

Ε.Μ.Π. ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ: Σ. Ε. Ρ.

ΜΑΘΗΜΑ: Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο

ΕΞΑΜΗΝΟ: 5^ο

ΠΕΡΙΟΔΟΣ: Σεπτεμβρίου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 7/10/2009

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 3 ώρες

Αριθμός Μητρώου	Ονοματεπώνυμο

ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ

ΘΕΜΑ	Βαθμολογία	Βαθμός Σπουδαστή
ΘΕΜΑ 1.1	0.8	
ΘΕΜΑ 1.2	0.7	
ΘΕΜΑ 2.1	1.0	
ΘΕΜΑ 2.2	0.7	
ΘΕΜΑ 2.3	0.8	
ΘΕΜΑ 3.1	1.0	
ΘΕΜΑ 3.2	0.7	
ΘΕΜΑ 3.3	0.8	
ΘΕΜΑ 4.1	0.9(0.3,0.3,0.3)	
ΘΕΜΑ 4.2	0.5	
ΘΕΜΑ 4.3	0.6	
ΘΕΜΑ 5.1	0.8	
ΘΕΜΑ 5.2	0.5	
ΘΕΜΑ 5.3	0.7	
ΘΕΜΑ 5.4	1.5	
ΣΥΝΟΛΟ	12	

Επιτρέπεται η χρήση ενός μόνο συνόλου από τα βιβλία της κατάστασης του μαθήματος καθώς και οι σημειώσεις που υπάρχουν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

Οι λύσεις γράφονται στις αριθμημένες σελίδες. Οι οπίσθιες σελίδες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν πρόχειρα. Απαγορεύεται η χρήση άλλων σελίδων.

Τα κινητά δεν θα είναι επάνω στα θρανία και πρέπει να είναι κλειστά καθ' όλη τη διάρκεια της εξέτασης διαφορετικά επισύρουν ποινή αποκλεισμού από αυτήν.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός συστήματος

$$\psi(s) = s^5 + s^4 + s^3(a + 4 + N_0) + s^2(a + 4 + N_0) + sa(4 + N_0) + a(4 + N_0)$$

όπου N_0 είναι το τελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας.

- Εάν το a μεταβάλλεται στο διάστημα $(-\infty, \infty)$, να προσδιοριστεί για ποιές τιμές του a δεν είναι δυνατόν να αποφανθείτε για την ευστάθεια του συστήματος.

(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

Κανένα	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	13	14	Άλλο

- Να προσδιοριστεί για ποιές τιμές του a οι ρίζες του πολυωνύμου έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του -2.

(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

Κανένα	>2.52	>3.28	>4.89	>5.63	>7.42	>12.41	>15.31	>18.27	>21.15
<1.41	<1.89	<2.36	<3.45	<4.78	<5.69	<7.20	<8.14	<11.15	Άλλο

Λύση

1^{ος} Τρόπος

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned}\psi(s) &= s^5 + s^4 + s^3(a + 4 + N_0) + s^2(a + 4 + N_0) + sa(4 + N_0) + a(4 + N_0) = \\ &= s^4(s + 1) + s^2(a + 4 + N_0)(s + 1) + a(4 + N_0)(s + 1) = \\ &= (s + 1)[s^4 + s^2(a + 4 + N_0) + a(4 + N_0)] = (s + 1)(s^2 + a)(s^2 + 4 + N_0)\end{aligned}$$

Για την ευστάθεια του συστήματος δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλές ρίζες επάνω στο φανταστικό άξονα (χρειάζεται τότε και η μήτρα A). Από τη μορφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει όταν

$$a=0$$

ή

$$a=4+N_0.$$

Συνεπώς οι σωστές απαντήσεις ανάλογα με τον αριθμό μητρώου θα είναι

$N_0=0$	$N_0=1$	$N_0=2$	$N_0=3$	$N_0=4$	$N_0=5$	$N_0=6$	$N_0=7$	$N_0=8$	$N_0=9$
$a=0$	$a=0$	$a=0$	$a=0$	$a=0$	$a=0$	$a=0$	$a=0$	$a=0$	$a=0$
$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$	$a=11$	$a=12$	$a=13$

- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρίζα την $s = -1$ η οποία δεν εξαρτάται από το a και η οποία έχει πραγματικό μέρος μεγαλύτερο του -2. Συνεπώς δεν υπάρχει τιμή του a ώστε οι ρίζες του πολυωνύμου να έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του -2.

2^{ος} Τρόπος

Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η διάταξη Routh η οποία για το δοθέν χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα έχει τη μορφή

s^5	1	$a+N_0+4$	$a(N_0+4)$
s^4	1	$a+N_0+4$	$a(N_0+4)$

s^3	0	0	
s^3	4	$2(a+N_0+4)$	
s^2	$0.5(a+N_0+4)$	$a(N_0+4)$	
s^1	$(a+N_0+4)^2-4a(N_0+4)$		
s^0	$a(N_0+4)$		

Καθώς η τρίτη γραμμή μηδενίζεται, το βοηθητικό πολυώνυμο θα είναι

$$B(s) = s^4 + s^2(a + 4 + N_0) + a(4 + N_0)$$

και η τρίτη γραμμή ξαναγράφεται χρησιμοποιώντας τους συντελεστές του πολυωνύμου

$$\frac{dB(s)}{ds} = 4s^3 + 2s(a + 4 + N_0)$$

Εάν επόμενη γραμμή μηδενίζεται για μία τιμή του a , θα υπάρχουν πολλαπλές ρίζες στο βοηθητικό πολυώνυμο και εάν αυτές είναι επάνω στο φανταστικό άξονα δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για την ευστάθεια.

Η γραμμή που αντιστοιχεί στο s^2 δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του a καθώς θα απαιτούσε την ικανοποίηση του συστήματος

$$a + 4 + N_0 = 0$$

$$a(4 + N_0) = 0$$

ή ισοδύναμα τον μηδενισμό του $4+N_0$ ο οποίος είναι αδύνατος.

Η γραμμή που αντιστοιχεί στο s^1 μηδενίζεται όταν

$$(a+N_0+4)^2-4a(N_0+4)=0$$

ή ισοδύναμα

$$a=N_0+4$$

Για την τιμή αυτή το δεύτερο βοηθητικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί στη σειρά του s^2 θα είναι

$$B_2(s) = s^2(4 + N_0) + (4 + N_0)^2$$

οπότε οι δύο τελευταίες γραμμές της διάταξης γίνονται

s^1	$2(N_0+4)$		
s^0	$(N_0+4)^2$		

Επειδή στην πρώτη στήλη της διάταξης Routh, όπως έχει διαμορφωθεί δεν υπάρχουν αλλαγές προσήμου, δεν θα υπάρχουν ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στο δεξιό ημιεπίπεδο και συνεπώς οι ρίζες του βοηθητικού πολυωνύμου $B(s)$ θα είναι πολλαπλές επάνω στον φανταστικό άξονα.

Η γραμμή που αντιστοιχεί στο s^0 μηδενίζεται όταν

$$a(N_0+4)=0$$

ή ισοδύναμα

$$a=0$$

Για την τιμή αυτή το βοηθητικό πολυώνυμο $B(s)$ έχει διπλή ρίζα την $s=0$ επάνω στο φανταστικό άξονα και συνεπώς δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για την ευστάθεια του συστήματος.

2. Θέτοντας

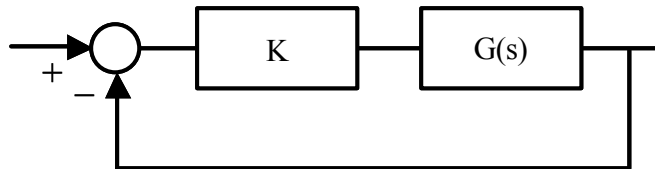
$$s = -2 + \hat{s}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γίνεται

$$\begin{aligned}\psi(s) &= \psi(\hat{s} - 2) = (\hat{s} - 2)^5 + (\hat{s} - 2)^4 + (\hat{s} - 2)^3(a + 4 + N_0) + (\hat{s} - 2)^2(a + 4 + N_0) + \\ &\quad + (\hat{s} - 2)a(4 + N_0) + a(4 + N_0) = \\ &= \hat{s}^5 - 10\hat{s}^4 + 40\hat{s}^3 - 80\hat{s}^2 + 80\hat{s} - 32 + \hat{s}^4 - 8\hat{s}^3 + 24\hat{s}^2 - 32\hat{s} + 16 + \\ &\quad + \left\{ \left[\hat{s}^3 - 6\hat{s}^2 + 12\hat{s} - 8 \right] + \left[\hat{s}^2 - 4\hat{s} + 4 \right] \right\} (a + 4 + N_0) + \{ (\hat{s} - 2) + 1 \} a(4 + N_0) = \\ &= \hat{s}^5 - 9\hat{s}^4 + (36 + a + N_0)\hat{s}^3 - (76 + 5N_0 + 5a)\hat{s}^2 + (80 + 8N_0 + 12a + aN_0)\hat{s} - 32 - 4N_0 - 8a - aN_0 = \hat{\psi}(\hat{s})\end{aligned}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα έχει ρίζες με πραγματικό μέρος μικρότερο του -2 εάν και μόνο εάν το πολυώνυμο $\hat{\psi}(\hat{s})$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Από το θεώρημα του Stodola αυτό είναι αδύνατο αφού οι συντελεστές του πεμπτοβάθμιου και του τεταρτοβάθμιου όρου είναι ετερόσημοι.

ΘΕΜΑ 2^ο



Για τον Γεωμετρικό Τόπο των Ριζών της συνάρτησης μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s^2 + a_1s + a_2}{s^2 + 2s + 2}$$

με $K > 0$,

1. Ναδειχθεί ότι τμήματα του γεωμετρικού τόπου είναι τόξα περιφέρειας της οποίας ζητείται να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα.
2. Εάν

$$a_1 = 2 \cdot (N_0 + 5)$$

$$a_2 = (N_0 + 5)^2 + 1$$

όπου N_0 το τελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας, να σχεδιαστεί ο Γεωμετρικός Τόπος των Ριζών της $G(s)$ λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα (1).

3. Εάν στην είσοδο αναφοράς εφαρμοστεί βηματική συνάρτηση, στην έξοδο θα εμφανιστεί μία αποσβεννύμενη ταλάντωση κυκλικής συχνότητας ω_d . Να προσδιοριστούν τα όρια μεταβολής της ω_d καθώς μεταβάλλεται το K και να ευρεθεί η τιμή του K ώστε το ω_d να λαμβάνει την μέγιστη τιμή του.

Λύση

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\begin{aligned}\psi_c(s) &= D_G(s) + KN_G(s) = s^2 + 2s + 2 + K(s^2 + a_1s + a_2) = \\ &= (1 + K)s^2 + (2 + Ka_1)s + (2 + Ka_2)\end{aligned}$$

Έστω

$$s = x + jy$$

ρίζα του χαρακτηριστικού πολωνύμου. Αντικαθιστώντας στο $\psi(s)$ λαμβάνεται

$$\psi_c(s) = (1 + K)(x^2 - y^2 + j2xy) + (2 + Ka_1)(x + jy) + (2 + Ka_2) = 0$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των δύο μελών της εξίσωσης λαμβάνεται το σύστημα των εξισώσεων

$$(1 + K)(x^2 - y^2) + (2 + Ka_1)x + (2 + Ka_2) = 0$$

$$(1 + K)2xy + (2 + Ka_1)y = 0$$

Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνεται

$$y = 0$$

ή επιλύοντας ως προς K

$$K = \frac{-2x - 2}{2x + a_1}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του K στην πρώτη εξίσωση, λαμβάνεται

$$\left[1 + \frac{-2x - 2}{2x + a_1}\right](x^2 - y^2) + \left[2 + \frac{-2x - 2}{2x + a_1}a_1\right]x + \left[2 + \frac{-2x - 2}{2x + a_1}a_2\right] = 0$$

ή ισοδύναμα

$$(a_1 - 2)(x^2 - y^2) + (4x - 2xa_1)x + (4x + 2a_1 - 2a_2x - 2a_2) = 0$$

ή

$$(a_1 - 2)(x^2 + y^2) - (4x + 2a_1 - 2a_2x - 2a_2) = 0$$

ή

$$x^2 + y^2 - \frac{2 - a_2}{a_1 - 2}2x + \frac{2a_2 - 2a_1}{a_1 - 2} = 0$$

ή

$$\left[x - \frac{2 - a_2}{a_1 - 2}\right]^2 + y^2 = -\frac{2a_2 - 2a_1}{a_1 - 2} + \left[\frac{2 - a_2}{a_1 - 2}\right]^2 = \frac{(a_1 - 2)^2 + (a_1 - a_2)^2}{(a_1 - 2)^2}$$

Η τελευταία σχέση είναι η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο

$$(x_K, y_K) = \left(\frac{2 - a_2}{a_1 - 2}, 0\right)$$

και ακτίνα

$$R = \sqrt{\frac{(a_1 - 2)^2 + (a_1 - a_2)^2}{(a_1 - 2)^2}}$$

2^{ος} Τρόπος
Έστω

$$s = x + jy$$

σημείο του Γεωμετρικού Τόπου των Ριζών. Αυτό θα ικανοποιεί τη σχέση

$$G(s) = G(x + jy) = -\frac{1}{K}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη της τελευταίας εξίσωσης λαμβάνονται οι σχέσεις

$$\operatorname{Re}\{G(x + jy)\} = -\frac{1}{K}$$

$$\operatorname{Im}\{G(x + jy)\} = 0$$

Η πρώτη σχέση χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του K. Η δεύτερη σχέση εκφράζει την εξίσωση του Γεωμετρικού Τόπου των Ριζών. Για την συγκεκριμένη συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\{G(x+jy)\} &= \operatorname{Im}\left\{\frac{(x+jy)^2 + a_1(x+jy) + a_2}{(x+jy)^2 + 2(x+jy) + 2}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{x^2 - y^2 + a_1x + a_2 + j(2xy + a_1y)}{x^2 - y^2 + 2x + 2 + j(2xy + 2y)}\right\} = \\ &= \operatorname{Im}\left\{\frac{[x^2 - y^2 + a_1x + a_2 + j(2xy + a_1y)][x^2 - y^2 + 2x + 2 - j(2xy + 2y)]}{[x^2 - y^2 + 2x + 2 + j(2xy + 2y)][x^2 - y^2 + 2x + 2 - j(2xy + 2y)]}\right\} = 0\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση, καθώς ο παρονομαστής είναι πραγματικός αριθμός, λαμβάνεται

$$-[x^2 - y^2 + a_1x + a_2][2xy + 2y] + [x^2 - y^2 + 2x + 2][2xy + a_1y] = 0$$

Καθώς η λύση $y=0$ δίνει σημεία του Τόπου επάνω στον πραγματικό άξονα, από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$-[x^2 - y^2 + a_1x + a_2][2x + 2] + [x^2 - y^2 + 2x + 2][2x + a_1] = 0$$

ή ισοδύναμα

$$-a_1x^2 - 2a_2x + 2x^2 + 2y^2 - 2a_2 + 4x - a_1y^2 + 2a_1 = 0$$

ή

$$x^2 + \frac{2(2-a_2)}{2-a_1}x + y^2 + \frac{2a_1-2a_2}{2-a_1} = 0$$

Η τελευταία σχέση ταυτίζεται με εκείνη του 1^{ου} τρόπου και δεν χρειάζεται να επαναληφθεί η συνέχεια.

2. Για $N_0=5$ θα είναι

$$a_1=20$$

$$a_2=101$$

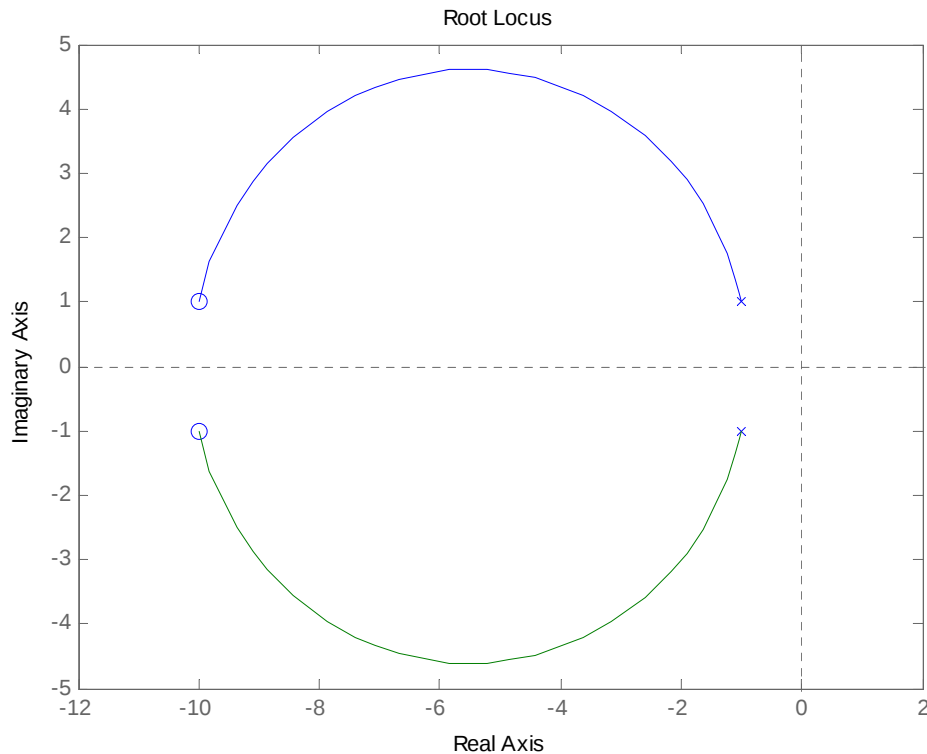
οπότε ο γεωμετρικός τόπος θα είναι τόξα κύκλου με κέντρο το σημείο

$$(x_K, y_K) = \left(\frac{2-a_2}{a_1-2}, 0\right) = \left(\frac{-99}{18}, 0\right) = (-5.5, 0)$$

και ακτίνα

$$R = \sqrt{\frac{(a_1 - 2)^2 + (a_1 - a_2)^2}{(a_1 - 2)^2}} = \sqrt{\frac{18^2 + 81^2}{18^2}} = 4.61$$

Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα



3. Το ω_d θα είναι ίσο με το φανταστικό μέρος του πόλου για την αντίστοιχη τιμή του K . Τα μηδενικά του συστήματος θα είναι οι ρίζες του πολωνύμου

$$\psi_z(s) = s^2 + a_1s + a_2 = s^2 + 2(N_0 + 5)s + (N_0 + 5)^2 + 1$$

οι οποίες είναι

$$s_{1,2} = \frac{-2(N_0 + 5) \pm \sqrt{4(N_0 + 5)^2 - 4(N_0 + 5)^2 - 4}}{2} = -(N_0 + 5) \pm j1$$

Οι πόλοι του συστήματος είναι οι ρίζες του πολωνύμου

$$\psi_p(s) = s^2 + 2s + 2$$

οι οποίες είναι

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = -1 \pm j1$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή του ω_d θα είναι 1rad/sec.

Η μέγιστη τιμή του ω_d θα είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου του γεωμετρικού τόπου των ριζών, δηλαδή θα είναι

$$\omega_{d\max} = R = \sqrt{\frac{(a_1 - 2)^2 + (a_1 - a_2)^2}{(a_1 - 2)^2}} = \sqrt{\frac{(2N_0 + 8)^2 + [(N_0 + 5)^2 + 1 - 2(N_0 + 5)]^2}{(2N_0 + 8)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2N_0 + 8)^2 + [(N_0 + 4)]^4}{(2N_0 + 8)^2}} = \sqrt{\frac{4 + [(N_0 + 4)]^2}{4}}$$

Για τις διάφορες τιμές του N_0 θα είναι

$N_0=0$	$N_0=1$	$N_0=2$	$N_0=3$	$N_0=4$
$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=2.24$	$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=2.69$	$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=3.16$	$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=3.64$	$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=4.12$

$N_0=5$	$N_0=6$	$N_0=7$	$N_0=8$	$N_0=9$
$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=4.61$	$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=5.1$	$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=5.59$	$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=6.08$	$\omega_{d\min}=1$ $\omega_{d\max}=6.58$

Για τη μέγιστη τιμή του ω_d η τετμημένη του σημείου θα είναι η τετμημένη του κέντρου του κύκλου, οπότε θα είναι

$$K = \frac{-2x - 2}{2x + a_1} \bigg|_{x=\frac{2-a_2}{a_1-2}} = \frac{2a_2 - 2a_1}{4 - 2a_2 - 2a_1 + a_1^2} =$$

$$= \frac{2[(N_0 + 5)^2 + 1] - 4(N_0 + 5)}{4 - 2[(N_0 + 5)^2 + 1] + 4(N_0 + 5)^2 - 4(N_0 + 5)} = \frac{2(N_0 + 4)^2}{2(N_0 + 4)^2} = 1$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητο της τιμής του N_0 .

2^{ος} Τρόπος

Το μέγιστο ω_d θα συμβαίνει για το σημείο του Γεωμετρικού Τόπου των Ριζών s_o το οποίο έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα των πραγματικών. Καθώς αυτό είναι το σημείο τομής της περιφέρειας του κύκλου με τη μεσοκάθετο του τμήματος που συνδέει τον πόλο $-1 + j$ με το μηδενικό $-(N_0 + 5) + j1$, η οποία ταυτίζεται με τη μεσοκάθετο του τμήματος που συνδέει τον πόλο $-1 - j$ με το μηδενικό $-(N_0 + 5) - j1$, θα είναι

$$K = \left| \frac{1}{G(s_o)} \right| = \left| \frac{(s_o + 1 - j)(s_o + 1 + j)}{(s_o + N_0 + 5 - j)(s_o + N_0 + 5 + j)} \right| = 1$$

επειδή

$$|(s_o + 1 - j)| = |(s_o + N_0 + 5 - j)|$$

$$|(s_o + 1 + j)| = |(s_o + N_0 + 5 + j)|$$

3^{ος} Τρόπος

Εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου γραφεί ώστε ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του να είναι ίσος με τη μονάδα, θα ισχύει

$$\psi_c(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \frac{2 + Ka_1}{1 + K}s + \frac{2 + Ka_2}{1 + K}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2 + Ka_2}{1 + K}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_n} \frac{2 + Ka_1}{1 + K} = \frac{2 + Ka_1}{2(1 + K)} \frac{\sqrt{1 + K}}{\sqrt{2 + Ka_2}}$$

Το ω_d θα είναι

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{2 + Ka_2}{1 + K}} \sqrt{1 - \frac{(2 + Ka_1)^2}{4(1 + K)(2 + Ka_2)}} =$$

$$= \frac{1}{2(1 + K)} \sqrt{4 + 8K + 4K(a_2 - a_1) + 4K^2 a_2 - K^2 a_1^2}$$

Για τις τιμές των a_1, a_2 που δίδονται θα είναι

$$\omega_d = \frac{1}{2(1 + K)} \sqrt{4 + 8K + 4K(N_0 + 4)^2 + 4K^2} = \sqrt{1 + \frac{K(N_0 + 4)^2}{(1 + K)^2}}$$

Παραγωγίζοντας το ω_d ως προς K λαμβάνεται

$$\frac{d\omega_d}{dK} = \frac{[(N_0 + 4)^2(1 + K)^2 - 2K(N_0 + 4)^2(1 + K)]}{2\sqrt{1 + \frac{K(N_0 + 4)^2}{(1 + K)^2}}} = -\frac{(N_0 + 4)^2}{2\sqrt{1 + \frac{K(N_0 + 4)^2}{(1 + K)^2}}}(1 - K^2)$$

Για $K > 1$ η συνάρτηση $\omega_d(K)$ είναι φθίνουσα και συνεπώς η μία ελάχιστη τιμή του ω_d θα είναι

$$\omega_{d\min 1} = \omega_d \Big|_{K=\infty} = 1$$

Για $K < 1$ η συνάρτηση $\omega_d(K)$ είναι αύξουσα και συνεπώς η μία ελάχιστη τιμή του ω_d θα είναι

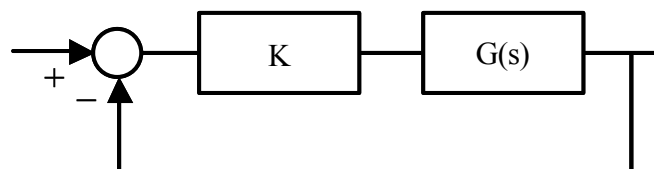
$$\omega_{d\min 2} = \omega_d \Big|_{K=0} = 1$$

Η μέγιστη τιμή του ω_d θα συμβαίνει όταν $K=1$ και θα είναι

$$\omega_{d\max} = \sqrt{1 + \frac{(N_0 + 4)^2}{4}}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Για το σύστημα κλειστού βρόχου του σχήματος δίδεται ότι η ονομαστική συνάρτηση μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος είναι



$$G_N(s) = 6 \frac{s+0.5(1+N_1)}{s^2-3s+2}$$

όπου N_1 είναι το προτελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας.

1. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist της $G_N(s)$ αφού πρώτα προσδιοριστούν τα σημεία τομής του με τον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα.
2. Εάν ο ελεγκτής $K(s)$ είναι σταθερά ανεξάρτητη του s , χρησιμοποιώντας το θεώρημα ευστάθειας του Nyquist, να προσδιοριστούν οι τιμές του K ώστε το αντισταθμισμένο σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
3. Εάν το προς έλεγχο σύστημα μεταβάλλεται και η συνάρτηση μεταφοράς του είναι

$$G(s) = G_N(s) + \Delta(s) = 6 \frac{s+0.5(1+N_1)}{s^2-3s+2} + \Delta(s)$$

όπου $\Delta(s)$ ευσταθής συνάρτηση μεταφοράς η οποία ικανοποιεί την ανισότητα

$$|\Delta(j\omega)| < 0.1$$

να προσδιοριστεί η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου μέσα στην οποία θα υπάρχει το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$ και να ευρεθεί η περιοχή μεταβολής του K , ώστε όλη η οικογένεια των συστημάτων να είναι ευσταθής.

Λύση

Εάν γραφεί

$$b = 0.5(1+N_1)$$

θα είναι

$$G_N(j\omega) = 6 \frac{b+j\omega}{2-\omega^2-j3\omega} = 6 \frac{(b+j\omega)(2-\omega^2+j3\omega)}{(2-\omega^2-j3\omega)(2-\omega^2+j3\omega)} = 6 \frac{b(2-\omega^2)-3\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} + j6 \frac{(3b+2)\omega-\omega^3}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} = X+jY$$

Για την τομή του διαγράμματος με τον άξονα των πραγματικών αριθμών τίθεται

$$Y = 6 \frac{(3b+2)\omega-\omega^3}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} = 0$$

Από τη λύση της εξίσωσης προκύπτουν τα ω που αντιστοιχούν στις τομές ως εξής

$$\omega_{1x} = 0$$

$$\omega_{2x} = \pm \sqrt{3b+2}$$

$$\omega_{3x} = \infty$$

Για τις ανωτέρω τιμές τα σημεία τομής προκύπτουν

$$X_1 = 6 \frac{b(2-\omega^2)-3\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} \Big|_{\omega=0} = 3b$$

$$X_2 = 6 \frac{b(2-\omega^2)-3\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} \Big|_{\omega=\pm\sqrt{3b+2}} = 6 \frac{b(-3b)-3(2+3b)}{9b^2+9(2+3b)} = -\frac{6}{3} = -2$$

$$X_3 = 6 \frac{b(2-\omega^2)-3\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} \Big|_{\omega=\infty} = 0$$

Για την τομή του διαγράμματος με τον άξονα των φανταστικών αριθμών τίθεται

$$X = 6 \frac{b(2-\omega^2)-3\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} = 0$$

Από τη λύση της εξίσωσης προκύπτουν τα ω που αντιστοιχούν στις τομές ως εξής

$$\omega_{1y} = \pm \sqrt{\frac{2b}{3+b}}$$

$$\omega_{2y} = \infty$$

Για τις ανωτέρω τιμές τα σημεία τομής προκύπτουν

$$Y_1 = 6 \frac{(3b+2)\omega-\omega^3}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} \Big|_{\omega=\sqrt{\frac{2b}{3+b}}} = \frac{6\sqrt{\frac{2b}{3+b}} \left(2 - \frac{2b}{3+b} + 3b \right)}{9b^2+9(2+3b)} = \sqrt{2b(3+b)}$$

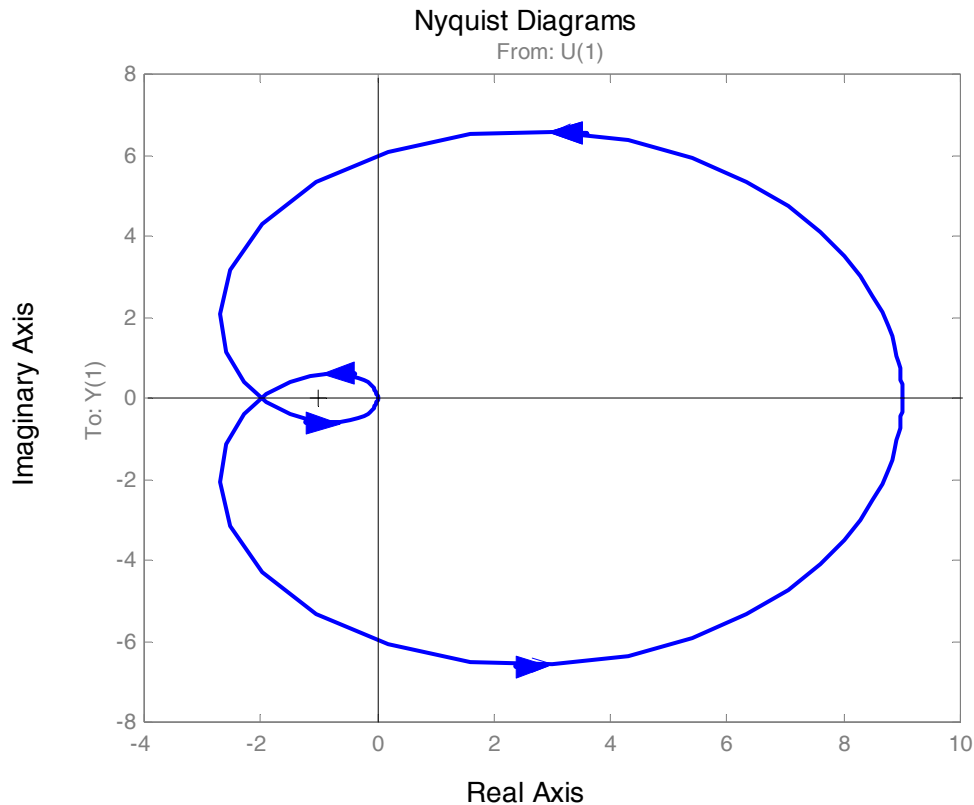
$$Y_2 = 6 \frac{(3b+2)\omega-\omega^3}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} \Big|_{\omega=-\sqrt{\frac{2b}{3+b}}} = \frac{-6\sqrt{\frac{2b}{3+b}} \left(2 - \frac{2b}{3+b} + 3b \right)}{9b^2+9(2+3b)} = -\sqrt{2b(3+b)}$$

$$Y_3 = 6 \frac{(3b+2)\omega-\omega^3}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} \Big|_{\omega=\infty} = 0$$

Τα σημεία τομής με τους άξονες για τα διάφορα N_1 θα είναι

$N_1=0$	$N_1=1$	$N_1=2$	$N_1=3$	$N_1=4$	$N_1=5$	$N_1=6$	$N_1=7$	$N_1=8$	$N_1=9$
(1.5,0)	(3,0)	(4.5,0)	(6,0)	(7.5,0)	(9,0)	(10.5,0)	(12,0)	(13.5,0)	(15,0)
(-2,0)	(-2,0)	(-2,0)	(-2,0)	(-2,0)	(-2,0)	(-2,0)	(-2,0)	(-2,0)	(-2,0)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1.87)	(0,2.83)	(0,3.67)	(0,4.47)	(0,5.24)	(0,6)	(0,6.74)	(0,7.48)	(0,8.22)	(0,8.95)
(0,-1.87)	(0,-2.834)	(0,-3.67)	(0,-4.47)	(0,-5.24)	(0,-6)	(0,-6.74)	(0,-7.48)	(0,-8.22)	(0,-8.95)

Το διάγραμμα Nyquist $G_N(s)$ για $N_1=5$ φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα



2. Το σύστημα ανοικτού βρόχου έχει σαν πόλους τις ρίζες του παρονομαστή της $G_N(s)$ οι οποίες είναι

$$p_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4*2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

δηλαδή έχει δύο πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο. Για να είναι ευσταθές το σύστημα κλειστού βρόχου πρέπει το σημείο $-1/K$ να περιτριγυρίζεται δύο φορές ανθωρολογιακά (καθώς το s διαγράφει μία φορά ωρολογιακά το D περίγραμμα) από το διάγραμμα Nyquist που φαίνεται στο Σχήμα. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει

$$-2 < -\frac{1}{K} < 0$$

ή ισοδύναμα

$$0.5 < K$$

3. Από τη σχέση της $G(s)$ λαμβάνεται

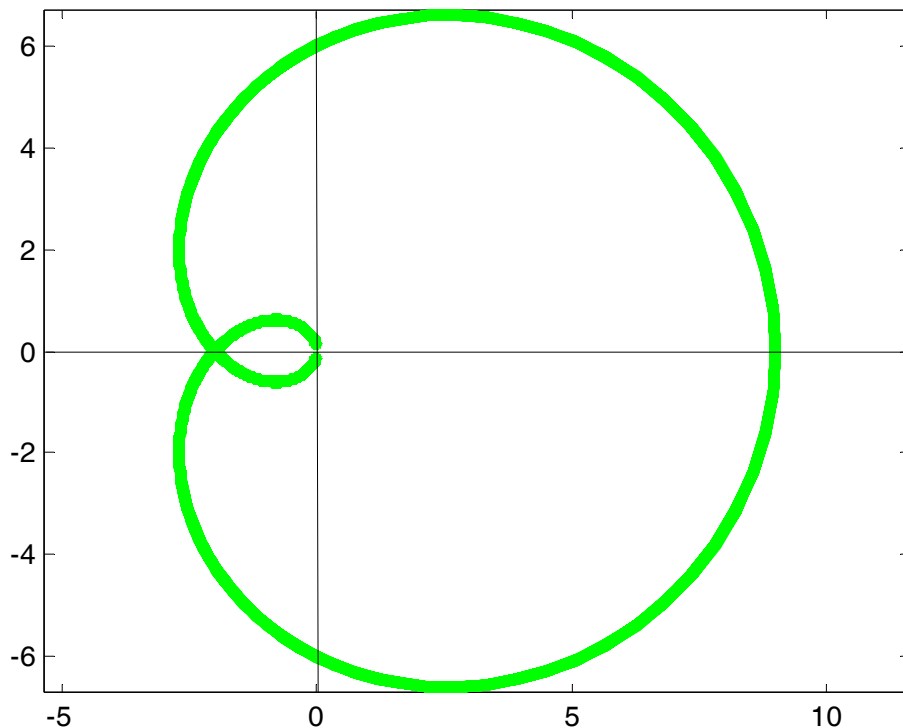
$$G(s) - G_N(s) = G(s) - 6 \frac{s+b}{s^2-3s+2} = \Delta(s)$$

οπότε θα είναι

$$|G(j\omega) - G_N(j\omega)| = |\Delta(j\omega)| < 0.1$$

Η ανωτέρω σχέση σημαίνει ότι κάθε σημείο του διαγράμματος Nyquist της $G(j\omega)$ βρίσκεται σε ένα κύκλο με κέντρο το αντίστοιχο σημείο της $G_N(j\omega)$ και ακτίνα ίση με 0.1. Με κέντρο κάθε σημείο της $G_N(j\omega)$ και ακτίνα ίση με 0.1 γράφεται κύκλος. Στην ταινία που δημιουργείται θα βρίσκεται το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$. Αυτό φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα που κατασκευάστηκε με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB.

```
clear all
for I=1:1000
    a(I)=i*0.05*(I-1);
    center(I)=6*(a(I)+3)/(a(I)^2-3*a(I)+2);
    radius(I)=0.1;
for K=1:100
    t(I,K)=center(I)+radius(I)*exp(i*2*pi*(K-1)/99);
    tr(I,K)=real(t(I,K));
    ti(I,K)=imag(t(I,K));
end
end
plot(tr,ti,'g',tr,-ti,'g')
axis equal
```



Επειδή το διάγραμμα Nyquist τέμνει τον πραγματικό άξονα υπό γωνία περίπου 45° , η πράσινη ζώνη θα τέμνει τον πραγματικό άξονα στο διάστημα $(-2.14, -1.86)$. Για να εξασφαλίζεται η ευστάθεια όλης της οικογένειας των συστημάτων κλειστού βρόχου το σημείο $-1/K$ πρέπει να περιτριγυρίζεται δύο φορές ανθωρολογιακά από το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$. Αυτό θα συμβαίνει εάν

$$-1.86 < -\frac{1}{K} < -0.1$$

ή ισοδύναμα

$$0.5376 < K < 10$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίδεται σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ N_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου N_2 είναι το τρίτο από το τέλος ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας.

1. α) Να ευρεθεί η τιμή ή οι τιμές του a για να είναι το σύστημα μη ελέγξιμο.
(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

Κανένα a	Κάθε a	0	0.5	0.9	1.5	1.8	2.1	2.7	3.2
3.6	4.2	4.5	4.9	5.4	6.3	6.8	7.2	8.1	Άλλο a

- β) Να ευρεθεί η τιμή ή οι τιμές του a για να είναι το σύστημα μη παρατηρήσιμο.
(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

Κανένα a	Κάθε a	0	0.5	0.9	1.5	1.8	2.1	2.7	3.2
3.6	4.2	4.5	4.9	5.4	6.3	6.8	7.2	8.1	Άλλο a

- γ) Εάν $a=1$ το σύστημα είναι
(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

Ασυμπτωτικά Ευσταθές	Ευσταθές	Ασταθές	Δεν μπορώ να αποφανθώ
-------------------------	----------	---------	--------------------------

2. Είναι επιθυμητό το σύστημα να οδηγηθεί στην κατάσταση

$$\underline{x}(M) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Εάν $a=1$, να προσδιοριστεί ο ελάχιστος αριθμός βημάτων M για να επιτευχθεί ο στόχος.

(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

M=1	M=2	M=3	M=4	Δεν επιτυγχάνεται ο στόχος
-----	-----	-----	-----	-------------------------------

3. Εάν σαν κόστος της οδήγησης θεωρηθεί το

$$J(M) = \sum_{i=0}^{M-1} [u_1^2(i) + u_2^2(i)]$$

να προσδιοριστεί η είσοδος $u_2(0)$ όταν επιτυγχάνεται ο στόχος με τον ελάχιστο αριθμό βημάτων και την ελάχιστη τιμή του κόστους $J(M)$.

(Να σημειώσετε με X το σωστό τετράγωνο)

Δεν επιτυγχάνεται ο στόχος	-1	-0.5	0	0.4	0.8	1.2	2	2.5	3
3.6	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	8	Άλλο $u_2(0) =$

Λύση

1.α Η μήτρα ελεγχσιμότητας θα είναι

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ N_2 & 0 & a+0.1N_2 & 0 & 1.1a+0.01N_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Για την εύρεση του βαθμού της μήτρας ελεγχσιμότητας τη μετατρέπουμε σε κάνω τριγωνική με πράξεις επί των γραμμών της. Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη επί N_2 λαμβάνεται

$$\hat{P}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-0.9N_2 & 0 & 1.1a-0.99N_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να είναι ο βαθμός της μήτρας ελεγχσιμότητας μικρότερος του 3 πρέπει η τελευταία γραμμή της μήτρας $\hat{P}_c$ να μηδενίζεται. Αυτό οδηγεί στο σύστημα των εξισώσεων

$$a-0.9N_2=0$$

$$1.1a-0.99N_2=0$$

Οι δύο εξισώσεις είναι συμβιβαστές και η περιγραφή δεν είναι ελέγξιμη όταν

$$a=0.9N_2$$

Για τα διάφορα N_2 το a προκύπτει

$N_2=0$	$N_2=1$	$N_2=2$	$N_2=3$	$N_2=4$	$N_2=5$	$N_2=6$	$N_2=7$	$N_2=8$	$N_2=9$
$a=0$	$a=0.9$	$a=1.8$	$a=2.7$	$a=3.6$	$a=4.5$	$a=5.4$	$a=6.3$	$a=7.2$	$a=8.1$

1.β Η μήτρα παρατηρησιμότητας θα είναι

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο βαθμός της μήτρας παρατηρησιμότητας είναι πάντα ίσος με $2 < 3$. Συνεπώς το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο για όλες τις τιμές του a .

1.γ Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής του συστήματος θα είναι

$$\psi(z) = \det(zI_3 - A) = \det \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z-1 & 0 \\ -a & 0 & z-0.1 \end{bmatrix} = (z-1)^2(z-0.1)$$

Το πολυώνυμο δεν έχει ρίζες εκτός του μοναδιαίου κύκλου αλλά έχει διπλή ρίζα την $z=1$ επάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει η μήτρα A να διαγωνιοποιείται στην ιδιοτιμή αυτή και αυτό συμβαίνει όταν η μήτρα έχει τόσα

ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα στην ιδιοτιμή $z=1$ όση είναι και η πολλαπλότητα της ρίζας, δηλαδή όταν ισχύει

$$\text{rank}(zI_3 - A)|_{z=1} = \text{rank} \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z-1 & 0 \\ -a & 0 & z-0.1 \end{bmatrix} \Big|_{z=1} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0.9 \end{bmatrix} = 1 = n-2 = 3-2$$

Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει, το σύστημα είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

2. Εάν ο στόχος μπορεί να επιτευχθεί σε ένα βήμα, θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

$$\underline{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \underline{x}(0) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ N_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ N_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

Από την τελευταία σχέση πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 1 \\ u_2(0) &= 5 \\ N_2 u_1(0) &= 10 \end{aligned}$$

Καθώς το N_2 είναι μεταξύ του 0 και του 9 το σύστημα των εξισώσεων δεν είναι συμβιβαστό και ο στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί σε ένα βήμα.

Εάν ο στόχος μπορεί να επιτευχθεί σε δύο βήματα, θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

$$\underline{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = A^2 \underline{x}(0) + [B \quad AB] \begin{bmatrix} \underline{u}(1) \\ \underline{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ N_2 & 0 & 1 + 0.1N_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(1) + u_1(0) \\ u_2(1) + u_2(0) \\ N_2 u_1(1) + (1 + 0.1N_2) u_1(0) \end{bmatrix}$$

Από την τελευταία σχέση πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} u_1(1) + u_1(0) &= 1 \\ u_2(1) + u_2(0) &= 5 \\ N_2 u_1(1) + (1 + 0.1N_2) u_1(0) &= 10 \end{aligned}$$

Το σύστημα των εξισώσεων έχει οικογένεια λύσεων

$$\begin{aligned} u_1(1) &= \frac{0.1N_2 - 9}{1 - 0.9N_2} \\ u_1(0) &= \frac{10 - N_2}{1 - 0.9N_2} \\ u_2(1) &= x \\ u_2(0) &= 5 - x \end{aligned}$$

όπου x αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Συνεπώς ανεξάρτητα από την τιμή του N_2 το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί στην επιθυμητή κατάσταση σε δύο βήματα και $M=2$ είναι ο ελάχιστος αριθμός βημάτων.

3. Το κόστος της οδήγησης για τον ελάχιστο αριθμό βημάτων θα είναι

$$J(2)=\sum_{i=0}^1 \left[u_1^2(i)+u_2^2(i) \right] = u_1^2(0)+u_1^2(1)+u_2^2(0)+u_2^2(1)=c+x^2+(5-x)^2=2x^2-10x+25+c$$

Η ελάχιστη τιμή του J θα συμβαίνει όταν

$$\frac{dJ}{dx}=4x-10=0$$

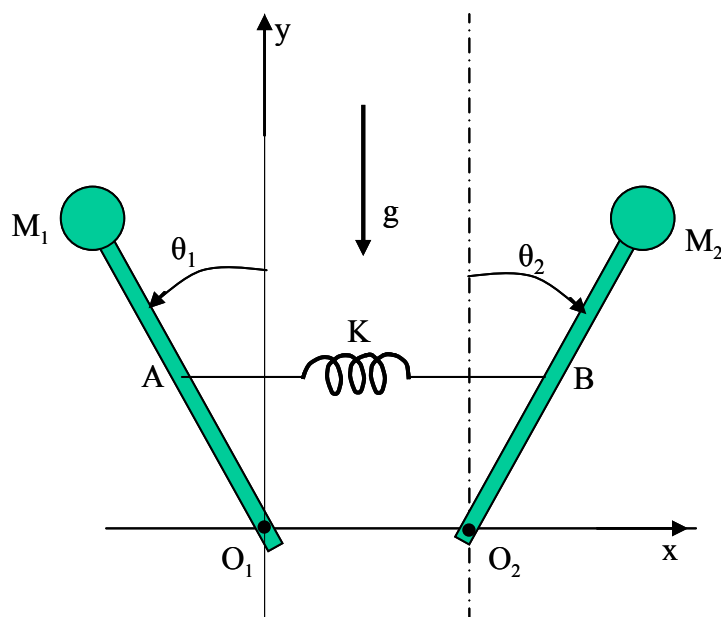
ή ισοδύναμα

$$x=2.5$$

Συνεπώς ανεξάρτητα της τιμής του N_2 θα είναι

$$u_2(0)=u_2(1)=2.5$$

ΘΕΜΑ 5^ο



Στο σύστημα του σχήματος δύο μάζες M_1 και M_2 είναι στερεωμένες στα άκρα αβαρών ράβδων μήκους $2L$ και μπορούν να περιστραφούν ως προς άξονες O_1 και O_2 που βρίσκονται στα άλλα άκρα των αβαρών ράβδων. Το ελατήριο με σταθερά K είναι συνδεδεμένο στα μέσα των αβαρών ράβδων. Το ευθύγραμμο τμήμα O_1O_2 είναι οριζόντιο και η απόσταση $O_1O_2=D$ είναι μεγαλύτερη του $4L$ ώστε να μην υπάρξει περίπτωση σύγκρουσης των μαζών. Οι μετακινήσεις υποτίθενται μικρές και η απόσταση O_1O_2 αρκετά μεγάλη ώστε το ελατήριο να θεωρείται οριζόντιο για τα ζεύγη (θ_1, θ_2) . Το ελατήριο ασκεί μηδενική δύναμη όταν το μήκος του είναι O_1O_2 . Η επιτάχυνση της βαρύτητας g είναι κατακόρυφη, όπως στο Σχήμα.

1. Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς το διάνυσμα

$$\mathbf{x}^T = [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2]$$

2. Εάν $M_1=M_2$, να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.
3. Εάν $g=10\text{m/s}^2$, $L=1\text{m}$, $M = \sqrt{2}\text{kg}$ και $K=20\text{N/m}$, να ευρεθεί το γραμμικοποιημένο μοντέλο του συστήματος στην περιοχή ενός σημείου ισορροπίας. Τί συμπεράσματα εξάγετε από την ευστάθεια ή την αστάθεια του ανωτέρω γραμμικού μοντέλου ως προς την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του συστήματος;
4. Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος ως προς το διάνυσμα

$$\mathbf{x}^T = [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2]$$

εάν το ελατήριο δεν θεωρείται οριζόντιο κατά την κίνηση των μαζών.

Λύση

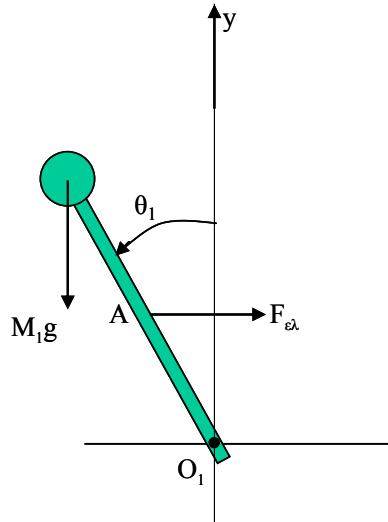
1. Η επιμήκυνση του ελατηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα θα είναι

$$\Delta D = L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2)$$

Συνεπώς η τάση του ελατηρίου θα είναι

$$F_{ελ} = K * \Delta D = K[L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2)]$$

Ας θεωρηθεί η περιστροφή της μάζας M_1 ως προς τον άξονα O_1 που φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα.



Στο σύστημα δρούν οι ακόλουθες δυνάμεις οι οποίες δημιουργούν ροπές ως προς το O_1 ως εξής

Το βάρος της μάζας M_1 με ροπή

$$T_1 = M_1 g 2L * \eta\mu(\theta_1)$$

Η δύναμη της τάσης του ελατηρίου με ροπή

$$T_2 = -F_{ελ} L \sigma\upsilon\nu(\theta_1) = -KL^2[\eta\mu(\theta_1) + \eta\mu(\theta_2)]\sigma\upsilon\nu(\theta_1)$$

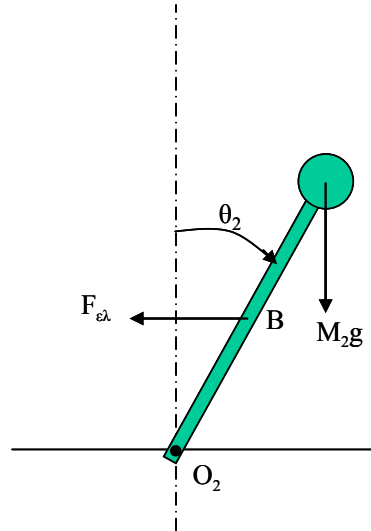
Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση, λαμβάνεται

$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = M_1 (2L)^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = T_1 + T_2 = M_1 g 2L \eta\mu(\theta_1) - KL^2[\eta\mu(\theta_1) + \eta\mu(\theta_2)]\sigma\upsilon\nu(\theta_1)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{g}{2L} \eta\mu(\theta_1) - \frac{K}{4M_1} [\eta\mu(\theta_1) + \eta\mu(\theta_2)] \sigma\upsilon\nu(\theta_1)$$

Ας θεωρηθεί η περιστροφή της μάζας M_2 ως προς τον άξονα O_2 που φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα.



Στο σύστημα δρούν οι ακόλουθες δυνάμεις οι οποίες δημιουργούν ροπές ως προς το O_2 ως εξής (οι ροπές θεωρούνται θετικές εάν τείνουν να αυξήσουν τη γωνία θ_2).

Το βάρος της μάζας M_2 με ροπή

$$\hat{T}_1 = M_2 g 2L * \eta\mu(\theta_1)$$

Η δύναμη της τάσης του ελατηρίου με ροπή

$$\hat{T}_2 = -F_{ελ} L \sigma\upsilon\nu(\theta_2) = -KL^2 [\eta\mu(\theta_1) + \eta\mu(\theta_2)] \sigma\upsilon\nu(\theta_2)$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση, λαμβάνεται

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = M_2 (2L)^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = M_2 g 2L \eta\mu(\theta_2) - KL^2 [\eta\mu(\theta_1) + \eta\mu(\theta_2)] \sigma\upsilon\nu(\theta_2)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{g}{2L} \eta\mu(\theta_2) - \frac{K}{4M_2} [\eta\mu(\theta_1) + \eta\mu(\theta_2)] \sigma\upsilon\nu(\theta_2)$$

Οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς το διάνυσμα x που δίδεται θα είναι

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{2L} \eta\mu(x_1) - \frac{K}{4M_1} [\eta\mu(x_1) + \eta\mu(x_3)] \sigma\upsilon\nu(x_1)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{g}{2L} \eta\mu(x_3) - \frac{K}{4M_2} [\eta\mu(x_1) + \eta\mu(x_3)] \sigma\upsilon\nu(x_3)$$

2. Εάν $M_1=M_2=M$, τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων

$$x_2 = 0$$

$$\frac{g}{2L} \eta\mu(x_1) - \frac{K}{4M} [\eta\mu(x_1) + \eta\mu(x_3)] \sigma\upsilon\nu(x_1) = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$\frac{g}{2L} \eta\mu(x_3) - \frac{K}{4M} [\eta\mu(x_1) + \eta\mu(x_3)] \sigma\upsilon\nu(x_3) = 0$$

Πρώτη περίπτωση

Από τη δεύτερη και τέταρτη εξίσωση, εάν θεωρηθεί

$$\eta\mu(x_3)[\eta\mu(x_1) + \eta\mu(x_3)] \sigma\upsilon\nu(x_3) \neq 0$$

λαμβάνεται

$$\frac{\eta\mu(x_1)}{\eta\mu(x_3)} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x_1)}{\sigma\upsilon\nu(x_3)}$$

ή ισοδύναμα

$$\epsilon\phi(x_1) = \epsilon\phi(x_3)$$

ή ισοδύναμα

$$x_1 = x_3$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση, λαμβάνεται καθώς $\eta\mu(x_1)$ δεν μηδενίζεται εξ υποθέσεως

$$\sigma\upsilon\nu(x_1) = \frac{gM}{KL}$$

Είναι προφανές ότι για να υπάρχει πραγματική γωνία x_1 πρέπει

$$\frac{gM}{KL} \leq 1$$

Το φυσικό νόημα του περιορισμού είναι το ακόλουθο. Εάν το K είναι αρκετά μικρό ώστε να μην ισχύει η ανισότητα, η δύναμη του ελατηρίου είναι μικρή και η ροπή της ως προς το σημείο περιστροφής δεν μπορεί να αντισταθμίσει τη ροπή του βάρους με αποτέλεσμα οι μάζες να κινηθούν προς τα κατώτερα σημεία της διάταξης.

Εάν

$$0 \leq \theta_e = \tau\omicron\xi \sigma\upsilon\nu\left(\frac{gM}{KL}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

τα σημεία ισορροπίας που προκύπτουν θα είναι

$$\underline{x}_{1e}^T = [\theta_e \quad 0 \quad \theta_e \quad 0]$$

$$\underline{x}_{2e}^T = [-\theta_e \quad 0 \quad -\theta_e \quad 0]$$

Δεύτερη περίπτωση

Εάν

$$\eta\mu(x_3)[\eta\mu(x_1) + \eta\mu(x_3)] \sigma\upsilon\nu(x_3) = 0$$

είναι σαφές ότι

$$\sigma\upsilon\nu(x_3) \neq 0$$

διαφορετικά από την τέταρτη εξίσωση προκύπτει ότι και

$$\eta\mu(x_3) = 0$$

αδύνατο αφού πρέπει

$$\sigma\upsilon\nu^2(x_3) + \eta\mu^2(x_3) = 1$$

Εάν

$$[\eta\mu(x_1) + \eta\mu(x_3)] = 0$$

προκύπτει από τη δεύτερη και τέταρτη εξίσωση ότι

$$\eta\mu(x_1) = \eta\mu(x_3) = 0$$

οπότε

$$x_1 = x_3 = k\pi$$

με k ακέραιο.

Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται εάν υποτεθεί ότι

$$\eta\mu(x_3) = 0$$

3. Το γραμμικοποιημένο μοντέλο του συστήματος θα είναι

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \bigg|_{x=x_e}$$

Καθώς

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{g}{2L} \sigma\upsilon\nu(x_1) - \frac{K}{4M} [\sigma\upsilon\nu^2(x_1) - \eta\mu^2(x_1) - \eta\mu(x_1)\eta\mu(x_3)]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -\frac{K}{4M} \sigma \nu \nu(x_3) \sigma \nu \nu(x_1)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = -\frac{K}{4M} \sigma \nu \nu(x_1) \sigma \nu \nu(x_3)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{g}{2L} \sigma \nu \nu(x_3) - \frac{K}{4M} [-\eta \mu(x_1) \eta \mu(x_3) - \eta \mu^2(x_3) + \sigma \nu \nu^2(x_3)]$$

θα είναι για τις τιμές που δίδονται

α. Για το σημείο ισορροπίας

$$x_1 = x_3 = 0$$

θα είναι

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{2L} - \frac{K}{4M} & 0 & \frac{-K}{4M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K}{4M} & 0 & \frac{g}{2L} - \frac{K}{4M} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.4645 & 0 & -3.5355 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.5355 & 0 & 1.4645 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές της A_1 είναι

$$-2.2361$$

$$2.2361$$

$$0 + 1.4391i$$

$$0 - 1.4391i$$

Επειδή το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ασταθές και το μη γραμμικό σύστημα θα είναι ασταθές στο σημείο αυτό ισορροπίας

β. Για το σημείο ισορροπίας

$$x_1 = x_3 = \pi$$

θα είναι

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{2L} - \frac{K}{4M} & 0 & \frac{-K}{4M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K}{4M} & 0 & -\frac{g}{2L} - \frac{K}{4M} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8.5355 & 0 & -3.5355 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.5355 & 0 & -8.5355 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές της A_2 είναι

$$0 + 3.4743i$$

$$0 - 3.4743i$$

$$0 + 2.2361i$$

$$0 - 2.2361i$$

Επειδή το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ευσταθές αλλά έχει πόλους επάνω στον φανταστικό άξονα δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για το μη γραμμικό σύστημα στο σημείο αυτό ισορροπίας

γ. Για τις τιμές που δίδονται θα είναι

$$\sigma\upsilon\nu(x_1) = \sigma\upsilon\nu(x_3) = \frac{gM}{KL} = \frac{10 * \sqrt{2}}{20 * 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Για το σημείο ισορροπίας

$$x_1 = x_3 = \tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

θα είναι

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g\sqrt{2}}{4L} + \frac{K}{8M} & 0 & \frac{-K}{8M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K}{8M} & 0 & \frac{g\sqrt{2}}{4L} + \frac{K}{8M} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5.3033 & 0 & -1.7678 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7678 & 0 & 5.3033 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές της A_3 είναι

$$-2.6591$$

$$-1.8803$$

$$2.6591$$

$$1.8803$$

Επειδή το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ασταθές και το μη γραμμικό σύστημα θα είναι ασταθές στο σημείο αυτό ισορροπίας

Για το σημείο ισορροπίας

$$x_1 = x_3 = -\frac{\pi}{4}$$

θα είναι

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g\sqrt{2}}{4L} + \frac{K}{8M} & 0 & \frac{-K}{8M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K}{8M} & 0 & \frac{g\sqrt{2}}{4L} + \frac{K}{8M} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5.3033 & 0 & -1.7678 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7678 & 0 & 5.3033 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές της A_4 είναι

-2.6591

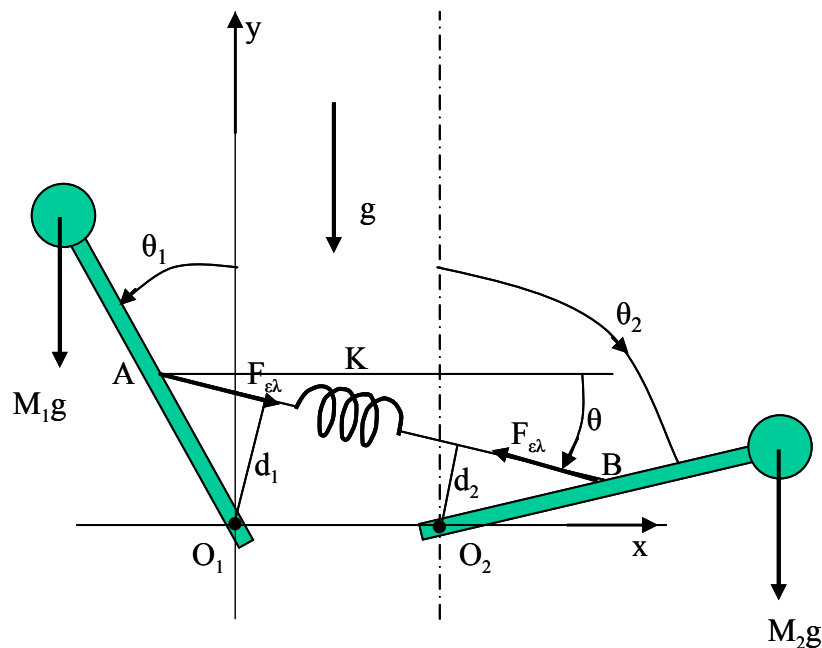
-1.8803

2.6591

1.8803

Επειδή το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ασταθές και το μη γραμμικό σύστημα θα είναι ασταθές στο σημείο αυτό ισορροπίας

4.



Στην περίπτωση αυτή το σύστημα εμφανίζει τη μορφή του ανωτέρω Σχήματος. Οι συντεταγμένες των μέσων των ράβδων A και B αντίστοιχα ως προς το ορθογώνιο σύστημα x-y που φαίνεται στο Σχήμα θα είναι

$$x_A = -L\eta\mu(\theta_1)$$

$$y_A = L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)$$

$$x_B = L\eta\mu(\theta_2) + D$$

$$y_B = L\sigma\upsilon\nu(\theta_2)$$

Η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι

$$\begin{aligned}\Delta D &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} - D = \\ &= \sqrt{[L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D]^2 + [L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)]^2} - D\end{aligned}$$

Συνεπώς η τάση του ελατηρίου θα είναι

$$F_{ελ} = K * \Delta D = K \left[\sqrt{[L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D]^2 + [L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)]^2} - D \right]$$

Η γωνία θ που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα AB με την οριζόντιο θα είναι

$$\theta = \text{τοξεφ} \left\{ \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right\} = \text{τοξεφ} \left\{ \frac{L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)}{L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D} \right\}$$

Η απόσταση d_1 του O_1 από το AB θα είναι

$$d_1 = L\sigma\upsilon\nu(\theta_1 - \theta) = L\sigma\upsilon\nu \left(\theta_1 - \text{τοξεφ} \left\{ \frac{L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)}{L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D} \right\} \right)$$

Ας θεωρηθεί η περιστροφή της μάζας M_1 ως προς τον άξονα O_1 . Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα λαμβάνεται

$$\begin{aligned}J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= M_1 (2L)^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = M_1 g 2L\eta\mu(\theta_1) - F_{ελ} d_1 = \\ &= M_1 g 2L\eta\mu(\theta_1) - K \left[\sqrt{[L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D]^2 + [L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)]^2} - D \right] * L\sigma\upsilon\nu \left(\theta_1 - \text{τοξεφ} \left\{ \frac{L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)}{L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D} \right\} \right)\end{aligned}$$

Η απόσταση d_2 του O_2 από το AB θα είναι

$$d_2 = L\sigma\upsilon\nu(\theta_2 + \theta) = L\sigma\upsilon\nu \left(\theta_2 + \text{τοξεφ} \left\{ \frac{L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)}{L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D} \right\} \right)$$

Ας θεωρηθεί η περιστροφή της μάζας M_2 ως προς τον άξονα O_2 . Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα λαμβάνεται

$$\begin{aligned}J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= M_2 (2L)^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = M_2 g 2L\eta\mu(\theta_2) - F_{ελ} d_2 = \\ &= M_2 g 2L\eta\mu(\theta_2) - K \left[\sqrt{[L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D]^2 + [L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)]^2} - D \right] * L\sigma\upsilon\nu \left(\theta_2 + \text{τοξεφ} \left\{ \frac{L\sigma\upsilon\nu(\theta_2) - L\sigma\upsilon\nu(\theta_1)}{L\eta\mu(\theta_1) + L\eta\mu(\theta_2) + D} \right\} \right)\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις καταστάσεως θα είναι

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{2L} \eta\mu(x_1) - \frac{K}{4M_1 L^2} \left[\sqrt{[L\eta\mu(x_1) + L\eta\mu(x_3) + D]^2 + [L\sigma\upsilon\nu(x_3) - L\sigma\upsilon\nu(x_1)]^2} - D \right] * L\sigma\upsilon\nu \left(x_1 - \text{τοξεφ} \left\{ \frac{L\sigma\upsilon\nu(x_3) - L\sigma\upsilon\nu(x_1)}{L\eta\mu(x_1) + L\eta\mu(x_3) + D} \right\} \right)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{g}{2L} \eta\mu(x_3) - \frac{K}{4M_2 L^2} \left[\sqrt{[L\eta\mu(x_1) + L\eta\mu(x_3) + D]^2 + [L\sigma\upsilon\nu(x_3) - L\sigma\upsilon\nu(x_1)]^2} - D \right] * L\sigma\upsilon\nu \left(x_3 + \text{τοξεφ} \left\{ \frac{L\sigma\upsilon\nu(x_3) - L\sigma\upsilon\nu(x_1)}{L\eta\mu(x_1) + L\eta\mu(x_3) + D} \right\} \right)$$