$

Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τις λύσεις των εξισώσεων

$$x_2 = 0$$
$$\eta\mu(x_1) = 0$$

οι οποίες δίδουν

$$x_1 = n\pi, \quad n \text{ ακέραιος}$$
$$x_2 = 0$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι δύο είναι τα διαφορετικά σημεία ισορροπίας ως εξής

$$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$x_{e2} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Για τα γραμμικοποιημένα μοντέλα στα σημεία ισορροπίας θα ισχύει
Σημείο ισορροπίας x_{e1}

$$A_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma\upsilon\nu(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σημείο ισορροπίας x_{e2}

$$A_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=\pi \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma\upsilon\nu(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{\substack{x_1=\pi \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές της μήτρας A_1 είναι οι ρίζες του

$$p_1(s) = \det(sI - A_1) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 1$$

οι οποίες ευρίσκονται επάνω στο φανταστικό άξονα. Συνεπώς δεν μπορεί να εξαχθεί συμέρασμα για την ευστάθεια του μη γραμμικού συστήματος.
Οι ιδιοτιμές της μήτρας A_2 είναι οι ρίζες του

$$p_2(s) = \det(sI - A_2) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 1$$

Η μία ρίζα του $p_2(s)$ ευρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο και συνεπώς το γραμμικοποιημένο μοντέλο είναι ασταθές. Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο Lyapunov το σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος θα είναι ασταθές.

3. Στην περιοχή του σημείου ισορροπίας x_{1e} η V(x) είναι θετικά ορισμένη καθώς είναι θετική ή μηδέν και μηδενίζεται μόνο όταν x1=x2=0. Θα είναι

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = x_2 \eta\mu(x_1) + x_2[-\eta\mu(x_1)] = 0 \leq 0$$

Επειδή η dV/dt είναι αρνητικά ημιορισμένη και οι μερικές παράγωγοι $\partial V/\partial x_\iota$ είναι συνεχείς, το θεώρημα ευσταθείας της δεύτερης μεθόδου του Lyapunov ισχύει και το σημείο ισορροπίας θα είναι ευσταθές. Η ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας δεν μπορεί να συναχθεί από αυτή τη συνάρτηση Lyapunov (και δεν υπάρχει).