ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Τρύφων Κουσιουρής

Ακ. Έτος 2005-2006

ΜΑΡΤΙΟΣ 2005

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη θέρμανση ενός δωματίου είναι οι εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.7 & -35.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

όπου,

x_1: θερμοκρασία του δωματίου.

x_2: θερμοκρασία του θερμαντικού σώματος.

u: θερμοκρασία του υγρού που κυκλοφορεί στο θερμαντικό σώμα.

w: θερμοκρασία του περιβάλλοντος, η οποία θεωρείται σαν διαταραχή.

α) Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα της περιγραφής.

β) Αγνοώντας τη διαταραχή, να εκφραστεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου συναρτήσει του μετασχηματισμού Laplace της εισόδου και των αρχικών συνθηκών.

γ) Εάν σαν είσοδος θεωρηθεί η $u = r - K x_1$ να βρεθεί για ποιές τιμές του K το αντισταθμισμένο σύστημα παραμένει ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση

A) Η μήτρα ελεγξιμότητας είναι

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 24.5 \\ 35 & -1249.5 \end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_c)=2, η περιγραφή είναι ελέγξιμη.

Η μήτρα παρατηρησιμότητας είναι

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_o)=2, η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.

B) Θα είναι

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = A\underline{X}(s) + BU(s)$$

ή

$$\underline{X}(s) = [sI-A]^{-1}\underline{x}(0) + [sI-A]^{-1}BU(s)$$

και

$$Y(s) = C[sI-A]^{-1}\underline{x}(0) + C[sI-A]^{-1}BU(s)$$

Καθώς

$$[sI-A]^{-1}=\frac{1}{(s+1.4)(s+35.7)-0.7^2}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+37.1s+49.49}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}$$

$$Y(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{(s^2+37.1s+49.49}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}U(s)+\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s^2+37.1s+49.49}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$
$$=\frac{24.5}{(s^2+37.1s+49.49}U(s)+\frac{s+35.7}{s^2+37.1s+49.49}x_1(0)+\frac{0.7}{s^2+37.1s+49.49}x_2(0)$$

Γ) Εάν

$$u=r-Kx_1$$

οι εξισώσεις καταστάσεως γίνονται

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.7 & -35.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}\left(r-Kx_1\right)+\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}w=$$
$$=\begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.7-35K & -35.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}r+\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}w=$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής θα είναι

$$\psi_c(s)=\det[sI-A_c]=\det\begin{bmatrix} s+1.4 & -0.7 \\ 35K-0.7 & s+35.7 \end{bmatrix}=s^2+37.1s+49.49+24.5K$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^2	1	49.49+24.5K
s	37.1	
s^0	49.49+24.5K	

Για να παραμένει το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει

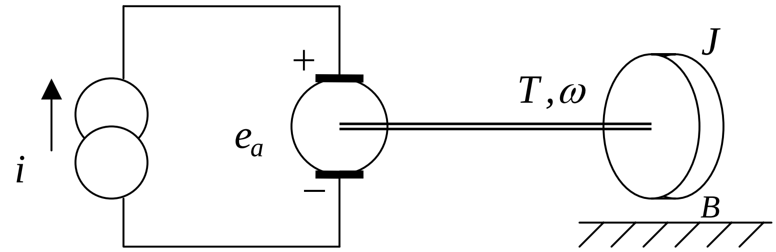
$$0<49.49+24.5K$$

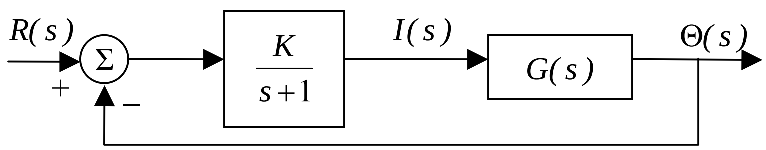
ή ισοδύναμα

$$-2.02<K$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)

Για τον κινητήρα του Σχήματος 2 (a), $T=1\,\text{Nm}\,\text{A}^{-1}\,\text{X}i$, $J=1\,\text{Kg}\,\text{m}^2$ και $B=2\,\text{Nm}\,\text{s}^{-1}$, ενώ μετράται η γωνία στροφής του άξονα του κινητήρα, θ.





Σχήμα 2: Κινητήρας συνεχούς ρεύματος με φορτίο, (α) συνδεσμολογία, (β) λειτουργικό διάγραμμα συστήματος κλειστού βρόχου.

α) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=\dfrac{Q(s)}{I(s)}$.

β) Στο σύστημα χρησιμοποιήθηκε ελεγκτής $K(s)=\dfrac{K}{(s+1)}$, όπως στο Σχήμα 2 (β). Με χρήση του θεωρήματος του Nyquist να προσδιοριστεί για ποιές τιμές του K το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές καθώς και το περιθώριο κέρδους. Για την κατασκευή του διαγράμματος Nyquist να δοθεί προσοχή:

1. Στο όριο του πραγματικού μέρους της εικόνας καθώς $\omega \to 0$.
2. Στο σημείο που το διάγραμμα τέμνει τον πραγματικό άξονα.
3. Στο όριο του ορίσματος της εικόνας του χωρίου καθώς $\omega \to \infty$.

γ) Ο συντελεστής τριβής B εξαρτάται από το ιξώδες του λιπαντικού λαδιού και μεταβάλλεται μεταξύ 1Nm/s και 4Nm/s . Για την οικογένεια των συστημάτων που προκύπτει εξετάζοντας τα σημεία τομής με τον αρνητικό πραγματικό άξονα να βρείτε:

1. Για ποιές τιμές του K όλα τα συστήματα που προκύπτουν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή.
2. Για ποιές τιμές του K όλα τα συστήματα που προκύπτουν είναι ασταθή.

δ) Εάν Ο είναι η αρχή των αξόνων, Α το σημείο $(-{}^{1}\!/_{K}, 0)$ του μιγαδικού επιπέδου και Μ η εικόνα του σημείου $j\omega_0=j\,1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ στό διάγραμμα Nyquist,

1. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{Q(s)}{R(s)}$, θα είναι

$$H(j\omega_0)=\frac{OM}{AM},$$

όπου OM, AM είναι μιγαδικοί αριθμοί.

2. Εάν K=1 και r(t)=0.1ημ(1t), να βρεθεί η θ(t) στη μόνιμη κατάσταση χρησιμοποιώντας το διάγραμμα Nyquist.

Λύση

Θα είναι

$$T = Ai(t) = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt}$$

Εφαρμόζοντας Μετασχηματισμό Laplace με μηδενικές αρχικές συνθήκες, λαμβάνεται

$$T(s) = AI(s) = \left(Js^2 + Bs\right)\Theta(s)$$

ή ισοδύναμα

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{I(s)}=\frac{\boldsymbol{A}}{Js^2 + Bs}$$

B) Θεωρώντας το K σαν μεταβλητό κέρδος του απευθείας δρόμου, η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου θα είναι

$$\widehat{G}(s)=\frac{1}{s+1}*\frac{A}{Js^2 + Bs} = \frac{A}{(s+1)(Js+B)s}$$

Για s=jω, θα είναι

$$\widehat{G}(j\omega)=\frac{A}{(j\omega+1)(Jj\omega+B)j\omega} = \frac{-A(\omega^2 B + \omega^2 J)}{(\omega^2+\omega^4)(J^2\omega^2+B^2)} + j\frac{A(\omega^3 J - \omega B)}{(\omega^2+\omega^4)(J^2\omega^2+B^2)} = X + jY$$

1. Καθώς ω→0

$$\lim_{\omega\to 0} X=\frac{-A(B+J)}{B^2}$$

$$\lim_{\omega\to 0} Y=\lim_{\omega\to 0}\frac{A(\omega^3 J - \omega B)}{(\omega^2+\omega^4)(J^2\omega^2+B^2)} = -\infty$$

2. Για το σημείο τομής με τον πραγματικό άξονα θα είναι Y=0 ή ισοδύναμα

$$\omega^3 J-\omega B=0$$

ή

$$\omega^2=B/J$$

Για την τιμή αυτή του ω το X γίνεται

$$X_c = \frac{-A(B+J)}{(1+B/J)(J^2B/J+B^2)} = \frac{-AJ}{B(J+B)}$$

Για το όρισμα της εικόνας θα είναι

$$\varphi = \text{τοξεφ}\frac{Y}{X} = \text{τοξεφ}\frac{A(\omega^3 J - \omega B)}{-A(\omega^2 B + \omega^2 J)}$$

και

$$\lim_{\omega\to\infty} \varphi = \lim_{\omega\to\infty} \text{τοξεφ}\frac{(\omega^3 J - \omega B)}{-(\omega^2 B + \omega^2 J)} = \lim_{\omega\to\infty} \text{τοξεφ}\frac{-\omega J}{B+J} = \text{τοξεφ}(-\infty)$$

Επειδή καθώς το ω τείνει στο άπειρο X<0 και Y>0, θα ισχύει

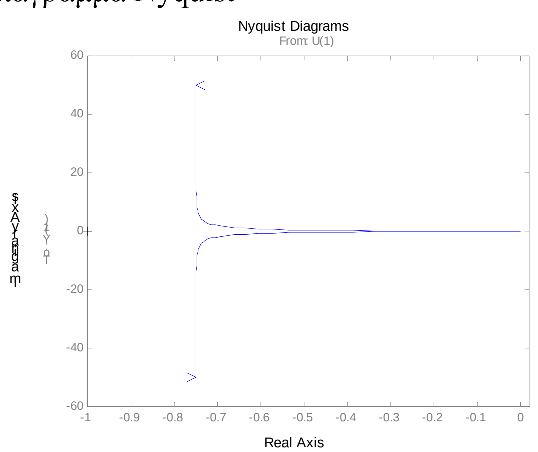
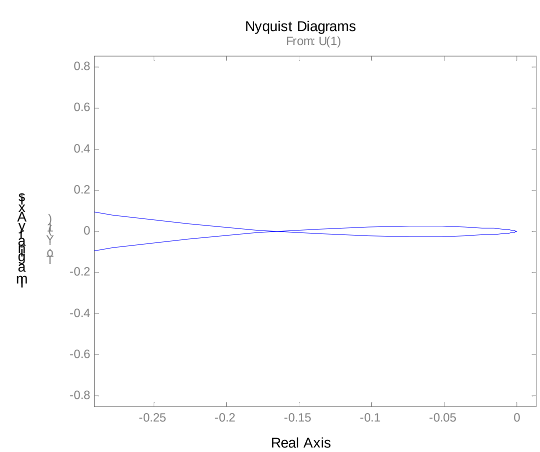
$$\lim_{\omega\to\infty} \varphi = -270^o$$

Για τις τιμές A=1, J=1 και B=2

$$\lim_{\omega\to 0} X = \frac{-A(B+J)}{B^2} = -0.75$$

$$X_c = \frac{-AJ}{B(J+B)} = -\frac{1}{6}$$

Το διάγραμμα Nyquist είναι όπως στο Σχήμα

Διάγραμμα Nyquist	Λεπτομέρεια Διαγράμματος Nyquist
	

Το περιθώριο κέρδους θα είναι

$$g_m = \frac{1}{|X_c|} = 6$$

Γ) Για την οικογένεια των συστημάτων που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του B, τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{-AJ}{B_{max}(J+B_{max})} \geq X_c \geq \frac{-AJ}{B_{min}(J+B_{min})}$$

θα είναι

$$\frac{-1*1}{4(1+4)} = \frac{-1}{20} \geq X_c \geq \frac{-1*1}{1(1+1)} = -\frac{1}{2}$$

Εάν -1/K<-1/2 ή ισοδύναμα

$$0<K<2$$

όλα τα συστήματα κλειστού βρόχου που προκύπτουν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή γιατί ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων του -1/K είναι ίσος με μηδέν και το σύστημα ανοικτού βρόχου δεν έχει πόλους εντός του χωρίου D.
Εάν -1/K>-1/20 ή ισοδύναμα

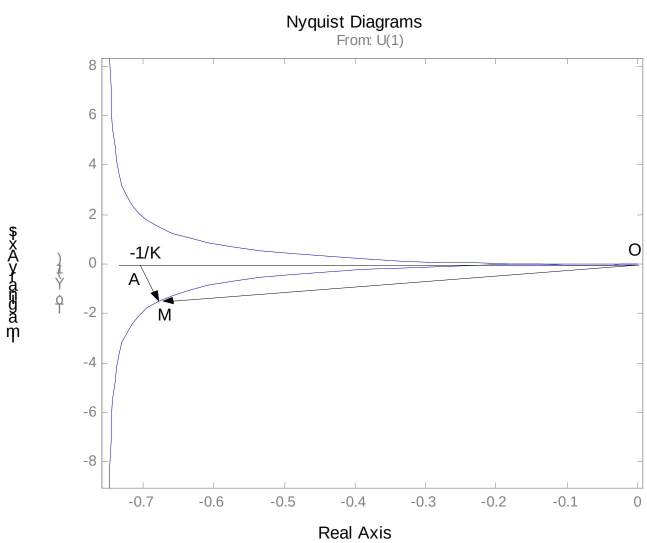
$$20<K$$

όλα τα συστήματα κλειστού βρόχου που προκύπτουν είναι ασταθή γιατί ο αριθμός των περιτριγυρισμάτων του -1/K είναι ίσος με δύο και το σύστημα ανοικτού βρόχου δεν έχει πόλους εντός του χωρίου D.
Για

$$2<K<20$$

κάποια από τα συστήματα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθή και άλλα ασταθή, εξαρτώμενα από την τιμή του B.

Δ)



Ο μιγαδικός αριθμός AM θα είναι

$$\text{AM}=\frac{1}{\text{K}}+\text{OM}=\frac{1}{\text{K}}+\widehat{\text{G}}\left(\text{j}\omega\right)$$

οπότε

$$\frac{\text{OM}}{\text{AM}}=\frac{\widehat{\text{G}}\left(\text{j}\omega\right)}{\frac{1}{\text{K}}+\widehat{\text{G}}\left(\text{j}\omega\right)}=\frac{\text{K}\widehat{\text{G}}\left(\text{j}\omega\right)}{1+\text{K}\widehat{\text{G}}\left(\text{j}\omega\right)}=\text{H}\left(\text{j}\omega\right)$$

Για ω=1rad/sec η εικόνα θα είναι

$$(\text{X,Y})=(-0.3,-0.1)$$

οπότε

$$\left|\text{H}\left(\text{j}\omega\right)\right|=\frac{\text{OM}}{\text{AM}}=\frac{\sqrt{0.1^2+\boldsymbol{0.3^2}}}{\sqrt{\boldsymbol{0.7^2}+\boldsymbol{0.1^2}}}=0.447$$

$$\text{Arg}\left\{\text{OM}\right\}=\text{τοξεφ}\left(\frac{-0.1}{-0.3}\right)=-2.82\text{rad}$$

$$\text{Arg}\left\{\text{AM}\right\}=\text{τοξεφ}\left(\frac{-0.1}{0.7}\right)=-0.14\text{rad}$$

οπότε

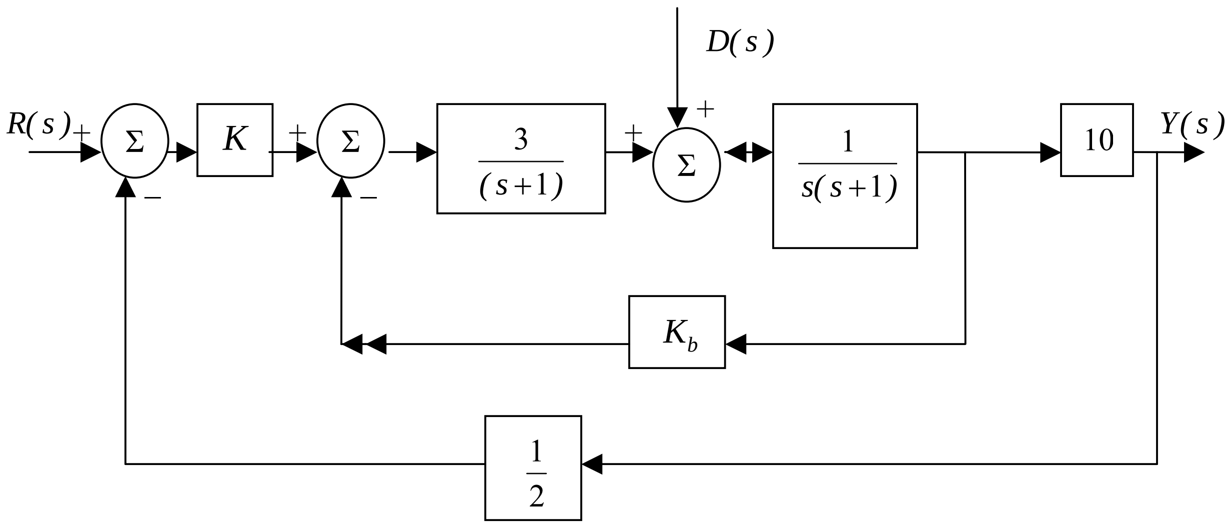
$$\text{Arg}\left\{\text{H}\left(\text{j}1\right)\right\}=-2.82-(-0.14)=-2.68\text{rad}$$

2. Η μόνιμη κατάσταση της θ(t) θα είναι ημιτονοειδής και θα ισχύει

$$\theta(t)=0.1*\left|\text{H}\left(\text{j}1\right)\right|*\text{ημ}[1*t+\text{Arg}\left\{\text{H}\left(\text{j}1\right)\right\}]=0.1*0.447*\text{ημ}[1*t+(-2.68)]=0.0447*\text{ημ}[1*t+(-2.68)]$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)

Δίνεται το λειτουργικό διάγραμμα του Σχήματος 1, όπου $\mathrm{R(s)}=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$ και $\mathrm{D(s)=M}$.



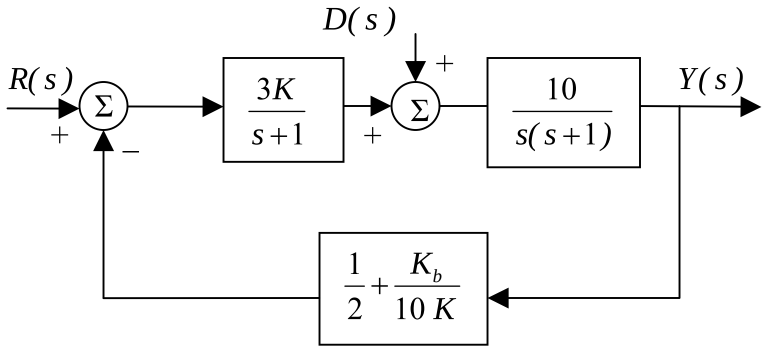
Σχήμα 1: Λειτουργικό διάγραμμα με είσοδο αναφοράς $\mathrm{R(s)}$, διαταραχή $\mathrm{D(s)}$ και έξοδο $Y(s)$.

α) Να μετασχηματίσετε το λειτουργικό διάγραμμα σε ισοδύναμη περιγραφή με ένα μόνο κλάδο ανάδρασης.

β) Να προσδιοριστούν οι περιοχές τιμών των K και K_b, έτσι ώστε η επίδραση της διαταραχής στην έξοδο του συστήματος να εξουδετερώνεται στη μόνιμη κατάσταση και ταυτόχρονα η έξοδος του συστήματος να ακολουθεί το σήμα εισόδου στη μόνιμη κατάσταση (δηλ. $\lim_{t\to\infty}\left\{\mathrm{y(t)\text{-}r(t)}\right\}=0$).

Λύση (από Α. Σολδάτο)

α) Μια ισοδύναμη περιγραφή μπορεί να προκύψη αν ‘μεγαλώσουμε’ τον εσωτερικό κλάδο ανάδρασης προς τα έξω και τον ενσωματώσουμε με τον εξωτερικό:



β) Υπολογίζουμε την έξοδο του κλειστού συστήματος εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας:

$$\frac{Y_r(s)}{R(s)}=\frac{\left(\frac{3K}{s+1}\right)\left(\frac{10}{s(s+1)}\right)}{1+\left(\frac{30K}{(s+1)(s^2+s)}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{K_b}{10\,K}\right)}=\frac{30K}{s^3+2s^2+s+15K+3K_b}$$

και

$$\frac{Y_d(s)}{D(s)}=\frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\left(\frac{30K}{(s+1)(s^2+s)}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{K_b}{10\,K}\right)}=\frac{10(s+1)}{s^3+2s^2+s+15K+3K_b}$$

οπότε,

$$Y(s)=Y_r(s)+Y_d(s)=\frac{30K}{s^3+2s^2+s+15K+3K_b}\left(\frac{A}{s}\right)+\frac{10(s+1)}{s^3+2s^2+s+15K+3K_b}\left(M\right)$$

Για να αποκόπτεται η διαταραχή, $d(t)$, στη μόνιμη κατάσταση θα πρέπει

$$\lim_{t\to\infty} y_d(t)=0$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace που ισχύει με την προυπόθεση ότι η $sY_d(s)$ είναι ευσταθής. Κατασκευάζουμε τον πίνακα Routh για τον προσδιορισμό κατάλληλων συνθηκών.

s^3	1	1
s^2	2	$15K+3K_b$
s^1	$\dfrac{2-15K-3K_b}{2}$	0
s^0	$15K+3K_b$	

οπότε, για να διασφαλίζεται η ζητούμενη ευστάθεια πρέπει

$$0<15K+3K_b<2$$

Με την προυπόθεση ότι ισχύουν οι ανισότητες, από το θεώρημα τελικής τιμής προκύπτει ότι

$$\lim_{t\to\infty} y_d(t) = \lim_{s\to 0} sY_d(s) = \lim_{s\to 0}\left(s\,\frac{10(s+1)}{s^3+2s^2+s+15K+3K_b}\left(M\right)\right) = 0$$

Η δεύτερη συνθήκη είναι,

$$\lim_{t\to\infty}\left(y(t)-r(t)\right)=0$$

Με την ικανοποίηση των πιο πάνω ανισοτήτων η $sY(s)$ είναι ευσταθής και από το θεώρημα τελικής τιμής θέτουμε

$$\lim_{t\to\infty}\left(y(t)-r(t)\right)=\lim_{s\to 0}\left(s\,Y_r(s)-s\,R(s)\right)=\lim_{s\to 0}\left(s\,\frac{30K}{s^3+2s^2+s+15K+3K_b}\left(\frac{A}{s}\right)-A\right)$$
$$=\frac{30\,K\,A}{15K+3K_b}-A= 0$$

οπότε,

$$K_b=5K$$

Η τελευταία σχέση με τις πιο πάνω ανισότητες συναληθεύουν για

$$0<K<\frac{1}{5}\quad \text{και}\quad 0<K_b<\frac{1}{3}\quad \text{με}\quad K_b=5K$$

Αυτές οι τιμές των K και K_b εξασφαλίζουν τις απαιτήσεις του προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)
Δίνεται σύστημα μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου

$$G(s)=\frac{K(s+\frac{10}{9})}{s^2(s+10)}\quad , \qquad K>0$$

α) Να δειχθεί ότι υπάρχει K για το οποίο οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος κλειστού βρόχου είναι όλες πραγματικές και ίσες μεταξύ τους και να προσδιοριστεί η τιμή του.

β) Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών για το ανωτέρω σύστημα.

Σημ.: Μπορείτε, αν θέλετε, να χρησιμοποιήσετε για το ερώτημα (α) μια γενική εξίσωση που έχει τριπλή ρίζα το $-\rho$.

Λύση (από Α. Σολδάτο)
α) Έστω $-\rho$ η τριπλή πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Τότε, χρησιμοποιώντας την υπόδειξη θέτουμε,

$$(s+\rho)^3=s^3+3\rho s^2+3\rho^2 s+\rho^3=0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του δοθέντος συστήματος είναι

$$1+\frac{K\,(s+\frac{10}{9})}{s^2(s+10)}=0$$

οπότε,

$$s^3+10s^2+Ks+\frac{10}{9}K=0$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων,

$$\rho=\frac{10}{3},\quad K=\frac{100}{3},\quad \rho^3=\frac{10}{9}K$$

Η τελευταία εξίσωση όντως επαληθεύεται με τις ευρεθείσες τιμές των ρ και K διότι

$$\rho^3=\frac{10^3}{3^3}=\left(\frac{10}{3^2}\right)\left(\frac{10^2}{3}\right)=\frac{10}{9}K$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $K = \frac{100}{3} = 33.333$ όταν οι ρίζες έχουν την τιμή $-\rho = -\frac{10}{3} = -3.333$

β) Μερικά συμπληρωματικά στοιχεία για το σχεδιασμό του γεωμετρικού τόπου των ριζών είναι τα ακόλουθα:

$$G(s) = \frac{K(s + \frac{10}{9})}{s^2(s+10)} , \qquad K > 0 , \quad n = 3 , \quad m = 1$$

Η $G(s)$ έχει τρείς πόλους, επομένως υπάρχουν τρείς διακεκριμένοι τόποι (κλάδοι του γεωμετρικού τόπου των ριζών). Το τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών που βρίσκεται μεταξύ του -10 και του $-\frac{10}{9} = -1.111$ ανήκει στο γεωμετρικό τόπο των ριζών επειδή είναι στα αριστερά ενός περιττού αριθμού πόλων και μηδενικών. Το κέντρο των ασυμπτώτων βρίσκεται στο

$$\sigma_1 = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = -\frac{10 - \frac{10}{9}}{3-1} = -\frac{40}{9} = -4.443$$

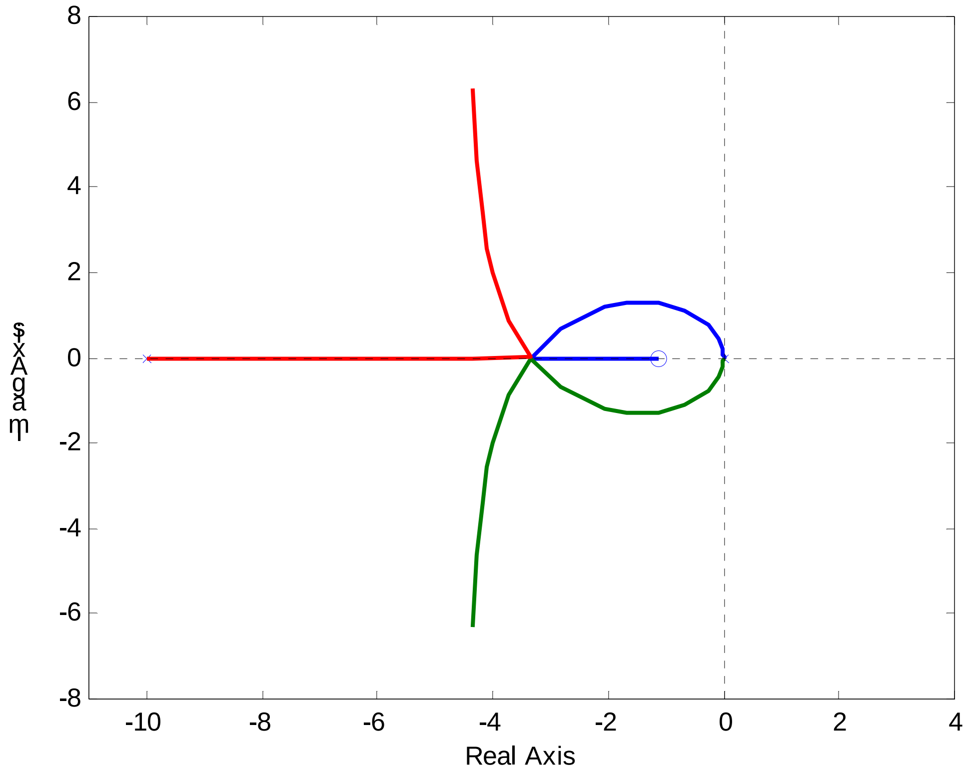
όπου $-p_i$ είναι οι πόλοι και $-z_i$ τα μηδενικά της $G(s)$. Οι γωνίες των ασυμπτώτων δίνονται από τα

$$\theta_\rho = \frac{(2\rho+1)180^O}{n-m} , \qquad \rho = 0,1,2,\cdots,n-m-1$$

Επομένως, οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι 90^O και 270^O. Τα σημεία θλάσης μπορούν να υπολογιστούν από

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{K(s+\frac{10}{9})}{s^2(s+10)}\right] = 0 \;\Rightarrow\; -2s^3 - \frac{40}{3}s^2 - \frac{200}{9}s = 0$$

Οι ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι $s = 0$ και $s = -3.333$ (διπλή). Οι αντίστοιχες αποδεκτές τιμές του K για αυτές τις ρίζες βρίσκονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση και είναι $K = 0$, και $K = 33.333$ (όπως στο ερώτημα (α)).



8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
Real Axis
Imag Axis

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2005)

Δίδεται η περιγραφή ενός συστήματος συνεχούς χρόνου:

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u(t),\ \ x(0)=x_0,\quad x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix},$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix}x(t)$$

α) Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα της περιγραφής.

β) Να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$.

γ) Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια η περιγραφή του συστήματος.

δ) Αν εφαρμοσθεί ο νόμος ελέγχου,

$$u(t)=r(t)-F_1x_1(t)-F_2x_2(t)$$

με r(t) μια είσοδο αναφοράς και F_1, F_2 πραγματικούς αριθμούς, να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του αντισταθμισμένου συστήματος.

ε) Να εξετασθεί για ποιές τιμές των F_1, F_2 του ερωτήματος (δ), το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Επίσης, να δειχθεί ότι αν F_1=-2 F_2 , , δεν είναι δυνατόν να ευσταθειοποιηθεί το δοθέν σύστημα για οποιαδήποτε τιμή του F_1.

Λύση

Α) Η μήτρα ελεγξιμότητας είναι

$$P_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_c)=3, η περιγραφή είναι ελέγξιμη.

Η μήτρα παρατηρησιμότητας είναι

$$P_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

Επειδή det(P_o)=12, βαθμός(P_o)=3 και η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.

Β) Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$G(s)=C[sI-A]^{-1}BU(s)=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ -2 & -1 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s[s(s+2)-1]-2}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{2M_{13}-M_{23}}{(s+2)(s^2-1)}$$

Είναι

$$M_{13}(s)=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ s & -1\end{vmatrix}=1 \qquad M_{23}(s)=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}s & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=s$$

$$G(s)=\frac{-(s-2)}{(s+2)(s-1)(s+1)}$$

Γ) Για την ευστάθεια εξετάζονται οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\psi(s)=\det[sI-A]=(s+1)(s-1)(s+2)$$

Καθώς το ψ(s) έχει τη ρίζα $s=1^{\eta}$ οποία βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, η περιγραφή του συστήματος είναι ασταθής.

Δ) Η περιγραφή του συστήματος μετά την εφαρμογή του νόμου ελέγχου θα είναι

$$\dot{\underline{x}}=A\underline{x}+B(r-F\underline{x})=(A-BF)\underline{x}+Br \quad y=C\underline{x}$$

όπου

$$F=\begin{bmatrix}F_1 & F_2 & 0\end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις καταστάσεως γίνονται

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2-F_1 & 1-F_2 & -2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}r(t)$$
$$y(t)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix}x(t)$$

Ε) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi_c(s)=\det[sI-A_c]=\det\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ F_1-2 & F_2-1 & s+2\end{bmatrix}=s[s(s+2)+F_2-1]+F_1-2=s^3+2s^2+(F_2-1)s+F_1-2$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^3	1	F_2-1
s^2	2	F_1-2
s	$[2(F_2-1)-F_1+2]/2$	
s^0	F_1-2	

Καθώς 1>0 και 2>0, για να είναι το αντισταθμισμένο σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει

$$[2(F_2-1)-F_1+2]/2=2F_2-F_1>0 \text{ και}$$

$$F_1-2>0$$

ή ισοδύναμα

$$2F_2-F_1>2>0$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι τα F_2,F_1 πρέπει να είναι θετικά. Εάν $F_1=-2F_2$, τα F_2,F_1 είναι ετερόσημα και δεν είναι δυνατόν να ικανοποιείται η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ασυμπτωτική ευσταθειοποίηση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2005)
Δίδεται το ακόλουθο μοντέλο ενός θερμικού συστήματος:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-6 & 3\\ 8 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}d(t)$$

$$y(t)=x_1(t)$$

όπου,

$x_1(t)$ η θερμοκρασία του δωματίου,

$x_2(t)$ η θερμοκρασία του θερμαντικού σώματος,

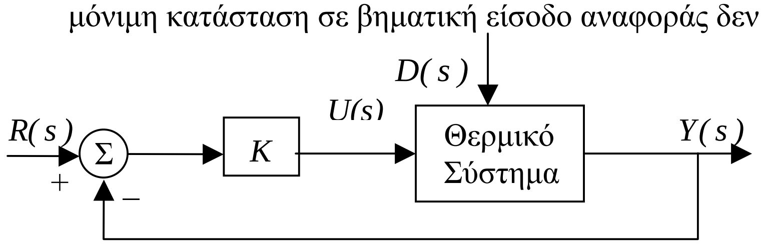
$u(t)$ η παροχή θερμότητος του θερμαντικού υγρού,

$d(t)$ η θερμοκρασία του περιβάλλοντος η οποία θεωρείται σαν διαταραχή.

1) Να εκφραστεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου συναρτήσει των μετασχηματισμών Laplace των $u(t)$ και $d(t)$ για μηδενικές αρχικές συνθήκες.

2) α) Εάν εφαρμοστεί ο έλεγχος του Σχήματος 1, να εκφραστεί η $Y(s)$ συναρτήσει των $R(s)$ και $D(s)$.

β) Να διερευνηθεί για ποιές τιμές του K, όταν η διαταραχή είναι μηδενική, το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση σε βηματική είσοδο αναφοράς δεν υπερβαίνει το 5%.



Σχήμα 1: Λειτουργικό διάγραμμα με είσοδο αναφοράς $R(s)$, διαταραχή $D(s)$ και έξοδο $Y(s)$.

3) Εάν $d(t)=10\,\eta\mu\left(\dfrac{2\pi}{24}\,t\right)$, για K της επιλογής σας ώστε να ισχύει η απαίτηση του ερωτήματος (2β), να ευρεθεί το πλάτος του κυματισμού της θερμοκρασίας του δωματίου στή μόνιμη κατάσταση.

Λύση

Α) Από την περιγραφή του συστήματοςμε μετασχηματισμό Laplace για μηδενικές αρχικές συνθήκες θα είναι

$$(sI-A)\underline{X}(s)=\begin{bmatrix}s+6 & -3\\ -8 & s+8\end{bmatrix}\underline{X}(s)=\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}U(s)+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}D(s)$$

Συνεπώς

$$Y(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\underline{X}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+14s+24}\begin{bmatrix}s+8 & 3\\ 8 & s+6\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}U(s)+\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}D(s)\right\}$$

$$=\frac{12}{s^2+14s+24}U(s)+\frac{3(s+8)}{s^2+14s+24}D(s)$$

B) Για την αντιστάθμιση που δίδεται θα είναι

$$U(s)=K[R(s)-Y(s)]$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση της Y(s) λαμβάνεται

$$Y(s)=\frac{12}{s^2+14s+24}KR(s)-\frac{12}{s^2+14s+24}KY(s)+\frac{3(s+8)}{s^2+14s+24}D(s)$$

Επιλύοντας ως προς Y(s), λαμβάνεται

$$Y(s)=\frac{\frac{12}{s^2+14s+24}KR(s)}{\frac{s^2+14s+24+12K}{s^2+14s+24}}+\frac{\frac{3(s+8)}{s^2+14s+24}D(s)}{\frac{s^2+14s+24+12K}{s^2+14s+24}}=\frac{12K}{s^2+14s+24+12K}R(s)+\frac{3(s+8)}{s^2+14s+24+12K}D(s)$$

Για μηδενική διαταραχή θα είναι

$$Y(s)=\frac{12K}{s^2+14s+24+12K}R(s)$$

Εάν η είσοδος αναφοράς είναι μοναδιαία βηματική, R(s)=1/s και εάν το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, από το θεώρημα της τελικής τιμής το σφάλμα μόνιμης κατάστασης θα είναι

$$\lim_{t\to\infty}\{r(t)-y(t)\}=\lim_{s\to 0}\{s[R(s)-Y(s)]\}=\lim_{s\to 0}\left\{s[1-\frac{12K}{s^2+14s+24+12K}]R(s)\right\}$$

$$=\lim_{s\to 0}\left\{s[1-\frac{12K}{s^2+14s+24+12K}]\frac{1}{s}\right\}=\frac{24}{24+12K}$$

Για την ευστάθεια του αντισταθμισμένου συστήματος χρησιμοποιείταιτο κριτήριο Routh στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής θα είναι

$$\psi_c(s)=s^2+14s+24+12K$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^2	1	24+12K
S	14	
s^0	24+12K	

Καθώς το K είναι θετικό η πρώτη στήλη δεν εμφανίζει αλλαγές προσήμου και το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για κάθε K>0.
Από τον τύπο του σφάλματος, καθώς K>0 προκύπτει ότι αυτό είναι θετικό, οπότε το K επιλέγεται ώστε

$$\lim_{t\to\infty}\left\{r(t)\text{-}y(t)\right\}=\frac{24}{24+12K}\le 0.05$$

ή

$$\frac{57*8}{12}=38\le K$$

Στη μόνιμη κατάσταση το τμήμα της εξόδου το οποίο οφείλεται στη διαταραχή θα είναι από την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας

$$y_d(t)=10\left|G_d(j\frac{2\pi}{24})\right|\eta\mu\left[\frac{2\pi t}{24}+\arg[G_d(j\frac{2\pi}{24})]\right]$$

όπου

$$G_d=\frac{3(s+8)}{s^2+14s+24+12K}$$

Εάν ληφθεί K=50, για το πλάτος του κυματισμού θα ισχύει

$$A_o=10\left|G_d(j\frac{2\pi}{24})\right|=10*3\left|\frac{8+j0.26}{24+600\text{-}0.26^2+j14*0.26}\right|=0.385$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2005)

Για το σύστημα κλειστού βρόχου του Σχήματος με K≥0 δίδεται ότι

$$G(s)=\frac{s^2+s+40}{(s+1)(s+4)(s^2+3s+3)}=\frac{s^2+s+40}{s^4+8s^3+22s^2+27s+12}$$

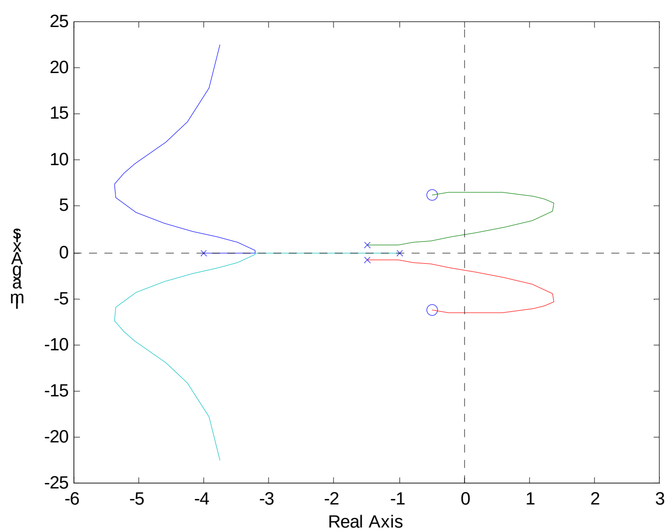
Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος για K≥0 αφού προσδιοριστούν

- Οι περιοχές του πραγματικού άξονα οι οποίες είναι μέρη του τόπου.
- Οι ασύμπτωτες του γεωμετρικού τόπου.
- Το σημείο τομής των ασυμπτώτων με τον πραγματικό άξονα.
- Οι γωνίες αναχώρησης από τους πόλους του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Οι γωνίες άφιξης στα μηδενικά του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Τα σημεία τομής με το φανταστικό άξονα.
- Το σημείο θλάσης.

Διδεται ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $p(s)=s^5+5.5s^4+88s^3+477.5s^2+868s+534$ είναι -1.37±j0.44, -3.2 και 0.23±j8.93.

Λύση

Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Α) Τα σημεία του πραγματικού άξονα που ανήκουν στον τόπο είναι στο διάστημα [-4,-1].

Β) Καθώς το σύστημα έχει τέσσερις πόλους και δύο μηδενικά, θα έχει δύο ασύμπτωτες με γωνίες ως προς τον πραγματικό άξονα

$$\theta_1=\frac{(1+2k)180}{n-m}\Big|_{k=0}=90^o$$

$$\theta_2=\frac{(1+2k)180}{n-m}\Big|_{k=1}=270^o$$

Γ) Το σημείο τομής των ασυμπτώτων με τον πραγματικό άξονα είναι

$$\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{4}p_i-\sum_{k=1}^{2}z_k}{n-m}=\frac{-8-(-1)}{2}=-3.5$$

(χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα ότι το άθροισμα των ριζών του πολυωνύμου $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ είναι $-a_{n-1}/a_n$).

Δ) Το σύστημα έχει δύο πόλους μιγαδικούς πόλους στις θέσεις $\frac{-3\pm j\sqrt{3}}{2}$. Η γωνία αναχώρησης από τον πόλο $\frac{-3\pm j\sqrt{3}}{2}$ θα είναι

$$\theta_{\alpha\nu}=180+Arg(-1-j5.43)+Arg(-1-j7.16)-Arg(-0.5+j0.866)-Arg(2.5+j0.866)-Arg(+j1.73)=$$
$$=180-100.43+97.94-120-19.1-90=-51.59^o$$

Η γωνία αναχώρησης από τον συζυγή πόλο θα είναι αντίθετη της γωνίας που προσδιορίστηκε.

Ε) Το σύστημα έχει ένα ζεύγος μιγαδικών μηδενικών στις θέσεις $\frac{-1+j\sqrt{159}}{2}$

$$\theta_{\alpha\varphi}=-180-90+Arg(0.5+j6.3)+Arg(3.5+j6.3)+Arg(1+j5.43)+Arg(1+j7.17)=$$
$$=180-90+85.46+60.94+79.56+82.06=38^o$$

Η γωνία αναχώρησης από το συζυγές μηδενικό θα είναι αντίθετη της γωνίας που προσδιορίστηκε.

ΣΤ) Για την εύρεση των σημείων τομής με τον φανταστικό άξονα χρησιμοποιείται η διάταξη Routh.

s^4	1	$22+K$	$12+40K$
s^3	8	$27+K$	
s^2	$\dfrac{8(22+K)-27-K}{8}=\dfrac{149+7K}{8}$	$12+40K$	
s	$\dfrac{\dfrac{(149+7K)(27+K)}{8}-96-320K}{\dfrac{(149+7K)}{8}}$		
s^0	$12+40K$		

Για να εμφανίζονται ρίζες επάνω στο φανταστικό άξονα πρέπει

$$\frac{(149+7K)(27+K)}{8}-96-320K=0$$

ή ισοδύναμα

$$7K^2-2222K+3255=0$$

η οποία δίδει τις ακόλουθες λύσεις

$$K_1=1.47 \qquad K_2=315.96$$

Για την τιμή 1.47 το βοηθητικό πολυώνυμο γίνεται

$$B(s)=\frac{149+7K}{8}s^2+12+40K=19.91s^2+70.80$$

το οποίο έχει ρίζες

$$s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{70.8}{19.91}}=\pm j1.88$$

Για την τιμή 315.96 το βοηθητικό πολυώνυμο γίνεται

$$B(s)=\frac{149+7K}{8}s^2+12+40K=295.09s^2+12650$$

το οποίο έχει ρίζες

$$s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{12650}{295.09}}=\pm j6.5475$$

Τα σημεία j1.88 , j6.5475 είναι τα σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα.

Ζ) Το σημείο θλάσης βρίσκεται από την εξίσωση

$$0=\frac{dK}{ds}=\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{G(s)}\right)=\frac{d}{ds}\left(-\frac{s^4+8s^3+22s^2+27s+12}{s^2+s+40}\right)=$$

$$=-\frac{(4s^3+24s^2+44s+27)(s^2+s+40)-(2s+1)(s^4+8s^3+22s^2+27s+12)}{(s^2+s+40)^2}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι το σημείο θλάσης s_0 πρέπει να είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$p(s)=s^5+5.5s^4+88s^3+477.5s^2+868s+534$$

Δίδεται ότι οι ρίζες του πολυωνύμου είναι -1.37±j0.44, -3.2 και 0.23±j8.93.

Για s_0=-3.2, K=0.1362 πραγματικό και θετικό, συνεπώς αποδεκτό.

Για s_0=-1.37+j0.44, K=0.0196-j0.0105 μιγαδικό, συνεπώς μη αποδεκτό.

Για s_0=-1.37-j0.44, K=0.0196+j0.0105 μιγαδικό, συνεπώς μη αποδεκτό.

Για s_0=-0.23+j8.93, K=140.37-j105.89 μιγαδικό, συνεπώς μη αποδεκτό.

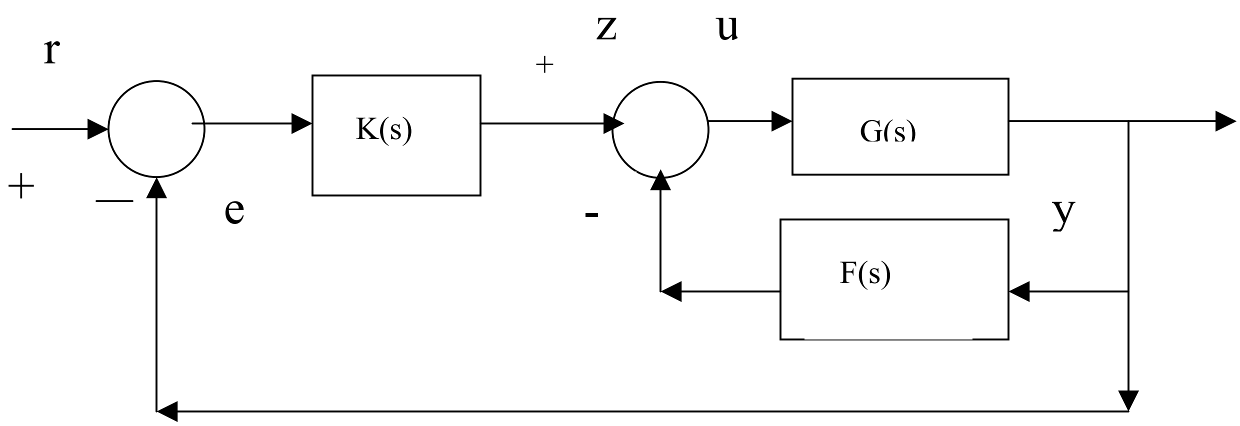
Για s_0=-0.23-j8.93, K=140.37+j105.89 μιγαδικό, συνεπώς μη αποδεκτό.

Επομένως μοναδικό σημείο θλάσης είναι το σημείο (-3.2,0)

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2005

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Πρόσθετη Εξέταση Νοέμβριος 2005)

Για το σύστημα ελέγχου του Σχήματος δίδονται



$$G(s)=\frac{1}{10s+1} \qquad F(s)=as \qquad K(s)=\frac{1}{s}$$

1. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}$.
2. Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου καθώς το a μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,\infty)$.
3. Να ευρεθεί για ποιές τιμές του a η βηματική απόκριση του συστήματος είναι πεπερασμένη και δεν εμφανίζει ταλαντώσεις.

Λύση

1. Θα είναι

$$\frac{Y(s)}{Z(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}$$

οπότε

$$H(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{K(s)G(s)}{1+G(s)F(s)}}{1+\dfrac{K(s)G(s)}{1+G(s)F(s)}}=\frac{K(s)G(s)}{1+G(s)F(s)K(s)G(s)}=\frac{\dfrac{1}{s(10s+1)}}{1+\dfrac{as^2+1}{s(10s+1)}}=\frac{1}{(10+a)s^2+s+1}$$

2. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών μπορεί να ευρεθεί αναλυτικά. Έστωσαν (x,y) οι συντεταγμένες ενός σημείου του τόπου. Θα ισχύει

$$(10+a)(x+jy)^2+x+jy+1=(10+a)(x^2-y^2+j2xy)+x+jy+1=0$$

Εξισώνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος με το 0, λαμβάνονται

$$(10+a)(x^2-y^2)+x+1=0$$
$$(10+a)(2xy)+y=0$$

Από τη δεύτερη σχέση λαμβάνονται εναλλακτικά.

A) y=0. Αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση απαιτεί $(10+a)x^2+x+1=0$, αδύνατο για a>0 καθώς η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική.

B) $(10+a)2x+1=0$. Επιλύοντας ως ορος a και αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση, λαμβάνεται

$$\left(\frac{-1}{2x}\right)(x^2-y^2)+x+1=0$$

ή ισοδύναμα

$$x^2+y^2+2x+1=(x+1)^2+y^2=1$$

Η τελευταία σχέση είναι εξίσωση περιφέρειας κύκλου με κέντρο το σημείο (-1,0) και ακτίνα 1. Τμήμα αυτής της περιφέρειας αποτελεί τον ζητούμενο γεωμετρικό τόπο.

$2^{ος}$ Τρόπος

Εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γραφεί

$$\psi_c(s)=as^2+10s^2+s+1$$

θα αντιστοιχεί στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός συστήματος απλού βρόχου με ελεγκτή σταθερό κέρδος a και συνάρτηση μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος

$$G_{eq}(s)=\frac{s^2}{10s^2+s+1}$$

Ο γεωμετρικός τόπος που ζητείται μπορεί να κατασκευαστεί με τους κανόνες ως εξής:

Ο αριθμός των κλάδων του τόπου είναι 2.

Ο γεωμετρικός τόπος δεν έχει τμήμα του επάνω στον πραγματικό άξονα, καθώς δεν υπάρχει σημείο του πραγματικού άξονα το οποίο να έχει προς τα δεξιά του περιττό αριθμό πόλων και μηδενικών.

Ο γεωμετρικός τόπος αρχίζει από τους πόλους της $G_{eq}(s)$ που είναι τα σημεία

$$s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-40}}{20}=-0.05\pm j0.312$$

και καταλήγει στα μηδενικά της που είναι το σημείο s=0, διπλό μηδενικό.

Ο γεωμετρικός τόπος δεν έχει ασύμπτωτες.

Η γωνία αναχώρησης από τον πόλο –0.05+j0.312 θα είναι

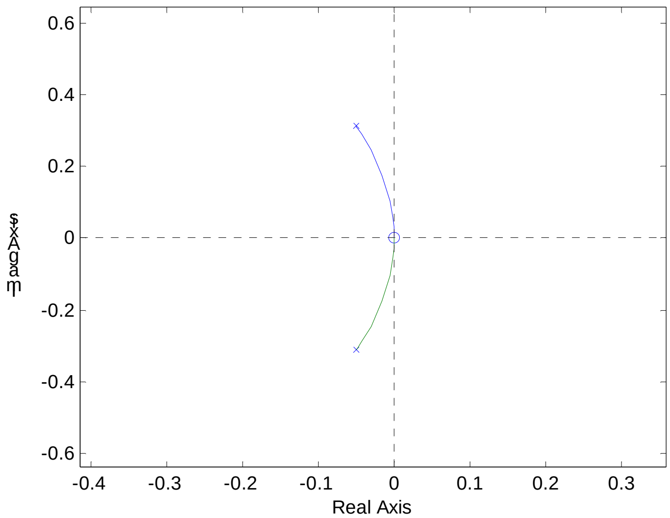
$$\varphi_p=180^o+2Arg(-0.05+j0.312)-Arg(j0.624)=180^o+2*99.1^o-90^o=288.2^o \Rightarrow 288.2-360=-71.8^o$$

Οι γωνίες άφιξης στο διπλό μηδενικό θα είναι

$$2\varphi_z=-180^o+Arg(0.05+j0.312)+Arg(0.05-j0.312)=-180^o \Rightarrow \varphi_z=-90^o$$

$$2\varphi_z=180^o+Arg(0.05+j0.312)+Arg(0.05-j0.312)=180^o \Rightarrow \varphi_z=90^o$$

Ο γεωμετρικός τόπος φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα.



3. Καθώς η βηματική απόκριση πρέπει να είναι πεπερασμένη και να μην εμφανίζει ταλαντώσεις, οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο και να είναι πραγματικές. Από το κριτήριο Routh λαμβάνεται

s^2	10+a	1
s	1	
s^0	1	

$$10+a>0$$

ή ισοδύναμα

$$a>-10$$

Για να έχει το τριώνυμο πραγματικές ρίζες, η διακρίνουσα πρέπει να είναι θετική, ήτοι

$$\Delta=1-4(10+a)=-39-4a>0$$

Ή ισοδύναμα

$$a<-39/4=-9.75$$

Οι ανισότητες συναληθεύουν για

$$-10<a<-9.75$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Πρόσθετη Εξέταση Νοέμβριος 2005)
Το μοντέλο ενός συστήματος στη βιομηχανία σιδήρου συνδέει το πάχος hτου προϊόντος με την τάση του σ ως εξής

$$\dot{h}+\eta\dot{\sigma}=(1-2\eta)h-3\eta\sigma+0.94u$$

$$a\dot{h}+4.25\dot{\sigma}=(a-\delta)h-12\sigma+4.75u$$

όπου σαν είσοδος λαμβάνεται η τάση u διέγερσης του κινητήρα, a,δ,η είναι παράμετροι και μετράται το πάχος h.

1. Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς το διάνυσμα $x=[h\ \ \sigma]^T$.
2. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς.
3. Να προσδιοριστούν οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν τα a,δ,η ώστε το σύστημα να είναι μη ελέγξιμο ή μη παρατηρήσιμο.

Λύση
1. Οι εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$E\dot{x}=A_1x+B_1u$$

όπου

$$E=\begin{bmatrix}1 & \eta\\ a & 4.25\end{bmatrix}\qquad A_1=\begin{bmatrix}1-2\eta & -3\eta\\ a-\delta & -12\end{bmatrix}\qquad B_1=\begin{bmatrix}0.94\\ 4.75\end{bmatrix}$$

Θα είναι

$$\dot{x}=E^{-1}A_1x+E^{-1}B_1u=\frac{1}{4.25-a\eta}\begin{bmatrix}4.25 & -\eta\\ -a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-2\eta & -3\eta\\ a-\delta & -12\end{bmatrix}x+\frac{1}{4.25-a\eta}\begin{bmatrix}4.25 & -\eta\\ -a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.94\\ 4.75\end{bmatrix}u=$$

$$=\frac{1}{4.25-a\eta}\begin{bmatrix}4.25-8.5\eta-\eta a+\eta\delta & -0.75\eta\\ 2\eta a-\delta & 3a\eta-12\end{bmatrix}x+\frac{1}{4.25-a\eta}\begin{bmatrix}3.995-4.75\eta\\ 4.75-0.94a\end{bmatrix}u=$$

$$y=Cx=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

2. Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$G(s)=C[sI-A]^{-1}B=C[sE^{-1}E-E^{-1}A_1]^{-1}E^{-1}B_1=C[sE-A_1]^{-1}EE^{-1}B_1=C[sE-A_1]^{-1}B_1$$

οπότε

$$G(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{s-1+2η} & \text{ηs+3η}\\ \text{as-a+δ} & \text{4.25s+12}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.94\\ 4.75\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\left\{\text{(s-1+2η)(4.25s+12)-(ηs+3η)(as-a+δ)}\right\}}\begin{bmatrix}\text{4.25s+12} & \text{-ηs-3η}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.94\\ 4.75\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\text{(3.995-4.75η)s+(11.28-14.25η)}}{\left\{\text{(4.25-aη)s}^2\text{+(7.75-2ηa+8.5η-δη)s+(-12+24η-3ηδ+3ηa)}\right\}}$$

3. Το σύστημα θα είναι μη ελέγξιμο ή μη παρατηρήσιμο εάν υπάρχει κοινός παράγοντας μεταξύ των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή της G(s). Καθώς ο αριθμητής είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, η ρίζα του

$$s=-\frac{\text{(11.28-14.25η)}}{\text{(3.995-4.75η)}}$$

πρέπει να είναι και ρίζα του παρονομαστή. Συνεπώς η ζητούμενη σχέση είναι

$$\text{(4.25-aη)}\left(\frac{\text{11.28-14.25η}}{-\text{3.995+4.75η}}\right)^2+\text{(7.75-2ηa+8.5η-δη)}\left(\frac{\text{11.28-14.25η}}{-\text{3.995+4.75η}}\right)+\text{(-12+24η-3ηδ+3ηa)=0}$$