

**Ε.Μ.Π. ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

ΤΟΜΕΑΣ: Σ. Ε. Ρ.

ΜΑΘΗΜΑ: Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο

ΕΞΑΜΗΝΟ: 5^ο

ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ: Τ. Γ. Κουσιουρής
Γ. Παπαβασιλόπουλος

Αριθμός Μητρώου	Ονοματεπώνυμο

ΠΕΡΙΟΔΟΣ: Σεπτεμβρίου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/10/2007

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2.5 ώρες

ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ

ΘΕΜΑ	Βαθμολογία	Βαθμός Σπουδαστή
ΘΕΜΑ 1.α	0.75	
ΘΕΜΑ 1.β	1	
ΘΕΜΑ 1.γ	0.75	
ΘΕΜΑ 1.δ1	1	
ΘΕΜΑ 1.δ2	1	
ΘΕΜΑ 1.ε	1	
ΘΕΜΑ 1.στ	0.75	
ΘΕΜΑ 2	2.25	
ΘΕΜΑ 3	2	
ΣΥΝΟΛΟ	10.5	

Στα θέματα πολλαπλής επιλογής η λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται αρνητικά όσο και η ορθή.

Επιτρέπεται η χρήση του βιβλίου των Dorf & Bishop

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Κατά την εξέταση του μαθήματος δόθηκαν 64 παραλλαγές των θεμάτων. Μία εξ αυτών φαίνεται στις σελίδες 2-7.

Οι απαντήσεις δίδονται με τρόπο ώστε να ισχύουν για όλες τις παραλλαγές. Για το 1^ο θέμα, το οποίο είναι πολλαπλής επιλογής, δίδεται και αιτιολογία των απαντήσεων, η οποία αν και δεν ζητείται είναι απαραίτητη για την κατανόηση των λύσεων.

ΘΕΜΑ 1.α

Η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος κλειστού βρόχου είναι,

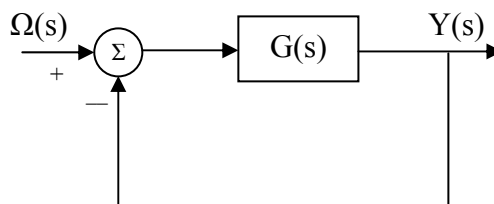
$$s^3 + (7 + 0.2K)s^2 + (10 + 0.6K)s + K = 0$$

Σημειώστε στον πιο κάτω πίνακα όλες τις τιμές του K που κάνουν το σύστημα ευσταθές.

$K > 0$	$K > -35$	$K < 0$	$K < 35$	$0 < K < 29.66$	$0 > K > -29.66$	Υπάρχουν, αλλά δεν είναι καμμία από τις προηγούμενες επιλογές	Δεν υπάρχουν

ΘΕΜΑ 1.β

Δίνεται το πιο κάτω διάγραμμα:



Διακρίνουμε τις εξής τέσσερις περιπτώσεις:

$$1. \quad G(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$2. \quad G(s) = \frac{Ks(s+1)}{(s+2)(s-1)}$$

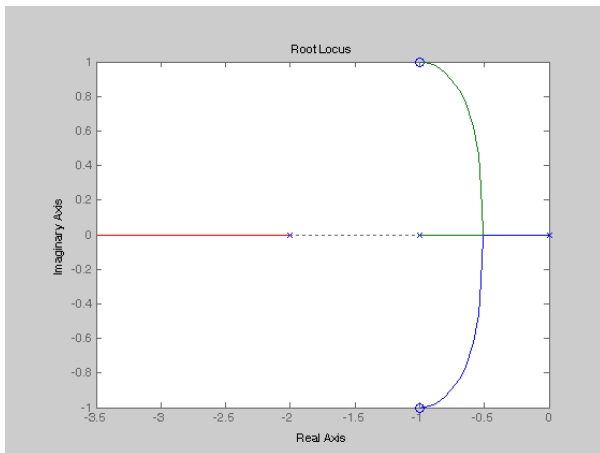
$$3. \quad G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$4. \quad G(s) = \frac{K(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+2)}$$

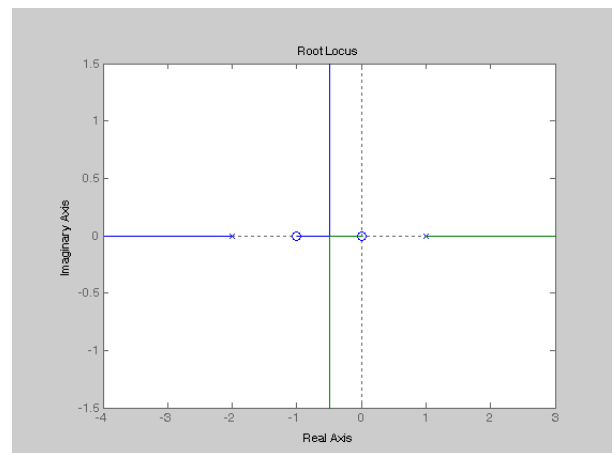
με $K > 0$. Αντιστοιχίστε στον πιο κάτω πίνακα (αν είναι δυνατόν) κάθε μια συνάρτηση με τον σωστό γεωμετρικό τόπο των ριζών.

	(α)	(β)	(γ)	(δ)	Κανένας γεωμετρικός τόπος των ριζών
1					
2					
3					
4					

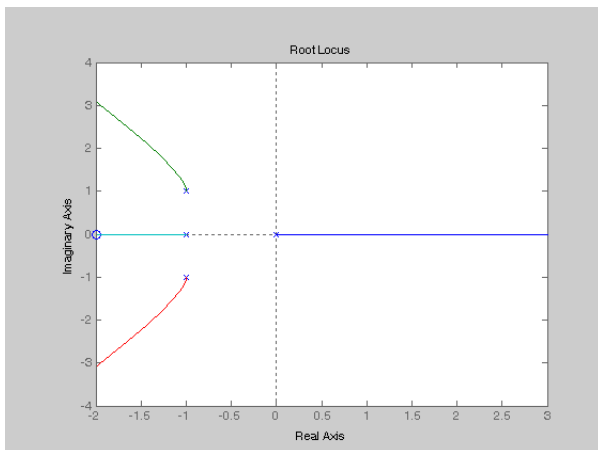
(α)



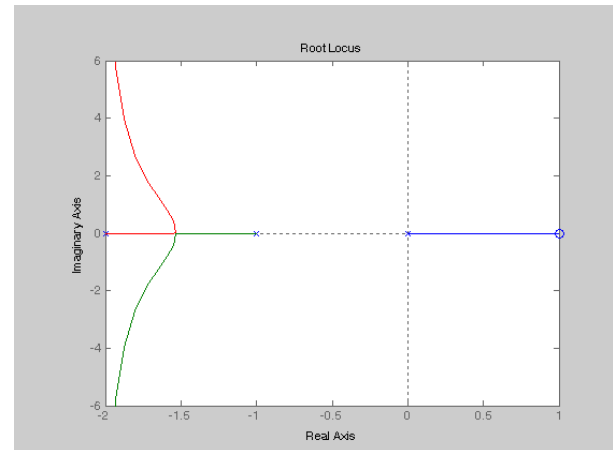
(β)



(γ)



(δ)

**ΘΕΜΑ 1.γ**

Δίνονται οι μαθηματικές παραστάσεις τεσσάρων δυναμικών συστημάτων:

1) $\dot{x} = 2x - 3x^2$

2) $\dot{x} = -2|x| - 3x^3$

3) $x(k+1) = -x(k) + 3x(k)^2$

4) $x(k+1) = |x(k)| - 3x(k)^2$

Να επιλεγούν τα σημεία ισορροπίας για κάθε ένα από τα πιο πάνω συστήματα.

	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	Υπάρχουν, αλλά δεν είναι καμμία από τις προηγούμενες επιλογές	Δεν υπάρχουν
(1)							
(2)							
(3)							
(4)							

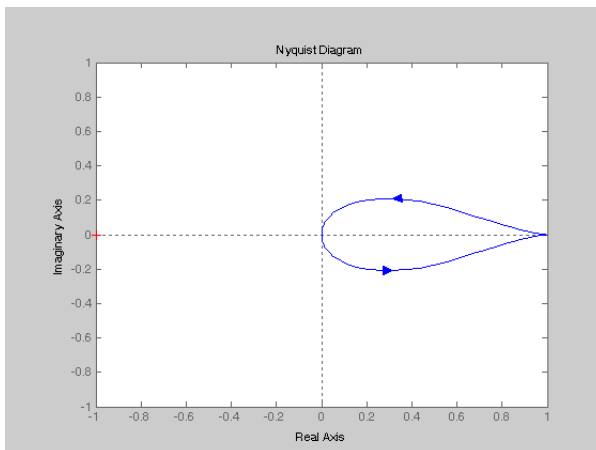
ΘΕΜΑ 1.8

Θεωρούμε τις συναρτήσεις ανοιχτού βρόχου του δευτέρου θέματος με $K=1$. Τα υποψήφια διαγράμματα Nyquist παρουσιάζονται στα ακόλουθα σχήματα.

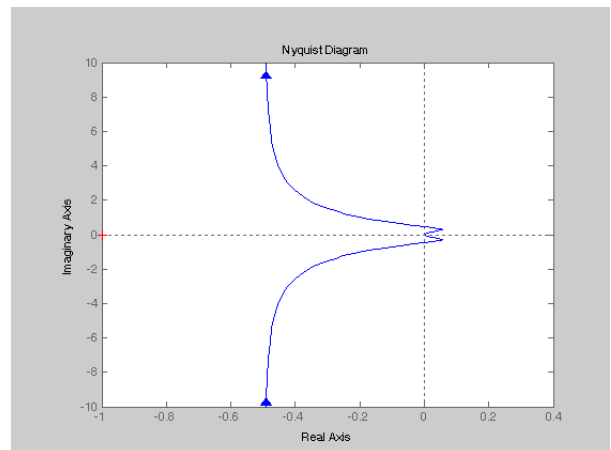
- 1) Αντιστοιχίστε στον πιο κάτω πίνακα (αν είναι δυνατόν) τις συναρτήσεις ανοιχτού βρόχου με το σωστό διάγραμμα Nyquist.
- 2) Με βάση το θεώρημα του Nyquist να βρεθεί αν τα συστήματα κλειστού βρόχου, εκείνων που αντιστοιχήσατε στο ερώτημα (1), είναι ευσταθή και στην περίπτωση αστάθειας, πόσοι είναι οι ασταθείς πόλοι.

	(Α)	(Β)	(Γ)	(Δ)	Κανένα	Ευσταθές	Ασταθές	Αριθμός ασταθών πόλων
1								
2								
3								
4								

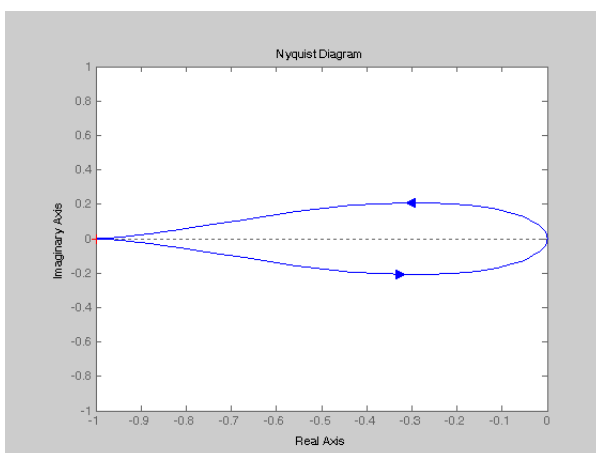
(Α)



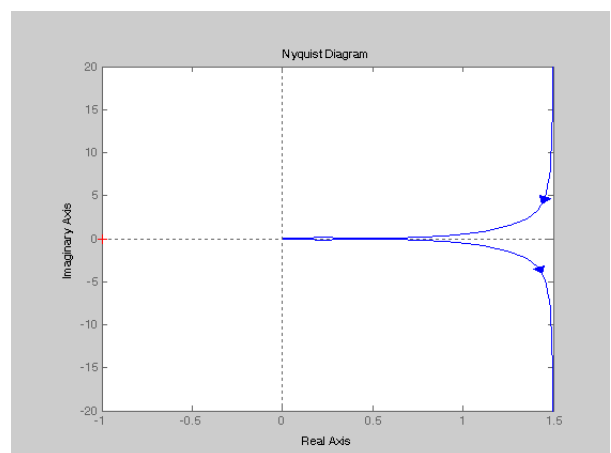
(Β)



(Γ)

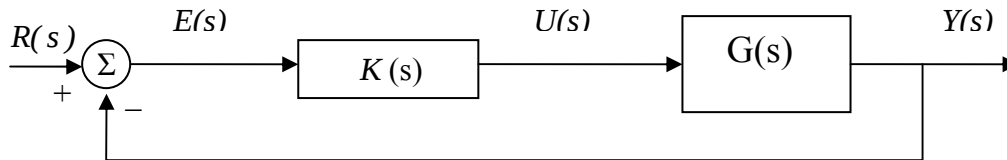


(Δ)



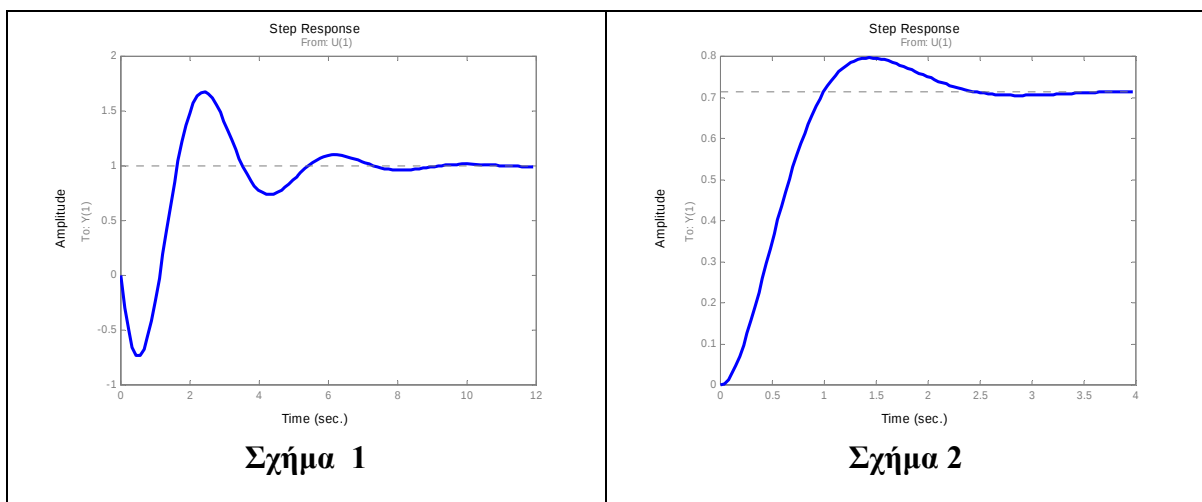
ΘΕΜΑ 1.ε

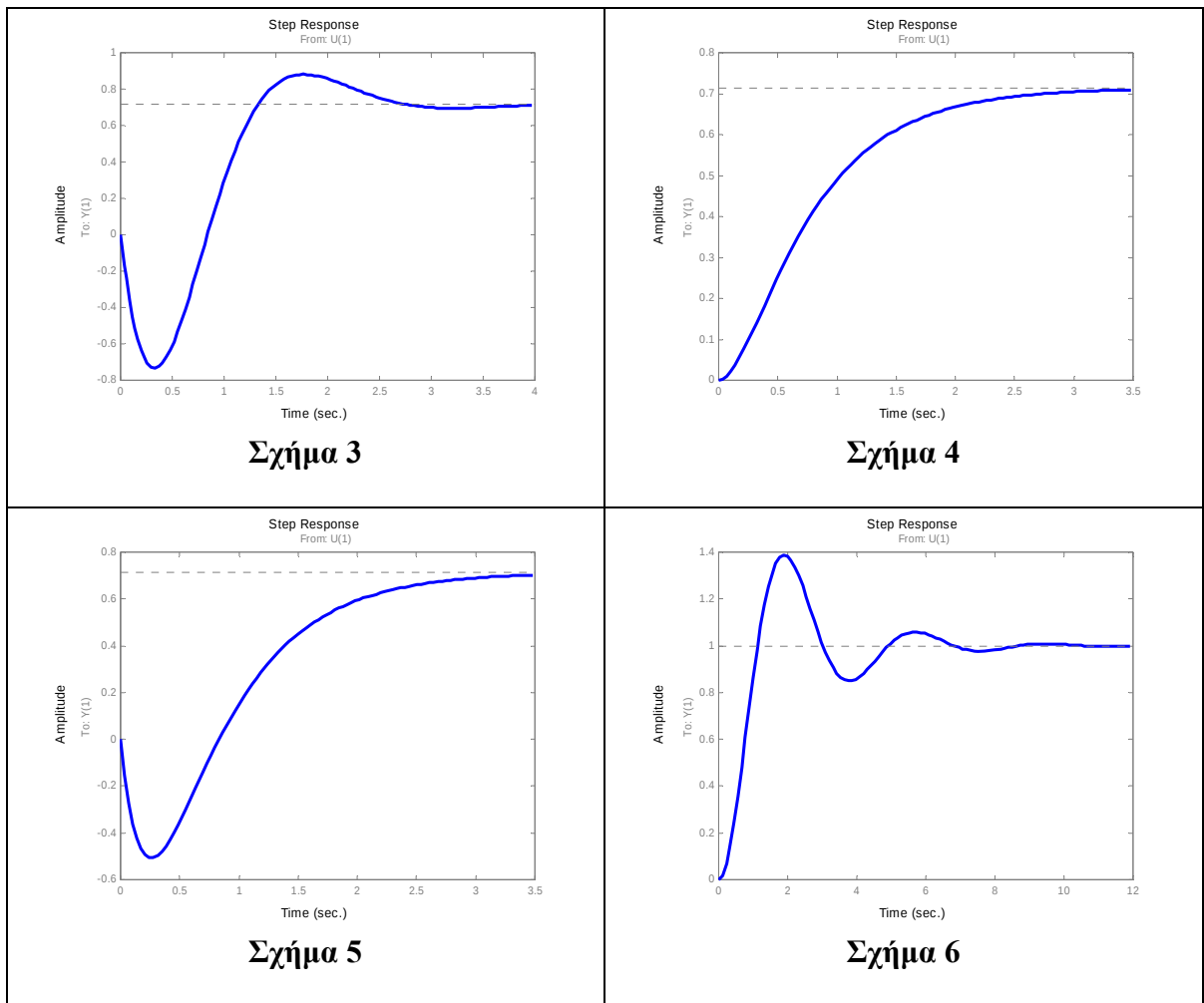
Για το σύστημα ελέγχου του Σχήματος δίδονται



K(s)	G(s)	Αντιστοιχία
$K(s)=\frac{5}{s+2}$	$G(s)=\frac{1}{s+1}$	
$K(s)=\frac{3}{s}$	$G(s)=\frac{1}{s+1}$	
$K(s)=\frac{3}{s}$	$G(s)=\frac{1-s}{s+4}$	
$K(s)=5$	$G(s)=\frac{1-s}{s^2+8s+2}$	

Να αντιστοιχίσετε τις βηματικές αποκρίσεις των αντισταθμισμένων συστημάτων με τα ακόλουθα σχήματα.





ΘΕΜΑ 1.στ

Δίδεται το σύστημα

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & a \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \underline{x}$$

Σημειώσατε τις σωστές απαντήσεις.

Το σύστημα είναι μη ελέγξιμο για

a=0	a=1	a=-1	a=2	a=-2	Κανένα a
☐	☐	☐	☐	☐	☐

Το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο για

a=0	a=1	a=-1	a=2	a=-2	Κανένα a
☐	☐	☐	☐	☐	☐

ΘΕΜΑ 2



Για το σύστημα κλειστού βρόχου του Σχήματος με $K \geq 0$ δίδεται ότι

$$G(s) = \frac{(as+1)}{(s+1)(s+2)}$$

με a πραγματικό (θετικό ή αρνητικό).

1. Να προσδιοριστούν
 - Τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα συναρτήσει του a .
 - Τα σημεία τομής με το φανταστικό άξονα συναρτήσει του a .
2. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$ για $a=-4$.
3. Σε Καρτεσιανό διάγραμμα $(x,y)=(a,K)$ να προσδιοριστεί η περιοχή που το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

ΘΕΜΑ 3



Για το σύστημα κλειστού βρόχου του Σχήματος με $K \geq 0$ δίδεται ότι

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)}{s^4}$$

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος για $K \geq 0$ αφού προσδιοριστούν

- Οι περιοχές του πραγματικού άξονα οι οποίες είναι μέρη του τόπου.
- Οι γωνίες αναχώρησης από τους πόλους του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Οι γωνίες άφιξης στα μηδενικά του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Τα σημεία τομής με το φανταστικό άξονα.
- Το σημείο θλάσης επάνω στον πραγματικό άξονα.

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.α

Θεωρούμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου:

$$s^3 + (7 + 0.2K)s^2 + (10 + 0.6K)s + K = 0$$

Ο προσδιορισμός των τιμών του K που κάνουν το σύστημα ευσταθές γίνεται με εφαρμογή του κριτηρίου Routh. Σχηματίζουμε τον πίνακα:

s^3	1	$10 + 0.6K$
s^2	$7 + 0.2K$	K
s^1	$\frac{0.12K^2 + 5.2K + 70}{7 + 0.2K}$	0
s^0	K	

Για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές πρέπει

α) $7 + 0.2K > 0$ ή $K > -35$,

β) $\frac{0.12K^2 + 5.2K + 70}{7 + 0.2K} > 0$, και δεδομένου ότι ο παρανομαστής είναι θετικός απαιτείται

$0.12K^2 + 5.2K + 70 > 0$ το οποίο ισχύει πάντα γιατί η διακρίνουσα $\Delta = 5.2^2 - 4(0.12)(70) < 0$ και

γ) $K > 0$.

Δηλαδή για να συναληθεύουν οι ανισότητες πρέπει $K > 0$. Αντίστοιχα παίρνουμε για τις διάφορες χαρακτηριστικές εξισώσεις:

Χαρακτηριστική Εξίσωση	Περιοχή τιμών του K για ευστάθεια
$s^3 + (7 + 0.2K)s^2 + (10 + 0.6K)s + K = 0$	$K > 0$
$s^3 + (7 - 0.2K)s^2 + (10 - 0.6K)s - K = 0$	$K < 0$
$s^3 + (7 - 0.2K)s^2 + (10 + 0.6K)s + K = 0$	$0 < K < 29.66$
$s^3 + (7 + 0.2K)s^2 + (10 - 0.6K)s - K = 0$	$0 > K > -29.66$

ΘΕΜΑ 1.β

Δίνονται οι συναρτήσεις ανοιχτού βρόχου,

$$1. \quad G(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

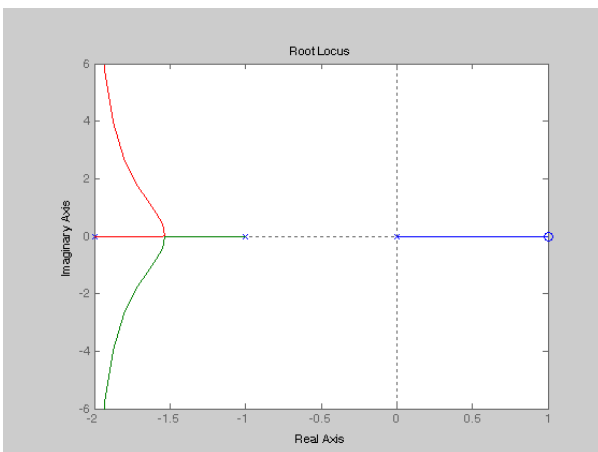
$$2. \quad G(s) = \frac{Ks(s+1)}{(s+2)(s-1)}$$

$$3. \quad G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$$

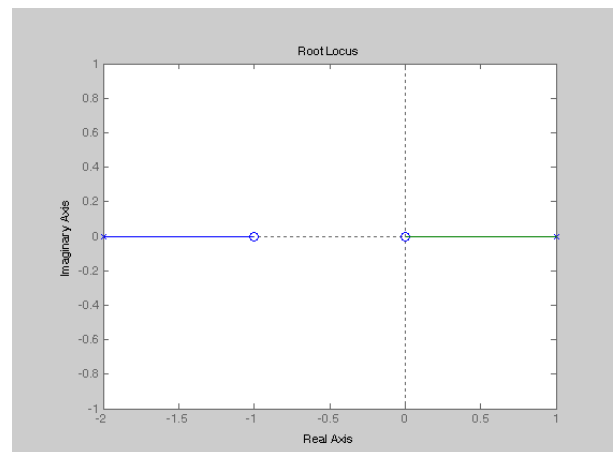
$$4. \quad G(s) = \frac{K(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+2)}$$

με $K > 0$. Ακολουθούν οι γεωμετρικοί τόποι των ριζών και ο πίνακας με τις αντιστοιχίες:

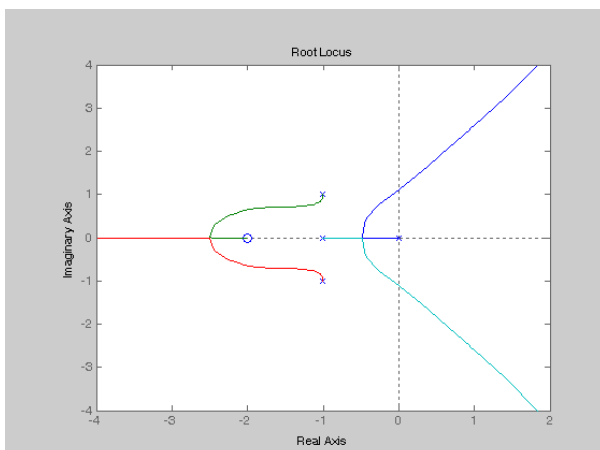
(1)



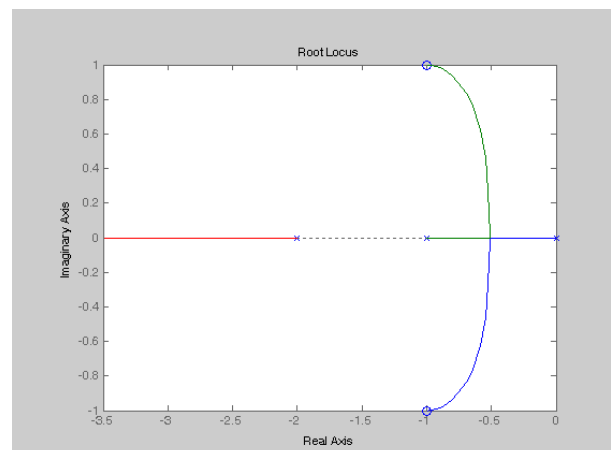
(2)



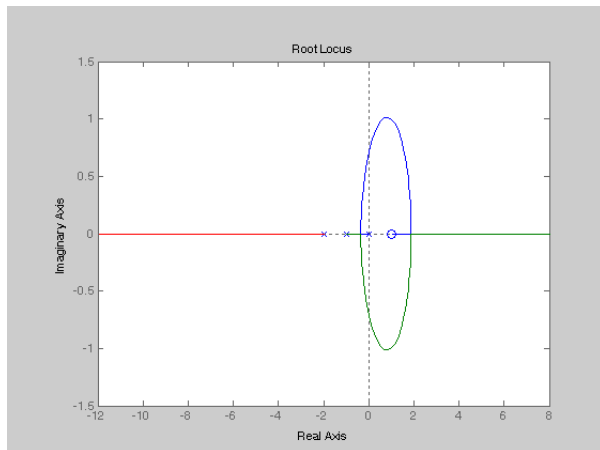
(3)



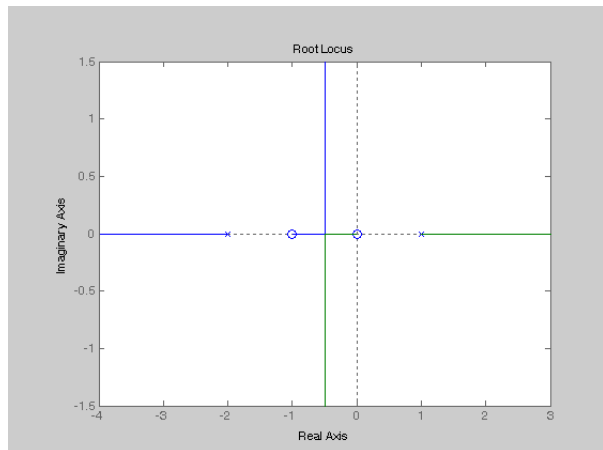
(4)



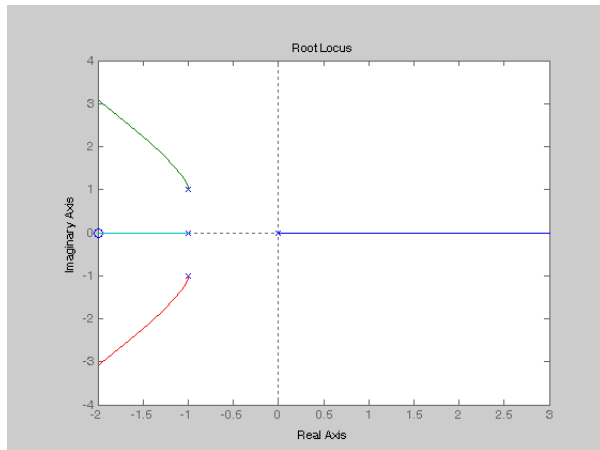
(5)



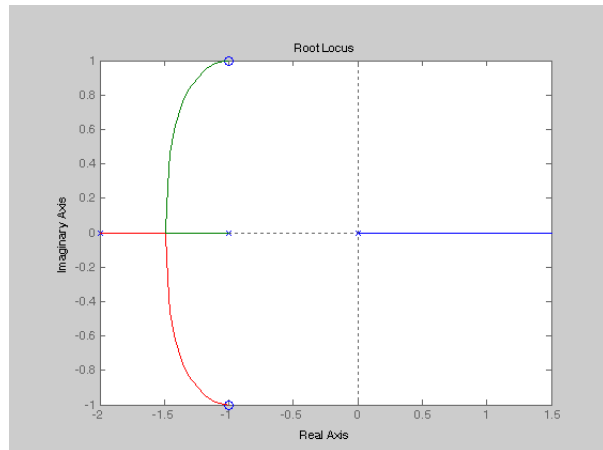
(6)



(7)



(8)



$G(s)$	Αντιστοιχία	Μηδενικά	Πόλοι	Αιτιολογία
$G(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$	(1)	1	0, -1, -2	Η αναχώρηση των κλάδων του γ.τ.ρ. γίνεται από τους πόλους της $G(s)$ και η άφιξη γίνεται στα μηδενικά, πεπερασμένα ή άπειρα της $G(s)$. Ο (1) έχει σωστούς πόλους και μηδενικά και τα τμήματα στον άξονα είναι στα αριστερά ενός περιττού αριθμού πόλων και μηδενικών ($K > 0$). Ο (5) έχει επίσης σωστούς πόλους και μηδενικά, αλλά τα τμήματα του άξονα έχουν στα δεξιά τους έναν άρτιο αριθμό πόλων και μηδενικών που αντιστοιχεί σε $K < 0$.
$G(s) = \frac{Ks(s+1)}{(s+2)(s-1)}$	(2)	0, -1	-2, 1	Παρόμοια για τον (2) και τον (6).
$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$	(3)	-2	0, -1, $-1 \pm j$	Παρόμοια για τον (3) και τον (7).
$G(s) = \frac{K(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+2)}$	(4)	$-1 \pm j$	0, -1, -2	Παρόμοια για τον (4) και τον (8).

ΘΕΜΑ 1.γ

Θεωρούμε την εξίσωση $\dot{x} = 2x - 3x^2$ και θέτουμε $\dot{x} = 0$ για να προσδιορίσουμε τα σημεία ισορροπίας:

$$0 = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$$

Από αυτές τις εξισώσεις προκύπτουν οι λύσεις $x = 0$ και $x = \frac{2}{3}$.

Αντίστοιχα, για την εξίσωση $\dot{x} = -2|x| - 3x^3$ παίρνουμε

$$0 = -2|x| - 3x^3$$

Για $x > 0$:

$$0 = -2x - 3x^3 = -(2 + 3x^2)x$$

οπότε έχουμε τις λύσεις $x = 0$ και τις μη αποδεκτές, καθότι φανταστικές, $x = \pm j\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Για $x < 0$, από τις εξισώσεις

$$0 = 2x - 3x^3 = (2 - 3x^2)x$$

προκύπτουν οι λύσεις $x = 0$ και $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, όπου από τις δύο τελευταίες γίνεται αποδεκτή εκείνη με το αρνητικό πρόσημο.

Ανάλογα, θεωρούμε την

$$x(k+1) = -x(k) + 3x(k)^2$$

Θέτουμε $x(k+1) = x(k)$ και παίρνουμε για σημεία ισορροπίας τα $x(k) = 0$ και $x(k) = \frac{2}{3}$.

Για την εξίσωση,

$$x(k+1) = |x(k)| - 3x(k)^2$$

διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Εάν $x(k) > 0$, με αντικατάσταση του $x(k+1) = x(k)$ παίρνουμε την λύση $x(k) = 0$.

Εάν $x(k) < 0$ προκύπτουν τα σημεία ισορροπίας $x(k) = 0$ και $x(k) = -\frac{2}{3}$.

Ακολουθεί συνοπτικός πίνακας.

Εξίσωση	Σημεία ισορροπίας
$\dot{x} = 2x - 3x^2$	$0, \frac{2}{3}$
$\dot{x} = -2 x - 3x^3$	$0, -\sqrt{\frac{2}{3}}$
$x(k+1) = -x(k) + 3x(k)^2$	$0, \frac{2}{3}$
$x(k+1) = x(k) - 3x(k)^2$	$0, -\frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ 1.δ

Οι συναρτήσεις ανοιχτού βρόχου είναι:

$$1. \quad G(s) = \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

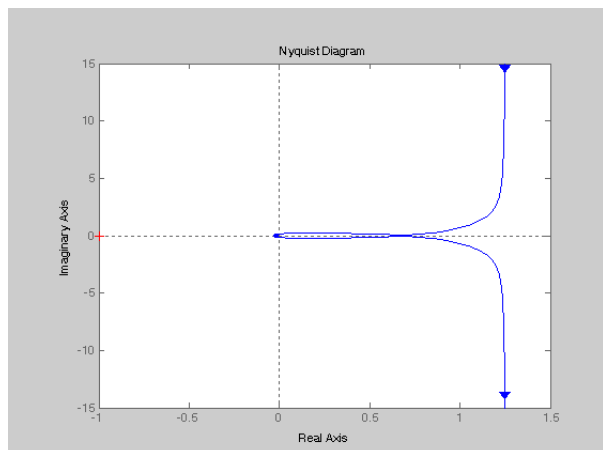
$$2. \quad G(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s-1)}$$

$$3. \quad G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$$

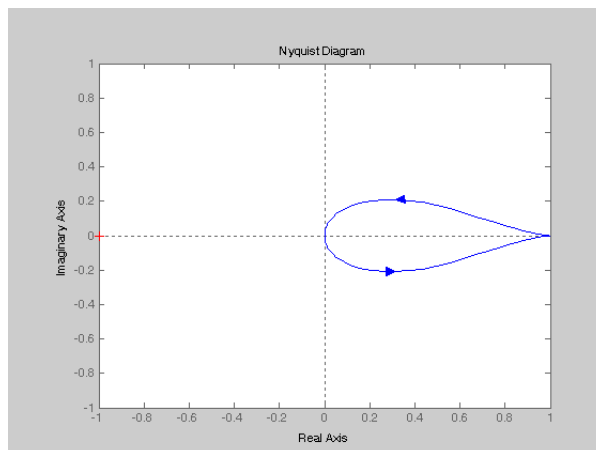
$$4. \quad G(s) = \frac{(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+2)}$$

Ακολουθούν τα προτεινόμενα διαγράμματα Nyquist.

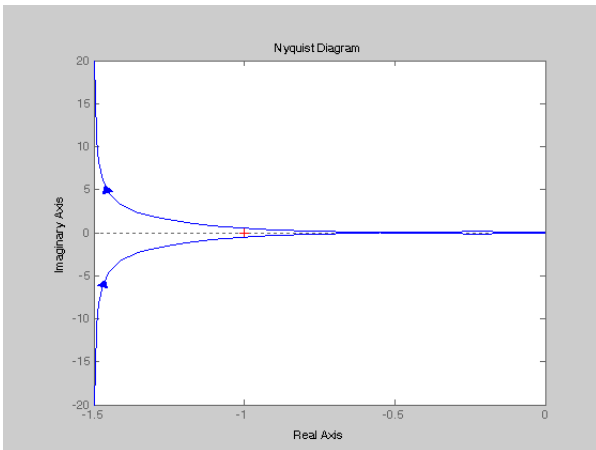
(1)



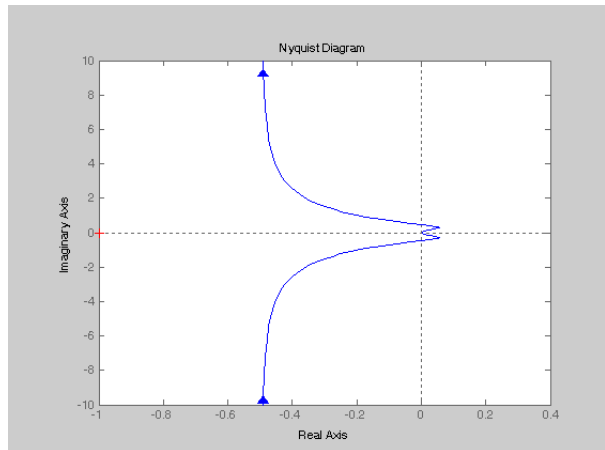
(2)



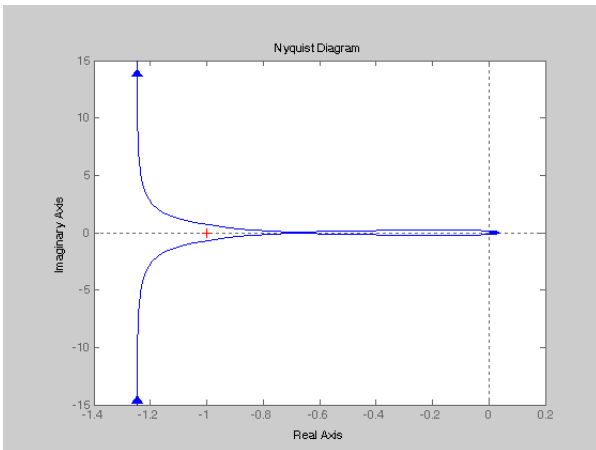
(3)



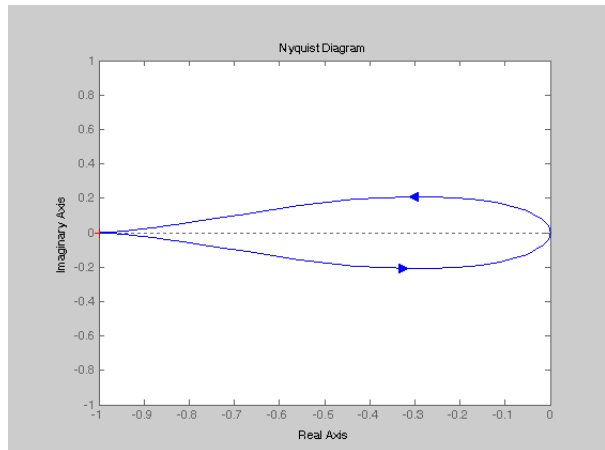
(4)



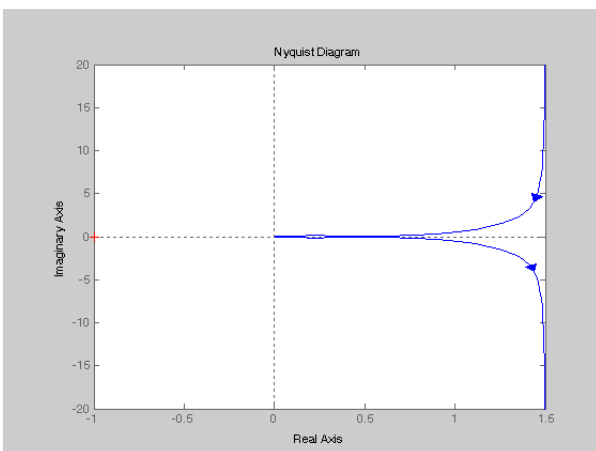
(5)



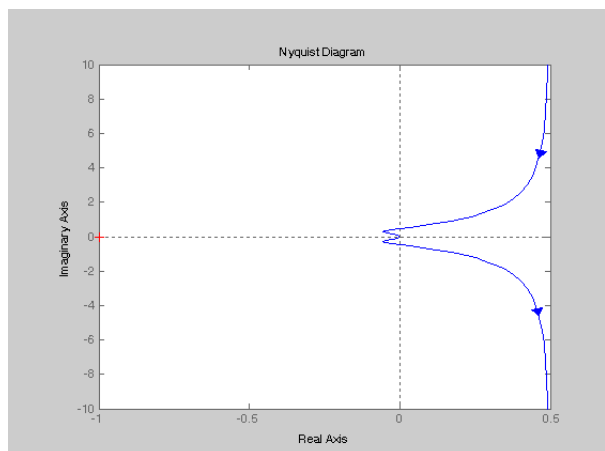
(6)



(7)



(8)



1) Για την αντιστοιχία των διαγραμμάτων Nyquist θεωρούμε

$$1. \quad G(s) = \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{5-\omega^2}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j \frac{2-4\omega^2}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

$$2. \quad G(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s-1)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega^2(\omega^2+3)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j \frac{-2\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

$$3. \quad G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{-\omega^2-6}{\omega^6+\omega^4+4\omega^2+4} + j \frac{\omega^4+2\omega^2-4}{\omega^7+\omega^5+4\omega^3+4\omega}$$

$$4. \quad G(s) = \frac{(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+2)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega^2-2}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j \frac{-\omega^4-2\omega^2-4}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

Επομένως, για $\omega \geq 0$,

$G(s)$	Αντιστοιχία	$Re G(j0)$	$Im G(j0)$	$Re G(j\infty)$	Παρατηρήσεις
$G(s) = \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$	(1)	$\frac{5}{4}$	∞	0	Τα (3), (4), (5), (7) και (8) έχουν λανθασμένο πραγματικό μέρος καθώς $\omega \rightarrow 0$ ή $\omega \rightarrow \infty$. Στα (2), (6) δεν απειρίζεται το φανταστικό μέρος.
$G(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s-1)}$	(2)	0	0	1	Το (6) έχει λάθος $Re G(j\infty)$. Όλα τα άλλα έχουν $Re G(j\infty) = 0$.
$G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$	(3)	$-\frac{3}{2}$	$-\infty$	0	Τα (1), (4), (5), (7) και (8) έχουν λάθος πραγματικό μέρος. Στα (2), (6) το $Im G(j0)$ δεν απειρίζεται.
$G(s) = \frac{(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+2)}$	(4)	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	0	Τα (1), (3), (5), (7) και (8) έχουν λάθος πραγματικό μέρος. Στα (2), (6) δεν απειρίζεται το $Im G(j0)$.

2) Υπολογίζουμε κατά τα γνωστά τον αριθμό των δεξιόστροφων περιελίξεων, N , του σημείου $-1+0j$ και τον συγκρίνουμε με τον αριθμό των πόλων, P , της $G(s)$ στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Ο πιο κάτω πίνακας προκύπτει με χρήση του θεωρήματος Nyquist, όπου Z είναι ο αριθμός των ασταθών πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου και δίνεται από την εξίσωση $Z=N+P$.

$G(s)$	N	P	Ευσταθές	Ασταθές	Αριθμός ασταθών πόλων Z
$G(s) = \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$	1	0		NAI	1
$G(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s-1)}$	0	1		NAI	1
$G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$	0	0	NAI		
$G(s) = \frac{(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+2)}$	0	0	NAI		

ΘΕΜΑ 1.ε

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$H(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$$

Η αναγνώριση της βηματικής απόκρισης είναι δυνατόν να γίνει:

1. Από την τελική τιμή της $y(t)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace θα είναι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{y(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{sY(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sH(s) \frac{1}{s} \right\} = H(0).$$

2. Από την αρχική τιμή της παραγώγου της $y(t)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της αρχικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace θα είναι

$$\{\dot{y}(0^+)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sL(\dot{y}(t))\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{s^2 Y(s)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ s^2 H(s) \frac{1}{s} \right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sH(s)\}.$$

3. Από τη μορφή της βηματικής απόκρισης, εάν δηλαδή εμφανίζει ταλαντώσεις (μιγαδικοί πόλοι της $H(s)$) ή είναι απεριοδική (πραγματικοί πόλοι της $H(s)$).

Για τις περιπτώσεις που δίδονται, θα είναι

K(s)	G(s)	H(s)	$\lim_{t \rightarrow \infty} \{y(t)\}$	$\{\dot{y}(0^+)\}$	Είδος Πόλων	Αντιστοιχία
$\frac{5}{s+2}$	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{5}{s^2+3s+7}$	0.714	0	Μιγαδικοί	Σχήμα 2
$\frac{3}{s}$	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{3}{s^2+s+3}$	1	0	Μιγαδικοί	Σχήμα 6
$\frac{3}{s}$	$G(s)=\frac{1-s}{s+4}$	$\frac{3-3s}{s^2+s+3}$	1	-3	Μιγαδικοί	Σχήμα 1
5	$\frac{1-s}{s^2+8s+2}$	$\frac{5-5s}{s^2+3s+7}$	0.714	-5	Μιγαδικοί	Σχήμα 3
5	$\frac{1-s}{s^2+11s+2}$	$\frac{5-5s}{s^2+6s+7}$	0.714	-5	Πραγματικοί	Σχήμα 5
5	$\frac{1}{s^2+6s+2}$	$\frac{5}{s^2+6s+7}$	0.714	0	Πραγματικοί	Σχήμα 4

ΘΕΜΑ 1.στ

Ας θεωρηθεί το σύστημα

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \underline{x}.$$

Η μήτρα ελεγχιμότητας θα είναι

$$P_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & b & a^2+2b \\ 0 & a & b^2+2a \\ 1 & 1 & 1+2ab \end{bmatrix}.$$

Επειδή

$$\det(P_c) = \det \begin{bmatrix} 0 & b & a^2+2b \\ 0 & a & b^2+2a \\ 1 & 1 & 1+2ab \end{bmatrix} = b^3 - a^3,$$

το σύστημα θα είναι μη ελέγξιμο εάν και μόνο

$$a=b$$

Η μήτρα παρατηρησιμότητας θα είναι

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1+2ab & b^2+2a & a^2+2b \end{bmatrix}.$$

Επειδή

$$\det(P_o) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1+2ab & b^2+2a & a^2+2b \end{bmatrix} = -b^3 + a^3,$$

το σύστημα θα είναι μη παρατηρήσιμο εάν και μόνο

$$a=b.$$

Κατόπιν τούτων οι ορθές απαντήσεις μπορούν να γραφούν στον πίνακα της εκφώνησης, καθώς $b=2$.

ΘΕΜΑ 2

1. Έστω

$$G(s) = \frac{(as+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{(as+1)}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{(as+1)}{s^2+bs+c}.$$

Θα είναι

$$G(j\omega) = \frac{(jas+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{(ja\omega+1)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)} = \frac{(ja\omega+1)[p_1p_2-\omega^2+j\omega(p_1+p_2)]}{[(p_1p_2-\omega^2)^2+\omega^2(p_1+p_2)^2]}.$$

Η κυκλική συχνότητα ω του σημείου τομής με τον πραγματικό άξονα προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{a\omega[p_1p_2-\omega^2]+\omega(p_1+p_2)}{[(p_1p_2-\omega^2)^2+\omega^2(p_1+p_2)^2]} = 0$$

από την οποία προκύπτει

$$\omega=0$$

ή

$$\omega^2 = \frac{ap_1p_2+(p_1+p_2)}{a}$$

Για $\omega=0$ το σημείο τομής με τον πραγματικό άξονα είναι

$$X_1 = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{c}$$

Εάν

$$\frac{ap_1 p_2 + (p_1 + p_2)}{a} = \frac{ac - b}{a} > 0$$

ή ισοδύναμα καθώς τα b, c είναι θετικά

$$a < 0 \quad \eta \quad \frac{b}{c} < a,$$

υπάρχει και δεύτερο σημείο τομής με τον πραγματικό άξονα το οποίο είναι

$$\begin{aligned} X_2 = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \Big|_{\omega = \sqrt{\frac{ap_1 p_2 + (p_1 + p_2)}{a}}} &= \frac{p_1 p_2 - \frac{ap_1 p_2 + (p_1 + p_2)}{a} - a(p_1 + p_2) \frac{ap_1 p_2 + (p_1 + p_2)}{a}}{\left[p_1 p_2 - \frac{ap_1 p_2 + (p_1 + p_2)}{a} \right]^2 + (p_1 + p_2)^2 \frac{ap_1 p_2 + (p_1 + p_2)}{a}} = \\ &= \frac{-\frac{(p_1 + p_2)}{a} [1 + a^2 p_1 p_2 + ap_1 + ap_2]}{\left[\frac{(p_1 + p_2)}{a} \right]^2 [1 + a^2 p_1 p_2 + ap_1 + ap_2]} = -\frac{a}{p_1 + p_2} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Η κυκλική συχνότητα ω η οποία αντιστοιχεί στο σημείο τομής με το φανταστικό άξονα προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{p_1 p_2 - \omega^2 - a\omega^2(p_1 + p_2)}{\left[(p_1 p_2 - \omega^2)^2 + \omega^2(p_1 + p_2)^2 \right]} = 0.$$

Εάν

$$\frac{p_1 p_2}{1 + a(p_1 + p_2)} = \frac{c}{1 - ab} > 0$$

ή ισοδύναμα καθώς τα b, c είναι θετικά

$$a < \frac{1}{b},$$

υπάρχει τομή με τον φανταστικό άξονα για

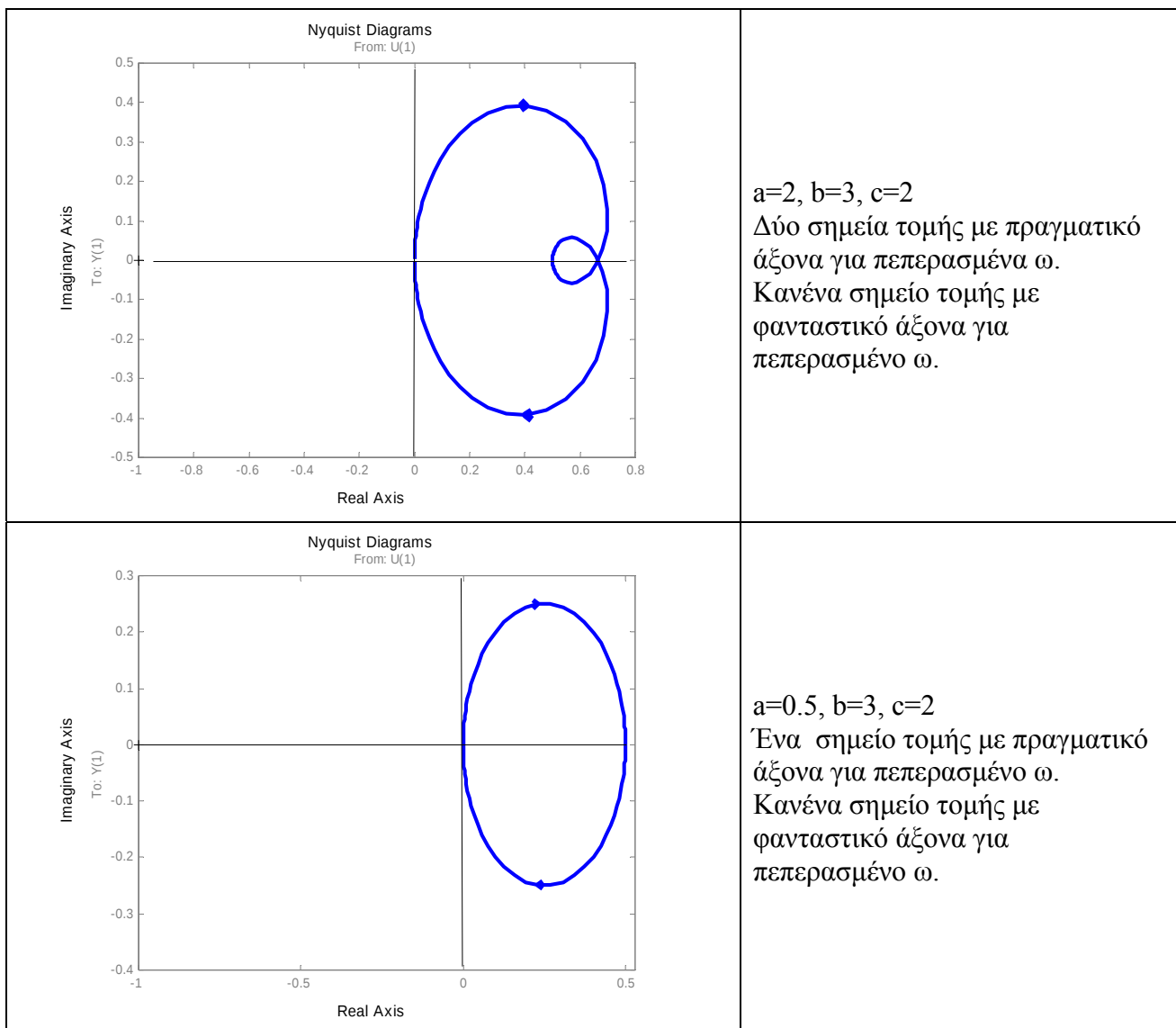
$$\omega^2 = \frac{p_1 p_2}{1 + a(p_1 + p_2)} = \frac{c}{1 - ab}$$

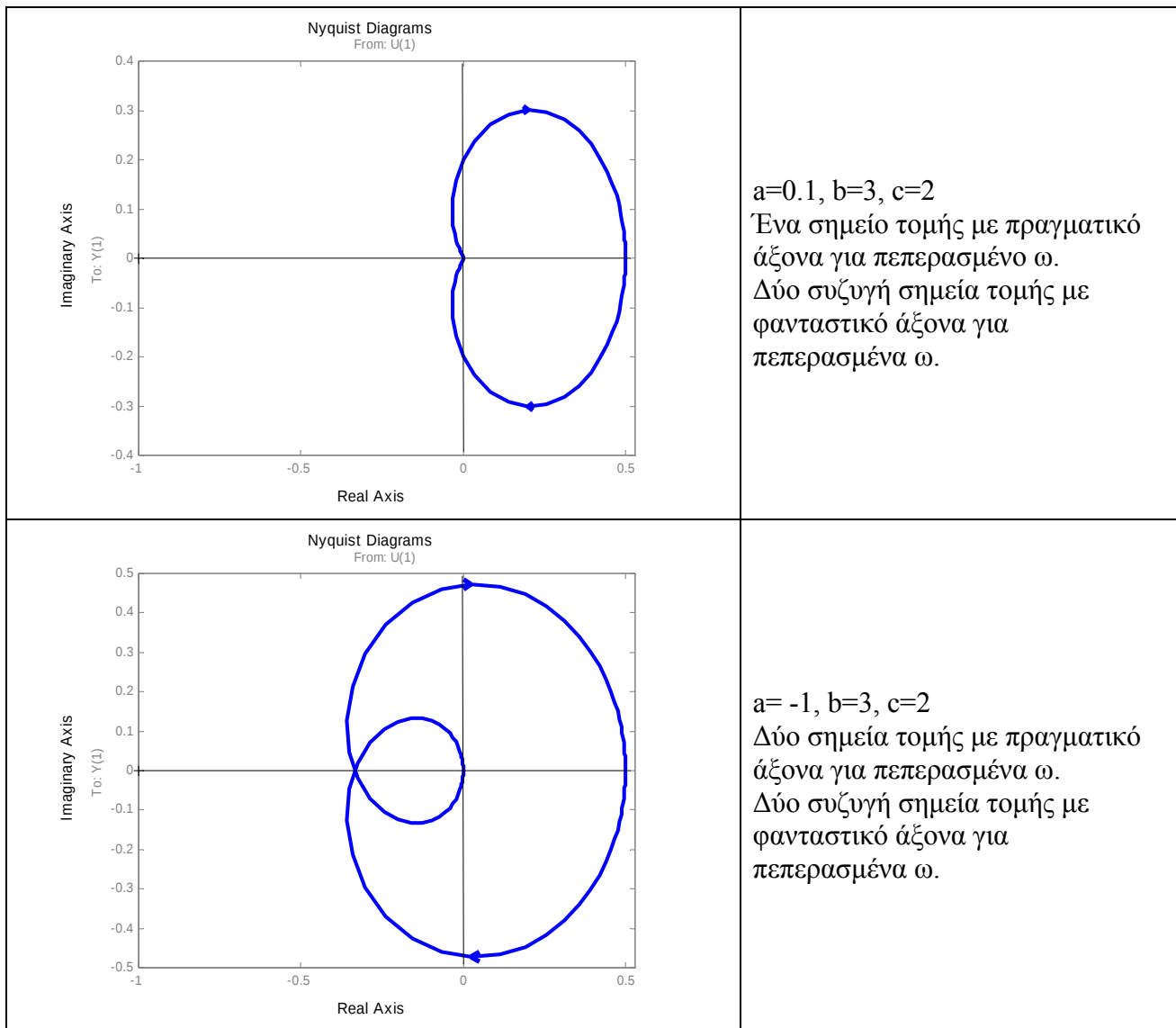
και θα είναι

$$Y = \text{Im}\{G(j\omega)\} \bigg|_{\omega = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{1+a(p_1+p_2)}}} = \frac{a \sqrt{\frac{p_1 p_2}{1+a(p_1+p_2)}} \left[p_1 p_2 - \frac{p_1 p_2}{1+a(p_1+p_2)} \right] + (p_1+p_2) \sqrt{\frac{p_1 p_2}{1+a(p_1+p_2)}}}{\left[p_1 p_2 - \frac{p_1 p_2}{1+a(p_1+p_2)} \right]^2 + (p_1+p_2)^2 \frac{p_1 p_2}{1+a(p_1+p_2)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+a(p_1+p_2)}}{(p_1+p_2)\sqrt{p_1 p_2}} = \frac{\sqrt{1-ab}}{-b\sqrt{c}}$$

Στα ακόλουθα σχήματα φαίνονται οι μορφές των διαγραμμάτων Nyquist για τις διάφορες περιπτώσεις:





2. Για το σύστημα που δίδεται είναι

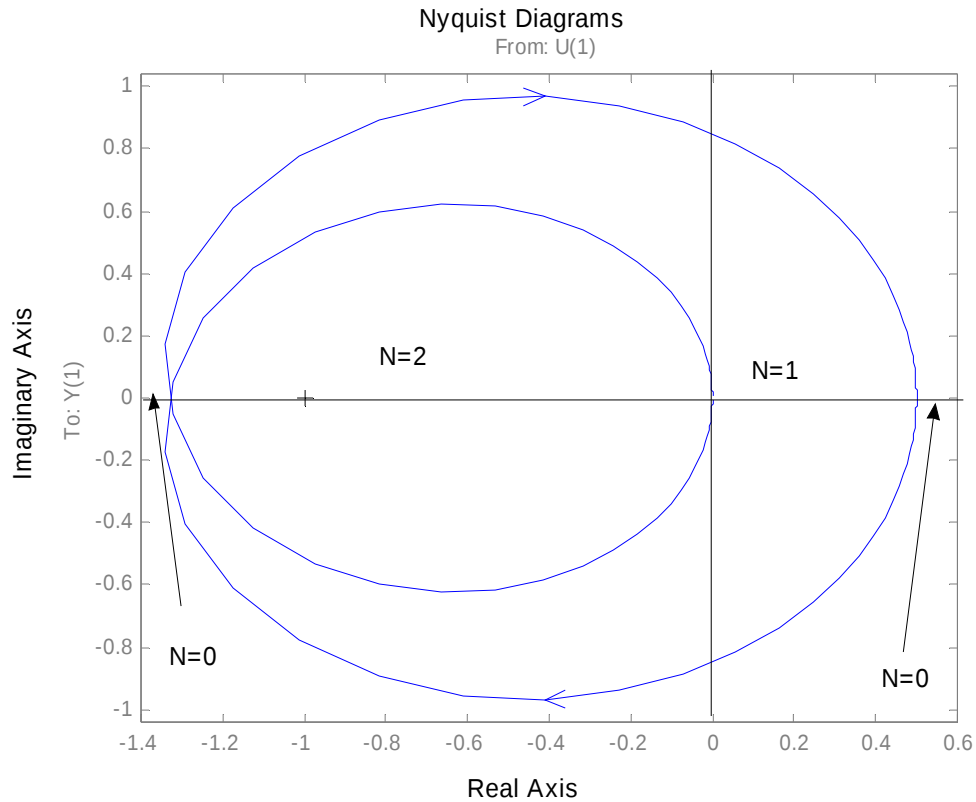
$$a = -4, b = 3, c = 2,$$

οπότε

$$X_1 = \frac{1}{c} = 0.5$$

$$X_2 = \frac{a}{b} = \frac{-4}{3} = -1.33$$

$$Y = \frac{\sqrt{1-ab}}{-b\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{13}}{-3\sqrt{2}} = -0.85$$



Το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$ φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα από το οποίο προκύπτουν επειδή το σύστημα ανοικτού βρόχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για

$$-\frac{1}{K} < -\frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad 0 < K < \frac{3}{4}$$

το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για

$$-\frac{4}{3} < -\frac{1}{K} < 0 \quad \text{ή} \quad \frac{3}{4} < K$$

το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασταθές έχοντας δύο πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Για

$$0 < -\frac{1}{K} < 0.5 \quad \text{ή} \quad K < -2$$

το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασταθές έχοντας ένα πόλο στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Για

$$0.5 < -\frac{1}{K} \quad \text{ή} \quad -2 < K < 0$$

το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

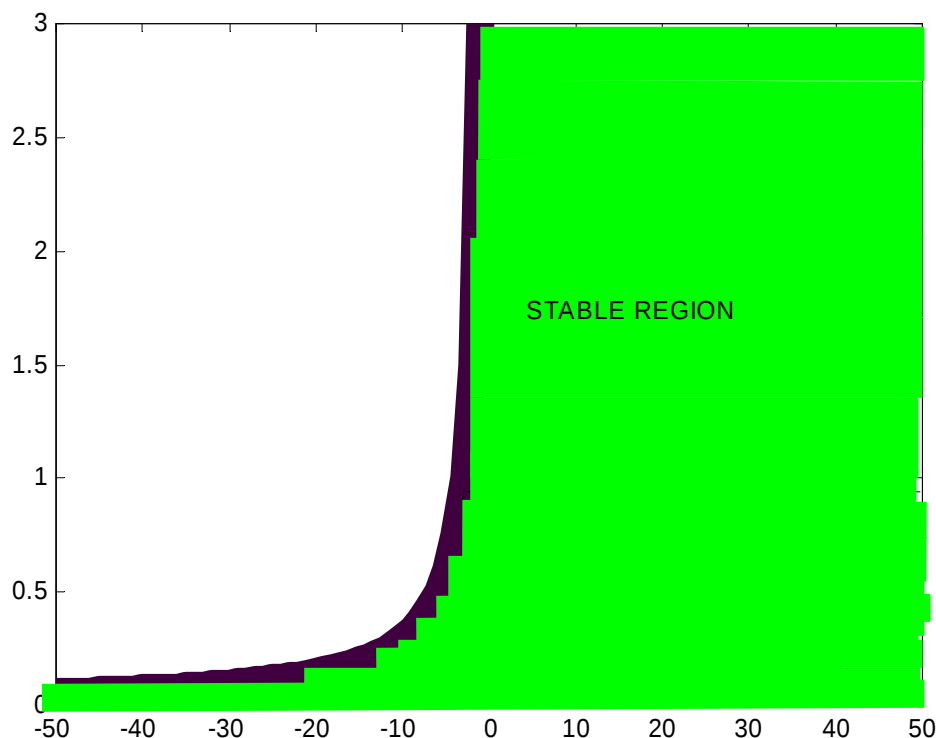
3. Για $K>0$ και πραγματικό a θα έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$a>0$. Το σημείο τομής X_2 θα βρίσκεται στο θετικό πραγματικό άξονα και συνεπώς το σημείο $-1/K$ το οποίο βρίσκεται στον αρνητικό πραγματικό άξονα θα έχει μηδενικό αριθμό περιτρίγυρισμάτων από το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$. Συνεπώς το αντισταθμισμένο σύστημα θα είναι πάντοτε ασυμπτωτικά ευσταθές.

$a<0$. Το σημείο τομής X_2 θα βρίσκεται στον αρνητικό πραγματικό άξονα και συνεπώς το σημείο $-1/K$ το οποίο βρίσκεται στον αρνητικό πραγματικό άξονα θα έχει μηδενικό αριθμό περιτρίγυρισμάτων από το διάγραμμα Nyquist της $G(s)$ μόνο εάν

$$-\frac{1}{K} < \frac{a}{3} \quad \text{ή} \quad -3 < aK$$

Στο Καρτεσιανό επίπεδο η περιοχή που εξασφαλίζει την ευστάθεια είναι η περιοχή μεταξύ της υπερβολής $aK = -3$ και του αρνητικού άξονα των a . Η ευσταθής περιοχή για $K>0$ φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



2^{ος} Τρόπος

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi_c(s) = s^2 + bs + c + K(as + 1) = s^2 + (aK + b)s + K + c.$$

Εφαρμόζοντας τη διάταξη Routh, λαμβάνεται:

s^2	1	$K+c$
s	$aK+b$	
s^0	$K+c$	

Το αντισταθμισμένο σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν

$$f_1 = aK + b > 0$$

$$f_2 = K + c > 0$$

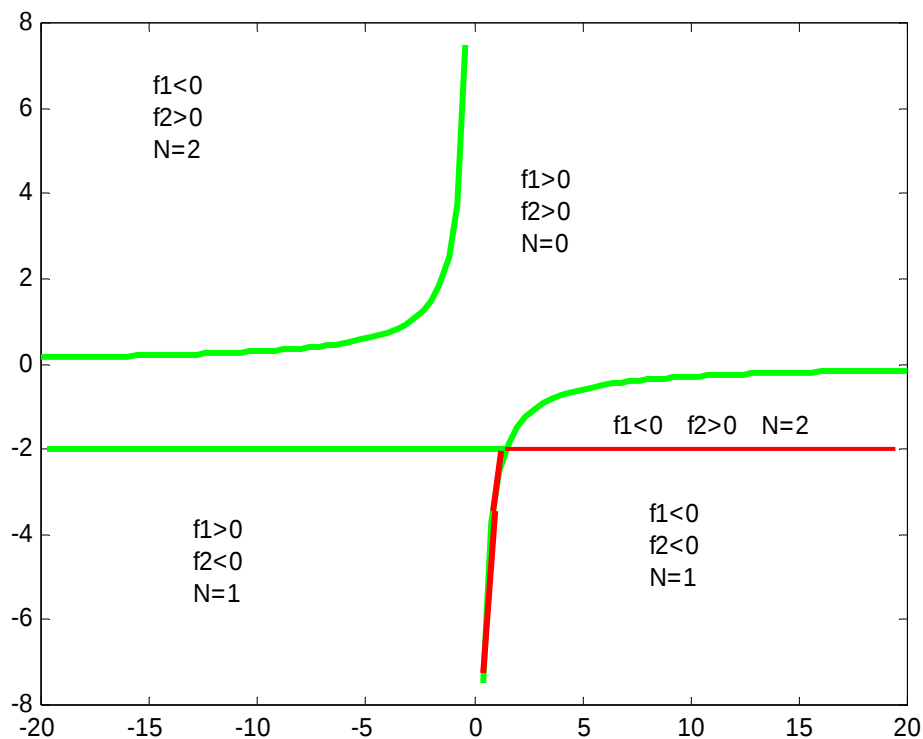
Δεδομένου ότι τα b, c είναι θετικά, οι ανισότητες γίνονται

$$K > -c$$

$$K > -b/a \text{ για } a > 0$$

$$K < -b/a \text{ για } a < 0$$

Εάν N είναι ο αριθμός των ασταθών πόλων του αντισταθμισμένου συστήματος, στο ακόλουθο Καρτεσιανό διάγραμμα φαίνονται οι περιοχές των ευσταθών καθώς και των ασταθών αντισταθμισμένων συστημάτων. Για τις περιοχές των ασταθών συστημάτων προσδιορίζεται και ο αριθμός N των ασταθών πόλων.



ΘΕΜΑ 3

Η συνάρτηση μεταφοράς του προς έλεγχο συστήματος έχει

Ένα τετραπλό πόλο στο $s=0$

Μηδενικά στα σημεία $s = -1$, $s = -2$, $s = -1+j1$ και $s = -1-j1$.

1. Τα τμήματα του πραγματικού άξονα τα οποία είναι σημεία του τόπου έχουν προς τα δεξιά τους περιττό αριθμό πόλων και μηδενικών. Το τμήμα $[-2, -1]$ έχει προς τα δεξιά του 4 πόλους και ένα μηδενικό, συνεπώς είναι τμήμα του γεωμετρικού τόπου. Το σημείο $s=0$ είναι επίσης σημείο του τόπου αφού είναι πόλος του συστήματος ανοικτού βρόχου.

2. Θεωρώντας το σημείο τομής M του γεωμετρικού τόπου με κύκλο ακτίνας ε, όπου ε απειροστά μικρό, θα ισχύει

$$\text{Arg}(s_M+1)+\text{Arg}(s_M+2)+\text{Arg}(s_M+1+j)+\text{Arg}((s_M+1-j))-4\text{Arg}(s_M)=-180^\circ+k360^\circ$$

οπότε

$$0+0+45^\circ-45^\circ+180^\circ-k360^\circ=180^\circ-k360^\circ=4\varphi_{\text{αναχ}}.$$

Για

$$k=0 \quad \varphi_{\text{αναχ}} = 45^\circ$$

$$k=-1 \quad \varphi_{\text{αναχ}} = 135^\circ$$

$$k=1 \quad \varphi_{\text{αναχ}} = -45^\circ$$

$$k=2 \quad \varphi_{\text{αναχ}} = -135^\circ$$

3. Στα μηδενικά $s = -1$ και $s = -2$ οι γωνίες άφιξης είναι αντίστοιχα 180° και 0° αφού το διάστημα $[-2,-1]$ είναι τμήμα του τόπου.

Για τη γωνία άφιξης στο μηδενικό $-1+j1$ θεωρούμε την τομή sM του γεωμετρικού τόπου με τον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $-1+j1$ και απειροστή ακτίνα ε. Θα ισχύει

$$\text{Arg}(s_M+1)+\text{Arg}(s_M+2)+\text{Arg}(s_M+1+j)+\text{Arg}((s_M+1-j))-4\text{Arg}(s_M)=-180^\circ+k360^\circ$$

οπότε

$$\text{Arg}(j)+\text{Arg}(1+j)+\text{Arg}(2j)+\varphi_{\text{αφιξ}}-4\text{Arg}(-1+j)=-180^\circ+k360^\circ$$

ή

$$\varphi_{\text{αφιξ}}=-180^\circ+k360^\circ-90^\circ-45^\circ-90^\circ+4*135^\circ$$

Για

$$k=0 \quad \varphi_{\text{αφιξ}}=135^\circ$$

4. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi_c(s)=s^4+K(s^4+5s^3+10s^2+10s+4)$$

Καθώς διαίρεση με το K δεν μεταβάλλει τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τα σημεία τομής με το φανταστικό άξονα εξετάζονται με εφαρμογή της διάταξης Routh στο πολυώνυμο

$$\hat{\psi}_c(s)=K^{-1}s^4+s^4+5s^3+10s^2+10s+4=(1+\hat{K})s^4+5s^3+10s^2+10s+4$$

Η διάταξη Routh είναι

s^4	$1+\hat{K}$	10	4
s^3	5	10	0
s^2	$\frac{50-10-10\hat{K}}{5}=8-2\hat{K}$	4	
s	$\frac{0-20\hat{K}-20}{8-2\hat{K}}=\frac{60-20\hat{K}}{8-2\hat{K}}$	0	
s^0	4		

Η γραμμή που αντιστοιχεί στο s μηδενίζεται για $\hat{K}=3$ ή ισοδύναμα για $K=1/3$. Από το βοηθητικό πολυώνυμο

$$B(s) = (8-2\hat{K})s^2 + 4 \Big|_{\hat{K}=3} = 2s^2 + 4$$

προκύπτει ότι τα σημεία τομής είναι

$$s_t = \pm j\sqrt{2}.$$

5. Τα σημεία θλάσης προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \frac{dG(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \left[\frac{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4}{s^4} \right] = \frac{s^4(4s^3 + 15s^2 + 20s + 10) - 4s^3(s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4)}{s^8} = \\ &= \frac{-5s^3 - 20s^2 - 30s - 16}{s^5} \end{aligned}$$

Οι ρίζες του πολωνύμου του αριθμητή είναι

$$s = -1.245$$

$$s = -1.377 \pm j0.82$$

Το μόνο πραγματικό σημείο θλάσης ενδέχεται να είναι το σημείο -1.245. Επειδή

$$G(-1.245) = \frac{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4}{s^4} \Big|_{s=-1.245} = -0.0816 = -\frac{1}{K} = -\frac{1}{12.25}$$

αντιστοιχεί σε $K > 0$, το σημείο θλάσης είναι αποδεκτό.

