ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Τρύφων Κουσιουρής

Ακ. Έτος 2006-2007

4. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

4.1 Εισαγωγή

Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένα σύστημα συνεχούς χρόνου μπορεί να περιγραφεί στη μορφή των εξισώσεων καταστάσεως

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x},\underline{u},t) \qquad (4.1α)$$

$$\underline{y}=g(\underline{x},\underline{u},t) \qquad (4.1β)$$

ενώ η περιγραφή ενός συστήματος διακριτού χρόνου στη μορφή των εξισώσεων καταστάσεως θα είναι

$$\underline{x}[(k+1)T] = f[\underline{x}(kT),\underline{u}(kT),kT] \qquad (4.2α)$$

$$\underline{y}(kT)=g[\,\underline{x}(kT),\underline{u}(kT),kT\,] \qquad (4.2β)$$

Εάν η είσοδος του συστήματος είναι μία προκαθορισμένη συνάρτηση του χρόνου t, η σχέση (4.1α) γίνεται

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x},t) \qquad (4.3)$$

Ορισμός 4.1 Το σύστημα (4.3) καλείται αυτόνομο εάν η $f(\underline{x},t)$ δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο t.

Η εξάρτηση της f από τον χρόνο εξαιτίας της εξάρτησης του x από τον χρόνο είναι έμμεση εξάρτηση. Εντελώς αντίστοιχα για τα συστήματα διακριτού χρόνου στα οποία η διέγερση είναι προκαθορισμένη συνάρτηση του k, η σχέση (4.2α) γίνεται

$$\underline{x}[(k+1)T] = f[\underline{x}(kT),kT] \qquad (4.4)$$

Ορισμός 4.2 Το σύστημα (4.4) καλείται αυτόνομο εάν η $f(\underline{x},k)$ δεν εξαρτάται άμεσα από το k.

Ορισμός 4.3 Το σημείο x_0 του χώρου καταστάσεων καλείται ένα σημείο ισορροπίας τη χρονική στιγμή t_0 για το σύστημα συνεχούς χρόνου (4.3) εάν και μόνο εάν

$$f(\underline{x}_0,t)=0 \quad \text{για} \quad \text{καθε} \quad t \geq t_0 \qquad (4.5)$$

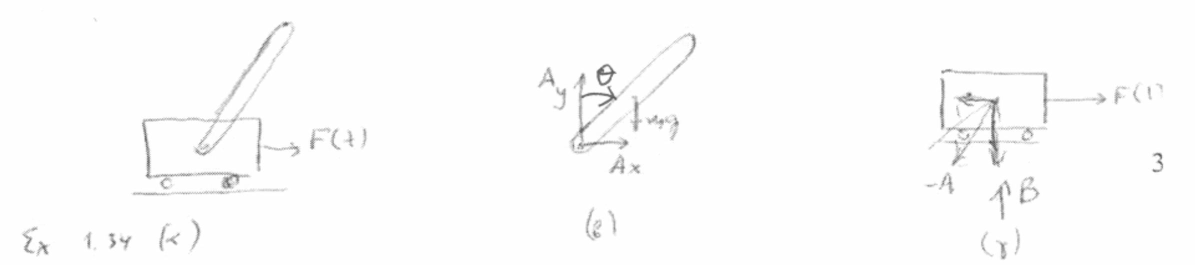
Ορισμός 4.4 Το σημείο x_0 του χώρου καταστάσεων καλείται ένα σημείο ισορροπίας τη χρονική στιγμή k_0 για το σύστημα διακριτού χρόνου (4.4) εάν και μόνο εάν

$$f(\underline{x}_0,k)=\underline{x}_0 \quad \text{για} \quad \text{καθε} \quad k \geq k_0 \qquad (4.6)$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι άν και οι εξισώσεις προσδιορισμού των σημείων ισορροπίας για τα συστήματα συνεχούς χρόνου και τα συστήματα διακριτού χρόνου διαφέρουν, και για τους δύο τύπους συστημάτων αν οι λύσεις είναι μοναδικές και για $t=t_0$ ή $k=k_0$ η κατάσταση είναι ίση με εκείνη του σημείου ισορροπίας x_0, τότε θα είναι $x(t)=x_0$ για κάθε $t \geq t_0$ ή $k \geq k_0$ αντίστοιχα.

Το βασικό πρόβλημα του ελέγχου, η ρύθμιση της εξόδου ώστε να παραμένει σταθερή μπορεί να επιτευχθεί ως εξής για συστήματα που δεν εξαρτώνται άμεσα από το χρόνο. Με τη χρήση σταθερής εισόδου u_0 μπορεί να προσδιοριστεί ένα σημείο ισορροπίας x_0 ώστε $g(x_0,u_0)=y_0$ να είναι η επιθυμητή τιμή της εξόδου. Αυτό φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα

Παράδειγμα 4.1



Σχήμα 4.1

Για το σύστημα του ανεστραμμένου εκκρεμούς, που φαίνεται στο Σχήμα 4.1, η ράβδος μήκους 2L, με μάζα m ομοιόμορφα κατανεμημένη κατά μήκος της και ροπή αδρανείας J ως προς το κέντρο μάζας της (το μέσον της ράβδου) μπορεί να περιστραφεί περί οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι σταθερά στερεωμένος σε φορείο μάζης M το οποίο κινείται επάνω σε ευθεία γραμμή του οριζοντίου επιπέδου χωρίς τριβές. Μετράται η γωνία θ της ράβδου ως προς την κατακόρυφο.

Οι εξισώσεις κινήσεως του συστήματος έχουν ευρεθεί

$$F(t) = M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2x}{dt^2} - mL\,\eta\mu\theta\,(\dot{\theta})^2 + mL\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\ddot{\theta} \qquad (4.7)$$

$$J_o\ddot{\theta} - mgL\eta\mu\theta + mL\sigma\upsilon\nu\theta\,\ddot{x} = 0$$

όπου $J_o = J + mL^2$ είναι η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της. Αν θεωρηθεί σαν διάνυσμα καταστάσεων

$$\underline{\xi}(t)=\begin{bmatrix} x & \dot{x} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T. \qquad (4.8)$$

όπου x η μετατόπιση του φορείου, αντικαθιστώντας τις μεταβλητές με τις συνιστώσες του διανύσματος καταστάσεως και επιλύοντας ως προς τις παραγώγους των συνιστωσών του διανύσματος καταστάσεως, λαμβάνονται

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \qquad (4.9\alpha)$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{-J_o\xi_4^2 mL\eta\mu\xi_3 + m^2L^2 g\sigma\upsilon\nu\xi_3\eta\mu\xi_3}{-J_o(M+m) + m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3} + \frac{-J_o}{-J_o(M+m) + m^2L^2\sigma\upsilon\nu^2\xi_3}F = f_2(\underline{\xi},F) \qquad (4.9\beta)$$

$$\dot{\xi}_3 = \xi_4 \tag{4.9γ}$$

$$\dot{\xi}_4 = \frac{\xi_4^2 m^2 L^2 συν\xi_3 ημ\xi_3 \text{-}(M\text{+}m)mgLημ\xi_3}{\text{-}J_o(M\text{+}m) + m^2L^2συν^2\xi_3} + \frac{mLσυν\xi_3}{\text{-}J_o(M\text{+}m) + m^2L^2συν^2\xi_3} F = f_4(\underline{\xi}, F) \tag{4.9δ}$$

$$\underline{y} = θ = \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\xi} \tag{4.9ε}$$

Για F=0 για τις συντεταγμένες του σημείου ισορροπίας προκύπτουν

Από τις (4.9α) και (4.9γ) αντίστοιχα

$$\xi_2 = \xi_4 = 0 \tag{4.10α}$$

Από την (4.9δ), δεδομένου ότι $\xi_4=0$, προκύπτει $ημ\xi_3=0$ ή ισοδύναμα

$$\xi_3 = κπ, \quad κ \text{ ακέραιος} \tag{4.10β}$$

Οι σχέσεις (4.10α) και (4.10β) εξασφαλίζουν ότι η σχέση (4.9β) ικανοποιείται και συνεπώς δεν υπάρχει περιορισμός για το ξ_1, ή ισοδύναμα

$$\xi_1 = x_0 \tag{4.10γ}$$

όπου το x_0 είναι απροσδιόριστο. Συνεπώς οι συντεταγμένες του σημείου ισορροπίας για F=0 είναι

$$\underline{\xi}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & κπ & 0 \end{bmatrix}^T \tag{4.11}$$

Από τη σχέση (4.11) προκύπτει ότι υπάρχουν ουσιαστικά δύο θέσεις στις οποίες η έξοδος μπορεί να παραμείνει σταθερή, η θ=0 και η θ=π. Εν τούτοις υπάρχει διαφορά στη συμπεριφορά της εξόδου στα δύο αυτά σημεία. Οταν θ=0, μία μικρή διαταραχή μπορεί να προκαλέσει απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας. Από την εμπειρία προκύπτει ότι το σύστημα δεν θα επανέλθει στο σημείο ισορροπίας, θα απομακρυνθεί ακόμη περισσότερο υπακούοντας στις εξισώσεις (4.9) και θα ισορροπήσει εν γένει σε ένα άλλο σημείο ισορροπίας. Αντίθετα στο σημείο θ=π, απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας θα οδηγήσει σε μία κίνηση όπου το σύστημα θα βρίσκεται πάντα κοντά στο σημείο ισορροπίας

Παράδειγμα 4.2
Για το σύστημα διακριτού χρόνου

$$x(k+1) = r_0 x(k)\left(1 - \frac{x(k)}{K}\right) \tag{4.12}$$

τα σημεία ισορροπίας προσδιορίζονται από την επίλυση της εξίσωσης

$$x_0 = r_0 x_0 \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) \tag{4.13}$$

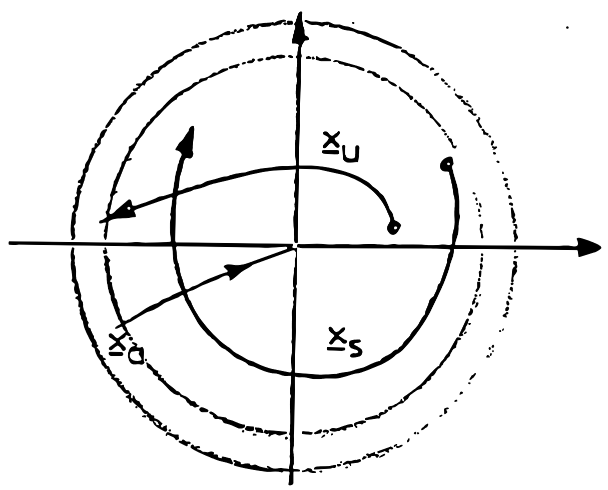
και είναι δύο, ως εξής

$$x_0 = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{K(r_0 - 1)}{r_0} \end{cases} \tag{4.14}$$

Για την μαθηματική έκφραση της διαφορετικής συμπεριφοράς των σημείων ισορροπίας ας θεωρηθεί μία νόρμα || || στο χώρο καταστάσεων.

Ορισμός 4.5 Μία κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0$ ενός αυτόνομου συναμικού συστήματος καλείται ευσταθής κατά Lyapunov εάν για κάθε ε>0 υπάρχει δ(ε)>0 τέτοιο ώστε $||\underline{x}(0)-\underline{x}_0||<\delta$ να συνεπάγεται $||\underline{x}(t)-\underline{x}_0||<\varepsilon$ για κάθε t>0.

Από φυσική άποψη ο Ορισμός 4.5 δηλώνει ότι όταν η κατάσταση ισορροπίας του συστήματος διαταραχθεί τη μηδενική χρονική στιγμή, η κίνηση την οποία θα εκτελέσει το διάνυσμα κατάστασης στο χώρο καταστάσεων θα παραμείνει μέσα σε μία περιοχή της κατάστασης ισορροπίας, το δε μέγεθος της περιοχής εξαρτάται από το μέγεθος της διαταραχής. Αυτό για τον διδιάστατο χώρο καταστάσεων φαίνεται στο Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.2

Καταστάσεις ισορροπίας προς τις οποίες συγκλίνουν οι τροχιές του διανύσματος καταστάσεων όταν η αρχική διαταραχή είναι κοντά στο σημείο ισορροπίας ορίζονται ως εξής.

Ορισμός 4.5 Μία κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0$ ενός αυτόνομου συναμικού συστήματος καλείται ασυμπτωτικά ευσταθής κατά Lyapunov εάν

1. είναι ευσταθής και
2. υπάρχει αριθμός δ_α τέτοιος ώστε $||\underline{x}(0)-\underline{x}_0||<\delta_\alpha$ να συνεπάγεται ότι το $\underline{x}(t)$ συγκλίνει στο $\underline{x}_0$ καθώς το t τείνει στο άπειρο.

Όπως προκύπτει από τον Ορισμό 4.5 το ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας διαθέτει μία ελκτική ιδιότητα. Αξίζει να προσεχθεί ότι η ελκτική ιδιότητα μπορεί να υπάρχει χωρίς να είναι το σημείο ισορροπίας ευσταθές, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

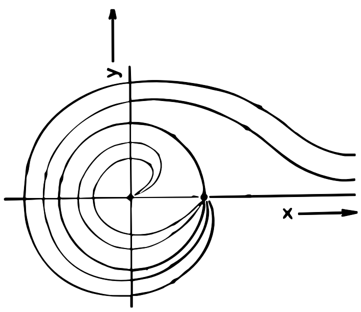
Παράδειγμα 4.3

Ας θεωρηθεί το σύστημα που περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες (x=rσυνθ, y=rημθ) από τις εξισώσεις

$$\dot{r}=r(1-r) \qquad (4.15\alpha)$$

$$\dot{\theta}=\eta\mu^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{4.15β}$$

Το σύστημα διαθέτει δύο σημεία ισορροπίας, τα (0,0) και (1,0). Όπως φαίνεται από το φασικό πορτραίτο του συστήματος του Σχήματος 4.3 και τα δύο σημεία δεν είναι ευσταθή, όμως προς το σημείο (1,0) συγκλίνουν όλες οι τροχιές του διανύσματος καταστάσεως οι οποίες αρχίζουν από οποιοδήποτε σημείο εκτός του σημείου (0,0).



Σχήμα 4.3

Ορισμός 4.6 Εάν η κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, πεδίο έλξης της καταστάσεως $\underline{x}_0$ καλείται η περιοχή την οποίαν ορίζουν οι καταστάσεις $\underline{x}(0)$ για τις οποίες οι τροχιές $\underline{x}(t)$ που προκύπτουν συγκλίνουν στην $\underline{x}_0$.

Άν και δίνεται η εντύπωση ότι η ευστάθεια ή η ασυμπτωτική ευστάθεια κατά Lyapunov ενός συστήματος είναι τοπική ιδιότητα στην περιοχή μιάς κατάστασης ισορροπίας, η ολική ευστάθεια του συστήματος μπορεί να οριστεί ως εξής.

Ορισμός 4.7 Μία κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0$ ενός αυτόνομου δυναμικού συστήματος συνεχούς χρόνου (αντίστοιχα διακριτού χρόνου) καλείται ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής κατά Lyapunov εάν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για κάθε αρχική συνθήκη.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό, η ολική ευστάθεια του συστήματος μπορεί να συναχθεί εφόσον είναι δυνατόν να αυξάνεται απεριόριστα η τιμή του δ_α καθώς το ε αυξάνεται.

Ο Lyapunov έδωσε επίσης και τον ορισμό της αστάθειας ως εξής.

Ορισμός 4.8 Μία κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0$ ενός αυτόνομου δυναμικού συστήματος είναι ασταθής εάν υπάρχει ένα ε τέτοιο ώστε κανένα δ δεν υπάρχει για να ικανοποιούνται οι συνθήκες ευστάθειας.

4.2 Άμεση μέθοδος του Lyapunov (2^η μέθοδος)

4.2.1 Άμεση μέθοδος Lyapunov για συστήματα συνεχούς χρόνου

Η άμεση μέθοδος του Lyapunov επιτρέπει τον καθορισμό ιδιοτήτων ευστάθειας του σημείου ισορροπίας όταν είναι $\underline{x}_0=\underline{0}$, χωρίς την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων (4.1) ή των εξισώσεων διαφορών (4.2). Η μέθοδος εισάγει μία συνάρτηση, που θα μπορούσε να ειδωθεί σαν μια γενίκευση της ενεργειακής συνάρτησης, από τις απώλειες της οποίας μπορεί να συναχθεί η ευστάθεια.

Ο περιορισμός $\underline{x}_0=\underline{0}$ δεν είναι ουσιαστικός, καθώς με το μετασχηματισμό

$$\underline{x}'=\underline{x}-\underline{x}_0 \tag{4.16}$$

το σημείο ισορροπίας $\underline{x}_0$ μεταφέρεται στην αρχή των συντεταγμένων του χώρου κατάστασης.

Ας θεωρηθεί βαθμωτή συνάρτηση $V(\underline{x})$ του διανύσματος κατάστασης $\underline{x}(t)$, τέτοια ώστε $V(\underline{0})=0$.

Ορισμός 4.9 Η συνάρτηση $V(\underline{x})$ καλείται θετικά ορισμένη στην περιοχή $\mathfrak{D}$ της αρχής των συντεταγμένων εάν

$$V(\underline{x}) > 0 \qquad \text{για κάθε } \underline{x}\in \mathfrak{D} \tag{4.17}$$

εκτός της αρχής.

Ορισμός 4.10 Η συνάρτηση $V(\underline{x})$ καλείται θετικά ημιορισμένη στην περιοχή $\mathfrak{D}$ της αρχής των συντεταγμένων εάν διατηρεί το πρόσημό της σ' αυτήν την περιοχή αλλά μηδενίζεται τουλάχιστον σε ένα σημείο εντός της περιοχής εκτός της αρχής.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να οριστούν η αρνητικά ορισμένη και η αρνητικά ημιορισμένη συνάρτηση $V(\underline{x})$ όταν η $-V(\underline{x})$ είναι θετικά ορισμένη και θετικά ημιορισμένη αντίστοιχα.

Ορισμός 4.11 Μία αυθαίρετη συνάρτηση $V(x)$ τέτοια ώστε $V(0)=0$ καλείται συνάρτηση Lyapunov εάν το διάνυσμα $x(t)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x})\,, \qquad f(\underline{0})=0 \tag{4.18}$$

Όπως προκύπτει από τον Ορισμό 4.11 η συνάρτηση Lyapunov είναι μία βαθμωτή συνάρτηση του διανύσματος καταστάσεως η οποία υπολογίζεται κατά μήκος της τροχιάς της κίνησης του διανύσματος καταστάσεως στο χώρο των καταστάσεων. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση Lyapunov ως προς το χρόνο λαμβάνεται

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(\underline{x}) \tag{4.19}$$

όπου $f_i(\underline{x})$ είναι η i συνιστώσα της διανυσματικής συνάρτησης $f(\underline{x})$. Το βασικό θεώρημα ευσταθείας του Lyapunov μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 4.1 Ας θεωρηθεί σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x})\,, \qquad f(\underline{0})=0 \tag{4.20}$$

Εάν υπάρχει μία θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov $V(\underline{x})$ τέτοια ώστε

1. $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ είναι συνεχής για I=1,2,…,n
2. $V(\underline{x}) > 0$ εάν $||\underline{x}|| > 0$ και $V(\underline{x}) = 0$ εάν $||\underline{x}|| = 0$

τότε η κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0 = \underline{0}$ είναι

1. Ευσταθής εάν υπάρχει μία περιοχή $V(\underline{x}) < k$ $(k>0)$ όπου η παράγωγος dV/dt είναι αρνητικά ημιορισμένη.

2. Ασυμπτωτικά ευσταθής εάν υπάρχει μία περιοχή $V(\underline{x}) < k$ $(k>0)$ όπου η παράγωγος dV/dt είναι αρνητικά ορισμένη.
3. Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής εάν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εάν ισχύουν οι συνθήκες της ασυμπτωτικής ευστάθειας και επιπλέον $V(\underline{x})\to\infty$ καθώς $||\underline{x}||\to\infty$ προς οιανδήποτε κατεύθυνση.

Απόδειξη

1. Έστω ☟ η περιοχή της αρχής των συντεταγμένων η οποία ορίζεται από τη σχέση $||\underline{x}|| <h$ και έστω $V(\underline{x})$ η συνάρτηση Lyapunov που θεωρείται. Ας θεωρηθούν τα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας που ορίζεται από τη σχέση $||\underline{x}|| = \varepsilon < h$. Έστω L η ελάχιστη τιμή της $V(\underline{x})$ επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Καθώς η $V(\underline{x})$ είναι συνεχής, η ελάχιστη τιμή υπάρχει και είναι θετική επειδή η $V(\underline{x})$ είναι θετικά ορισμένη.

Εκλέγουμε μία τιμή $\delta\leq\varepsilon$ τέτοια ώστε $V(\underline{x}) < L$ εντός της περιοχής $||\underline{x}||<\delta$. Αυτό είναι πάντοτε δυνατό επιδή η $V(\underline{x})$ είναι συνεχής και μηδενίζεται μόνο στην αρχή. Επειδή $dV/dt\leq 0$ από την υπόθεση, $V(\underline{x}(t)) \leq V(\underline{x}(0)) < L$ για κάθε $t>0$. Επομένως $||\underline{x}(t)||<\varepsilon$ για κάθε $t>0$ και το μέρος 1 αποδείχτηκε.

2. Επειδή οι συνθήκες του (1) ισχύουν, η αρχή των συντεταγμένων είναι ευσταθής. Αρκεί επομένως να δειχθεί ότι η $x(t)$ συγκλίνει στην αρχή καθώς ο χρόνος t τείνει στο άπειρο.

Επειδή η $V(\underline{x})$ είναι μονοτόνως φθίνουσα στην περιοχή ☟ $(dV/dt<0)$ της αρχής θα πρέπει να τείνει σε ένα όριο $m\geq 0$. Έστω $m\neq 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $||\underline{x}(t)||$ δεν μπορεί να μηδενιστεί και θα υπάρχει μία σταθερά M, τέτοια ώστε $0<M<||\underline{x}(t)||$. Επειδή η dV/dt είναι αρνητικά ορισμένη, υπάρχει θετική σταθερά N, τέτοια ώστε $dV/dt\leq -N$ και μπορεί να γραφεί

$$V(\underline{x}(t)) = V(\underline{x}(0))+\int_0^t \frac{dV}{d\tau}d\tau \leq V(\underline{x}(0))-tN \qquad (4.21)$$

Το δεξιό μέλος της ανισότητας γίνεται αρνητικό για $t> V(\underline{x}(0))/N$ και επομένως η $V(\underline{x}(t))$ πρέπει να λαμβάνει αρνητικές τιμές, καραρρίπτοντας την υπόθεση ότι είναι θετικά ορισμένη. Άρα $m=0$ και η πρόταση (2) αποδείχτηκε.

3. Είναι όμοια με εκείνη της 2.

Το θεώρημα ευστάθειας μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής. Οι καταστάσεις που ικανοποιούν τη σχέση $V(\underline{x})=c$, όπου c είναι μία θετική σταθερά βρίσκονται σε μία κλειστή επιφάνεια του χώρου των n διαστάσεων, τουλάχιστον στην περιοχή της αρχής των συντεταγμένων. Οι επιφάνειες αυτές δεν τέμνονται και η επιφάνεια $V(\underline{x})=c_1$ κείται εντός του χώρου που περικλείει η επιφάνεια $V(\underline{x})=c_2$ εάν $c_1<c_2$. Κατ' αυτόν τον τρόπο εάν ευρεθεί μία θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov της οποίας η χρονική παράγωγος είναι αρνητική κατά μήκος της τροχιάς που διαγράφει το διάνυσμα κατάστασης, η $V(\underline{x})$ λαμβάνει όλο και μικρότερες τιμές και τελικά καταλήγει στο μηδέν το οποίο αντιστοιχεί στη μηδενική κατάσταση και αυτό συνεπάγεται την ασυμπτωτική ευστάθεια της αρχής των συντεταγμένων.

Εκτός του θεωρήματος της ευστάθειας ο Lyapunov παρουσίασε και θεωρήματα ασταθείας. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2 Ας θεωρηθεί σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x}), \quad f(\underline{0})=0 \tag{4.22}$$

Εάν υπάρχει μία θετικά ορισμένη συνάρτηση Lyapunov $V(\underline{x})$ τέτοια ώστε

1. $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ είναι συνεχής για I=1,2,…,n
2. $V(\underline{x}) > 0$ εάν $||\underline{x}|| > 0$ και $V(\underline{x}) = 0$ εάν $||\underline{x}|| = 0$

τότε η κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0 = \underline{0}$ είναι ασταθής εάν υπάρχει μία περιοχή $V(\underline{x}) < k$ $(k>0)$ όπου η παράγωγος dV/dt είναι θετικά ορισμένη.

Αξίζει να τονιστεί ότι τα θεωρήματα ευστάθειας και αστάθειας του Lyapunov περιγράφουν ικανές αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες για την ευστάθεια ή την αστάθεια του συστήματος και αποτυχία μιάς $V(\underline{x})$ στη συναγωγή συμπεράσματος (όταν η dV/dt δεν διατηρεί το πρόσημό της στην περιοχή της αρχής) συνεπάγεται ανάγκη εκλογής άλλης $V(\underline{x})$.

Το ισχυρότερο θεώρημα ασταθείας οφείλεται στον Chetaev και είναι ως εξής.

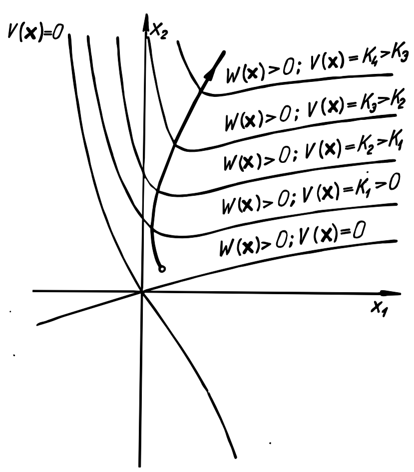
Θεώρημα 4.3 Ας θεωρηθεί σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x}), \quad f(\underline{0})=0 \tag{4.23}$$

Έστω $\mathfrak{D}$ μία περιοχή της αρχής των συντεταγμένων και έστω $\mathfrak{D}_1$ μία περιοχή περιεχόμενη στην $\mathfrak{D}$, όπως στο Σχήμα 4.4 Έστω επίσης ότι προσδιορίζεται μία συνάρτηση $V(\underline{x})$ τέτοια ώστε

1. $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ υπάρχει και είναι συνεχής για i=1,2,…,n
2. $V(\underline{x})$ και dV/dt είναι θετικά ορισμένες στην $\mathfrak{D}_1$.
3. Στα οριακά σημεία της $\mathfrak{D}_1$ τα οποία ευρίσκονται εντός της $\mathfrak{D}$ ισχύει $V(\underline{x})=0$.
4. Η αρχή είναι οριακό σημείο της $\mathfrak{D}_1$.

τότε η κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0 = \underline{0}$ είναι ασταθής.



Σχήμα 4.4

Απόδειξη

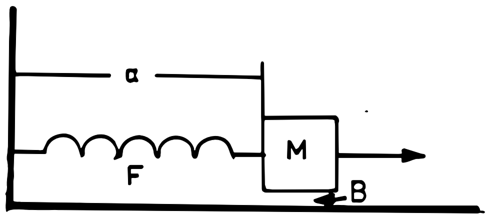
Επειδή οι V($\underline{x}$) και dV/dt είναι θετικά ορισμένες στην $\mathfrak{D}_1$, δεν υπάρχει τροχιά του διανύσματος κατάστασης $\underline{x}$(t) η οποία αρχίζει από το σημείο $\underline{x}(0) \in \mathfrak{D}_1$ και έχει σημείο τομής με το όριο Ω της $\mathfrak{D}_1$ όπου ισχύει V($\underline{x}$)=0. Καθώς η V($\underline{x}$) είναι μονοτόνως αύξουσα, η τροχιά της x(t) θα εξέλθει από την $\mathfrak{D}_1$ από το κοινό όριο Ω_1 των περιοχών $\mathfrak{D}_1$ και $\mathfrak{D}$ για το οποίο δεν ισχύει V($\underline{x}$)=0 και η αστάθεια της αρχής προκύπτει από τον ορισμό.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το αντίστροφο του θεωρήματος 4.3 ισχύει, δηλαδή εάν για μία αρνητικά ορισμένη συνάρτηση dV/dt μπορεί να προσδιοριστεί η V($\underline{x}$) ώστε το θεώρημα της ατάθειας να μην ικανοποιείται, τότε η V($\underline{x}$) είναι θετικά ορισμένη και οι συνθήκες του θεωρήματος ευστάθειας ικανοποιούνται αυτόματα. Επομένως το αντίστροφο του θεωρήματος της αστάθειας θα μπορούσε να είναι ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα από το θεώρημα της ευστάθειας, καθώς είναι πολύ εύκολο να εκλεγεί μία συνάρτηση dV/dt αρνητικά ορισμένη. Εν τούτοις δεν είναι πάντοτε εύκολο να ευρεθεί η V($\underline{x}$) από την επίλυση της εξίσωσης (4.19) και αυτός είναι ο κυριότερος περιορισμός εφαρμογής αυτής της μεθόδου.

Παράδειγμα 4.4

Για το μη γραμμικό ελατήριο του Σχήματος 4.5 η περιγραφική σχέση που συνδέι τη δύναμη F με τη μετατόπιση x δίδεται από τη σχέση

$$F=K(x-\frac{x^3}{6}) \tag{4.24}$$



Σχήμα 4.5

Θεωρώντας σαν μεταβλητές καταστάσεως τη μετατόπιση x και την παράγωγό της ως προς τον χρόνο, προκύπτουν οι εξισώσεις καταστάσεως ως εξής.

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -\frac{K}{M}(x_1-\frac{x_1^3}{6})-\frac{B}{M}x_2+\frac{1}{M}u\end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Όταν u=0, τα σημεία ισορροπίας θα ικανοποιούν τις σχέσεις.

$$\begin{bmatrix}x_2\\ x_1-\frac{x_1^3}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Τα σημεία ισορροπίας θα είναι $(0,0), (\sqrt{6},0), (-\sqrt{6},0)$.

Για το σημείο ισορροπίας (0,0) ας θεωρηθεί σαν συνάρτηση Lyapunov η συνολική ενέργεια του συστήματος η οποία είναι

$$V(\underline{x})=\frac{1}{2}M\dot{x}^2(t)+\int_0^x K\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}\right)d\alpha=\frac{1}{2}Mx_2^2+\int_0^{x_1} K\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}\right)d\alpha=\frac{1}{2}Mx_2^2+\frac{1}{2}Kx_1^2-K\frac{x_1^4}{24} \qquad (4.27)$$

Η $V(\underline{x})$ είναι θετική για την ακόλουθη περιοχή της αρχής των συντεταγμένων

$$\mathfrak{D}=\{(x_1,x_2) : \left|x_1\right|<\sqrt{24} \quad \text{και } \left|x_2\right|<\infty \} \qquad (4.28)$$

Για την παράγωγο της V ως προς το χρόνο θα είναι

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(\underline{x})=Mx_2\dot{x}_2+Kx_1\dot{x}_1-K\dot{x}_1\frac{x_1^3}{6}=\\ &=Mx_2\left\{-\frac{K}{M}\left(x_1-\frac{x_1^3}{6}\right)-\frac{B}{M}x_2\right\}+x_2K\left(x_1-\frac{x_1^3}{6}\right)=-Bx_2^2\end{aligned} \qquad (4.29)$$

Επειδή η dV/dt είναι αρνητικά ημιορισμένη η αρχή των αξόνων προκύπτει ότι είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Αξίζει να τονιστεί ότι με την εκλεγείσα συνάρτηση Lyapunov η ασυμπτωτική ευστάθεια της αρχής, εάν υπάρχει και λογικά φαίνεται να υπάρχει, δεν μπορεί να συναχθεί.

4.2.1.2 Η αρχή του LaSalle

Το θεώρημα του LaSalle επιτρέπει τη συναγωγή της ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας ακόμη και όταν η dV/dt δεν είναι αρνητικά ορισμένη. Εφαρμόζεται όμως μόνο στα αυτόνομα ή περιοδικά συστήματα ενώ δεν υπάρχουν σημαντικές γενικεύσεις για τα μη περιοδικά συστήματα και αυτό περιορίζει τη χρήση του στις εφαρμογές.

Έστω $s(t,x_0,t_0)$ η λύση της εξίσωσης $\underline{\dot{x}}=f(\underline{x})$ με αρχική συνθήκη x_0 την χρονική στιγμή t_0.

Ορισμός 4.12 Το σύνολο $S\subset R^n$ καλείται ω-οριακό σύνολο της τροχιάς $s(\bullet,x_0,t_0)$ εάν για κάθε $y\in S$ υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία χρονικών στιγμών t_n ώστε $s(t_n,x_0,t_0)\rightarrow y$ καθώς $t_n\rightarrow\infty$.

Ορισμός 4.13 Το σύνολο $M\subset R^n$ καλείται αναλλοίωτο σύνολο εάν για κάθε $y\in M$ και $t_0\geq 0$ ισχύει

$$s(t,y,t_0)\in M \text{ για κάθε } t\geq t_0 \qquad (4.30)$$

Αποδεικνύεται ότι το ω-οριακό σύνολο κάθε τροχιάς είναι κλειστό και αναλλοίωτο. Το θεώρημα του LaSalle διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 4.4 Έστω V θετικά ορισμένη συνάρτηση τέτοια ώστε στο συμπαγές σύνολο $\Omega=\{x: V(x)\leq c\}$ ισχύει $\dot{V}(x)\leq 0$. Ας οριστεί

$$S=\{x\in\Omega : \dot{V}(x)=0\} \qquad (4.31)$$

Καθώς $t\to\infty$, η τροχιά τείνει στο μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο εντός του S, δηλαδή το ω-οριακό της σύνολο περιέχεταιεντός του μεγαλύτερου αναλλοίωτου συνόλου εντός του S. Εάν το Σ δεν περιέχει άλλο αναλλοίωτο σύνολο εκτός του x=0, το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 4.5

Για το σύστημα του παραδείγματος 4.5 ας εκλεγεί

$$c=\mathrm{Min}\left\{V(-\sqrt{6},0),V(\sqrt{6},0)\right\} \tag{4.32}$$

Για την εφαρμογή του θεωρήματος του LaSalle ας παρατηρηθεί ότι

$$\dot{V}(x)\leq 0 \quad \text{για} \quad x\in\Omega=\left\{x: V(x)\leq c\right\} \tag{4.33}$$

Σαν συνέπεια του θεωρήματος LaSalle η τροχιά εισέρχεται στο μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο στο $\Omega\cap\left\{x_1,x_2:\dot{V}(x)=0\right\}=\Omega\cap\left\{x_1,0\right\}$.

Για να επιτευχθεί το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο σ' αυτήν την περιοχή, παρατηρείται ότι

$$x_2(t)\equiv 0\Rightarrow x_1(t)\equiv x_{10} \tag{4.34}$$

Επίσης

$$x_2(t)\equiv 0\Rightarrow \dot{x}_2(t)=0=\frac{-K}{M}\left(x_{10}-\frac{x_{10}^3}{6}\right) \tag{4.35}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει $x_{10}=0$. Συνεπώς το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο στο $\Omega\cap\left\{x_1,x_2:\dot{V}(x)=0\right\}=\Omega\cap\left\{x_1,0\right\}$ είναι η αρχή των συντεταγμένων και σύμφωνα με το θεώρημα LaSalle η αρχή θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

4.2.2 Άμεση μέθοδος Lyapunov για συστήματα διακριτού χρόνου

Η εξέταση της ευστάθειας για συστήματα διακριτού χρόνου είναι παράλληλη με την εξέταση της ευστάθειας των συστημάτων συνεχούς χρόνου με μικρές αλλαγές. Η αντίστοιχη σχέση της σχέσης (4.18) η οποία περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος διακριτού χρόνου θα είναι.

$$\underline{x}(k+1)=f(\underline{x}(k)), \qquad f(\underline{0})=0 \tag{4.36}$$

ενώ κατά τον υπολογισμό της συνάρτησης Lyapunov κατά μήκος της τροχιάς έμφανίζονται πηδήματα από την κατάσταση $\underline{x}(k)$ στην κατάσταση $\underline{x}(k+1)$ και συνεπώς αντί της dV/dt χρειάζεται ο υπολογισμός της βαθμωτής ποσότητας

$$\Delta V(\underline{x})=V[\underline{x}(k+1)]-V[(\underline{x}(k)] \tag{4.37}$$

Το Θεώρημα 4.1 μπορεί συνεπώς να διατυπωθεί για τα συστήματα διακριτού χρόνου ως εξής.

Θεώρημα 4.5 Ας θεωρηθεί το σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση (4.36). Εάν υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση $V(\underline{x})$ τέτοια ώστε $V(\underline{0})=0$ και

1. $V(\underline{x})$ είναι συνεχής ως προς $\underline{x}$.

2. $V(\underline{x}) > 0$ εάν $||\underline{x}|| > 0$
3. $W(\underline{x})=V[\underline{x}(k+1)]-V[(\underline{x}(k)]<0$ για $\underline{x}\neq\underline{0}$.

τότε η κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}_0 = \underline{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αντίστοιχα μπορούν να διατυπωθούν και τα θεωρήματα 4.2 έως 4.4. Το πρόβλημα του προσδιορισμού της $V(\underline{x})$, το οποίο είναι δύσκολο για τα συστήματα συνεχούς χρόνου, γίνεται ακόμη δυσκολότερο για τα συστήματα διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 4.6

Ας θεωρηθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \frac{x_2(k)}{1+x_2^2(k)} \\ x_2(k+1) &= \frac{x_1(k)}{1+x_2^2(k)} \end{aligned} \tag{4.38}$$

Για το σημείο ισορροπίας θα ισχύει

$$\begin{aligned} x_{10} &= \frac{x_{20}}{1+x_{20}^2} \\ x_{20} &= \frac{x_{10}}{1+x_{20}^2} \end{aligned} \tag{4.39}$$

Από τις σχέσεις (4.39) λαμβάνεται

$$\frac{x_{10}}{x_{20}} = \frac{x_{20}}{x_{10}} = \frac{1}{1+x_{20}^2} \tag{4.40}$$

ή ισοδύναμα

$$|x_{10}| = |x_{20}| \tag{4.41}$$

Λαμβάνοντας τα μέτρα στην πρώτη των εξισώσεων (4.39) και αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση λαμβάνεται

$$|x_{10}| = |x_{20}| = 0 \tag{4.42}$$

δηλαδή η αρχή είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Λαμβάνοντας

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 \tag{4.43}$$

η οποία είναι συνεχής και θετικά ορισμένη στην περιοχή του μηδενός, θα ισχύει

$$\begin{aligned} W(\underline{x}) &= V[\underline{x}(k+1)]-V[(\underline{x}(k)] = x_1^2(k+1)+x_2^2(k+1)-x_1^2(k)-x_2^2(k) \\ &= \frac{x_2^2(k)}{\left[1+x_2^2(k)\right]^2} + \frac{x_1^2(k)}{\left[1+x_2^2(k)\right]^2} - x_1^2(k) - x_2^2(k) = -\frac{x_2^2(k)}{\left[1+x_2^2(k)\right]^2}\left[x_1^2(k)+x_2^2(k)\right] < 0 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5 η αρχή των συντεταγμένων είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

4.3 Η έμμεση μέθοδος Lyapunov (1η μέθοδος)

Η έμμεση μέθοδος Lyapunov χρησιμοποιεί τη γραμμικοποίηση του συστήματος για τον καθορισμό της τοπικής ευστάθειας του αρχικού συστήματος.

Θεώρημα 4.6 Για το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x}), \qquad f(\underline{0})=0 \tag{4.45}$$

έστω

$$\delta\dot{\underline{x}}=\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\bigg|_{x=x_0}\delta\underline{x} = A\delta\underline{x} \tag{4.46}$$

η εξίσωση του γραμμικοποιημένου συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας x_0. Εάν

$$\lim_{\|\delta\underline{x}\|\to 0}\frac{\|f(\underline{x})-A\underline{x}\|}{\|\delta\underline{x}\|}=0 \tag{4.47}$$

τότε

1. Εάν η μήτρα A έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος, η κατάσταση ισορροπίας x_0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
2. Εάν η μήτρα A έχει μία ή περισσότερες ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος, η κατάσταση ισορροπίας x_0 είναι ασταθής.
3. Εάν η μήτρα A έχει μία ή περισσότερες ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος και όλες οι απομένουσες ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, η ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας x_0 δεν μπορεί να συναχθεί από τη μελέτη του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Απόδειξη

1. Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι πραγματικές και διάφοροι ανά δύο. Εφαρμόζεται μετασχηματισμός ομοιότητας $\underline{y}=P\underline{x}$ ώστε η εξίσωση του μη-γραμμικού συστήματος να γίνει

$$\dot{\underline{y}}=\Lambda\underline{y}+h(\underline{y}) \tag{4.48}$$

όπου Λ είναι η διαγώνιος μήτρα των ιδιοτιμών. Έστω

$$V(\underline{y})=\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{4.49}$$

οπότε

$$\dot{V}(\underline{y})=2\sum_{i=1}^{n} y_i\dot{y}_i = 2\sum_{i=1}^{n} y_i\left\{\lambda_i y_i + h_i(\underline{y})\right\}=g(\underline{y})+2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \tag{4.50}$$

όπου

$$g(\underline{y})=2\sum_{i=1}^{n} y_i h_i(\underline{y}) \tag{4.51}$$

Καθώς f($\underline{x}$)-A$\underline{x}$ τείνει στο μηδέν ταχύτερα από το δ$\underline{x}$, |g($\underline{y}$)| τείνει στο μηδέν ταχύτερα από το $||\underline{y}||^2$ για κάθε i. Επομένως σε μία μικρή περιοχή της κατάστασης ισορροπίας ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της εξίσωσης (4.50) υπερισχύει στο άθροισμα και επειδή $\lambda_i<0$ προκύπτει dV($\underline{y}$)/dt αρνητικά ορισμένη και η ευστάθεια του συστήματος προκύπτει από το Θεώρημα 4.1

2. Ας θεωρηθεί ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\kappa$ του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι θετικές και διάφοροι ανά δύο ενώ οι υπόλοιπες είναι αρνητικές και διάφοροι ανά δύο. Εάν εκλεγεί

$$V(\underline{y})=\sum_{i=1}^{\kappa} y_i^2 - \sum_{j=\kappa+1}^{n} y_j^2 \tag{4.52}$$

θα είναι

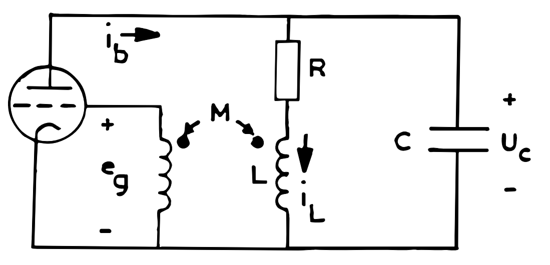
$$\dot{V}(\underline{y})=g(\underline{y})+2\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i y_i^2 - 2\sum_{j=\kappa+1}^{n} \lambda_j y_j^2 \tag{4.53}$$

Για σημεία αυθαίρετα κοντά στην αρχή των συντεταγμένων για τα οποία $y_{\kappa+1}=y_{\kappa+2}=...=y_n$ η V($\underline{y}$) είναι θετική ενώ η dV($\underline{y}$)/dt είναι επίσης θετική. Η αστάθεια του σημείου ισορροπίας στην αρχή των συντεταγμένων συνάγεται από το Θεώρημα 4.3.

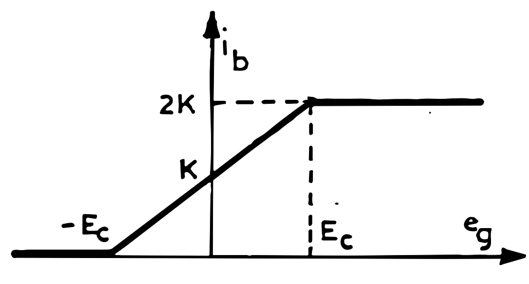
3. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να ευρεθεί V($\underline{y}$) τέτοια ώστε να ικανοποιεί τα θεωρήματα 4.1 ή 4.3 και η ευστάθεια του μη γραμμικού συστήματος πρέπει να μελετηθεί με την άμεση μέθοδο Lyapunov.

Παράδειγμα 4.7

Ας θεωρηθεί το σύστημα του Σχήματος 4.6(α), όπου η καμπύλη ρεύματος ανόδου-τάσης πλέγματος είναι όπως στο Σχήμα 4.6(β)



Σχήμα 4.6(α) Ηλεκτρικό Κύκλωμα



Σχήμα 4.6(β) Περιγραφική Σχέση Λυχνίας

Εάν γίνει δεκτό ότι η ένταση του πλέγματος είναι μηδενική, θα ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις για το κύκλωμα

$$e_g = M\frac{di_L}{dt} \tag{4.54α}$$

$$U_C = L\frac{di_L}{dt} + Ri_L \tag{4.54β}$$

$$i_b = i_L + C\frac{dU_C}{dt} = i_L + CR\frac{di_L}{dt} + CL\frac{d^2 i_L}{dt^2} = f(e_g) \tag{4.54γ}$$

Εάν τεθούν $x_1 = i_L$ και $x_2 = di_L/dt$, θα είναι

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.55α}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1 + \frac{f(Mx_2)}{LC} \tag{4.55β}$$

όπου

$$f(Mx_2) = \begin{cases} K + K\dfrac{Mx_2}{E_C} & \text{για} \quad |Mx_2| \le E_C \\ \\ K + K\text{sign}(x_2) & \text{για} \quad |Mx_2| > E_C \end{cases} \tag{4.56}$$

Από τις εξισώσεις καταστάσεως προκύπτει ότι οι συντεταγμένες (x_{10}, x_{20}) της κατάστασης ισορροπίας θα είναι

$$x_{20} = 0 \quad x_{10} = f(Mx_{20}) = K \tag{4.57}$$

Για την περιοχή της κατάστασης ισορροπίας οι εξισώσεις καταστάσεως γίνονται

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.58α}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1 + \frac{1}{LC}\left(K + \frac{KMx_2}{E_C}\right) \tag{4.58β}$$

Γραμμικοποιώντας τις τελευταίες εξισώσεις λαμβάνονται

$$\delta\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} + \dfrac{MK}{LCE_C} \end{bmatrix} \delta\underline{x} = A\delta\underline{x} \tag{4.59}$$

Οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\psi(s) = \det(sI - A) = s^2 + \left(\frac{R}{L} - \frac{MK}{LCE_C}\right)s + \frac{1}{LC} \tag{4.60}$$

Επειδή το γινόμενο των ριζών του ψ(s) είναι θετικό, θα ισχύουν τα ακόλουθα

1. Εάν $\dfrac{R}{L} > \dfrac{MK}{LCE_C}$ το ψ(s) έχει δύο ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο και η κατάσταση ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
2. Εάν $\dfrac{R}{L} < \dfrac{MK}{LCE_C}$ το ψ(s) έχει δύο ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο και η κατάσταση ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος είναι ασταθής.

3. Εάν $\frac{R}{L}=\frac{MK}{LCE_C}$ το ψ(s) έχει δύο ρίζες επάνω στο φανταστικό άξονα και η ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος δεν μπορείικοποιημένου συστήματος.

4.4 Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων

4.4.1 Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου

Όπως έχει λεχθεί, η εφαρμογή του αντίστροφου του θεωρήματος αστάθειας είναι δύσκολη εξαιτίας της απαίτησης προσδιορισμού της $V(\underline{x})$ από την παράγωγό της. Στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων η ολοκλήρωση είναι εύκολη και η ύπαρξη συνάρτησης Lyapunov τετραγωνικής μορφής εμφανίζεται ως ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα του Sylvester.

Θεώρημα 4.7 Εστω η nxn συμμετική μήτρα Q και έστω $\tilde{Q}(k)=\left[Q\right]_{1,2,\ldots,k}^{1,2,\ldots,k}$ η ελλάσσων της Q, η οποία σχηματίζεται από τις γραμμές 1,2,...,k και τις στήλες 1,2,...,k. Τότε η τετργωνική μορφή xTQx είναι θετικά ορισμένη εάν και μόνο εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ανισότητες

$$\tilde{Q}(i)>0 \quad \text{για } i=1,2,\ldots,n. \tag{4.61}$$

Ας θεωρηθεί το αυτόνομο γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t) \tag{4.62}$$

Εάν ληφθεί σαν συνάρτηση Lyapunov η

$$V(\underline{x})=\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t) \tag{4.63}$$

θα είναι

$$\frac{dV(\underline{x})}{dt}=\dot{\underline{x}}^T(t)P\underline{x}(t)+\underline{x}^T(t)P\dot{\underline{x}}(t)=\underline{x}^T(A^TP+PA)\underline{x} \tag{4.64}$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος αστάθειας 4.3 εφαρμόζεται ως εξής. Επιλέγεται μία συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα Q. Συνήθως λαμβάνεται Q=I και ευρίσκεται η συμμετρική μήτρα P ώστε

$$A^TP+PA=-Q \tag{4.65}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (4.65) δίνει ένα σύνολο nx(n+1)/2 εξισώσεις ως προς τα nx(n+1)/2 ανεξάρτητα στοιχεία της μήτρας P. Έχει αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση εάν και μόνο εάν για κάθε ζεύγος ιδιοτιμών λ_i, λ_j της μήτρας A ισχύει

$$\lambda_i+\lambda_j \neq 0 \tag{4.66}$$

Μετά τον προσδιορισμό της μήτρας P ελέγχεται με το θεώρημα του Sylvester εάν ικανοποιούνται οι ανισότητες (4.61). Δύο περιπτώσεις μπορούν να συμβούν.

1. Η μήτρα P είναι θετικά ορισμένη. Εκλέγοντας $V(\underline{x})=\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t)$, το θεώρημα της ασυμπτωτικής ευστάθειας 4.1 θα ισχύει και το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.
2. Η μήτρα P δεν είναι θετικά ορισμένη. Εκλέγοντας $V(\underline{x})=\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t)$, είναι δυνατόν να ευρεθεί μία περιοχή του μηδενός όπου το θεώρημα της αστάθειας 4.3 θα ισχύει και το σύστημα είναι ασταθές.

Η ύπαρξη επομένως μιας θετικά ορισμένης λύσης της εξίσωσης (4.65) αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια του συστήματος.

Θεώρημα 4.8 Η εξίσωση (4.65) έχει θετικά ορισμένη λύση εάν και μόνον εάν για κάθε ιδιοτιμή λ_i της μήτρας A ισχύει

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0 \tag{4.67}$$

Παράδειγμα 4.8

Για το αυτόνομο σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}\underline{x}(t) \tag{4.68}$$

το σημείο ισορροπίας προκύπτει από την εξίσωση

$$\underline{0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}\underline{x}_0 \tag{4.69}$$

Εάν $b\neq 0$, το μοναδικό σημείο ισορροπίας θα είναι η αρχή των συντεταγμένων. Έστωσαν

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \qquad Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.70}$$

Από τη σχέση (4.65) λαμβάνεται

$$\begin{aligned} A^TP+PA &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2bp_2 & -ap_2-bp_3+p_1 \\ -ap_2-bp_3+p_1 & 2p_2-2ap_3 \end{bmatrix} = -Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.71}$$

Εξισώνοντας τα στοιχεία στις αντίστοιχες θέσεις των μητρών λαμβάνεται το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 0 & -2b & 0 \\ 1 & -a & -b \\ 0 & 2 & -2a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

Επιλύοντας ως προς τα p_1, p_2, p_3, η μήτρα P προκύπτει

$$P=\begin{bmatrix} \frac{a^2+b+b^2}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1+b}{2ab} \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Sylvester η μήτρα P είναι θετικά ορισμένη εάν και μόνο εάν

$$\begin{gathered} \frac{a^2+b+b^2}{2ab}>0 \\ \frac{a^2+1+2b+b^2}{4ab^2}>0 \end{gathered} \tag{4.74}$$

Οι ανισότητες (4.74) αποτελούν αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος διακριτού χρόνου. Από τη δεύτερη ανισότητα, επειδή ο αριθμητής είναι πάντοτε θετικός ως άθροισμα τετραγώνων $[a^2+(1+b)^2]$, προκύπτει $a>0$. Επίσης από την πρώτη ανισότητα ο αριθμητής μπορεί να γραφεί

$$a^2+b+b^2=\begin{cases} (a-b)^2+3b & \text{για} \quad b>0 \\ \\ (a+b)^2-b & \text{για} \quad b<0 \end{cases} \tag{4.75}$$

δηλαδή είναι πάντα θετικός, συνεπώς επειδή $a>0$ προκύπτει $b>0$. Επομένως η περιγραφή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εάν και μόνο εάν οι παράμετροι a,b είναι θετικές.

4.4.2 Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Αντίστοιχα με τα συστήματα συνεχούς χρόνου ας θεωρηθεί το αυτόνομο γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\underline{x}(k+1)=A\underline{x}(k) \tag{4.76}$$

Εάν ληφθεί σαν συνάρτηση Lyapunov η

$$V(\underline{x})=\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t) \tag{4.77}$$

θα είναι

$$W(\underline{x})=\underline{x}^T(k+1)P\underline{x}(k+1)-\underline{x}^T(k)P\underline{x}(k)=\underline{x}^T(A^TPA-P)\underline{x} \tag{4.78}$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος αστάθειας εφαρμόζεται ως εξής. Επιλέγεται μία συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα Q. Συνήθως λαμβάνεται Q=I και ευρίσκεται η συμμετρική μήτρα P ώστε

$$A^TPA-P=-Q \tag{4.79}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (4.79) δίνει ένα σύνολο nx(n+1)/2 εξισώσεις ως προς τα nx(n+1)/2 ανεξάρτητα στοιχεία της μήτρας P. Μετά τον προσδιορισμό της μήτρας P ελέγχεται με το θεώρημα του Sylvester εάν ικανοποιούνται οι ανισότητες (4.61). Δύο περιπτώσεις μπορούν να συμβούν.

1. Η μήτρα P είναι θετικά ορισμένη. Εκλέγοντας $V(\underline{x})=\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t)$, το θεώρημα της ασυμπτωτικής ευστάθειας θα ισχύει και το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.
2. Η μήτρα P δεν είναι θετικά ορισμένη. Εκλέγοντας $V(\underline{x})=\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t)$, είναι δυνατόν να ευρεθεί μία περιοχή του μηδενός όπου το θεώρημα της αστάθειας θα ισχύει και το σύστημα είναι ασταθές.

Η ύπαρξη επομένως μιας θετικά ορισμένης λύσης της εξίσωσης (4.Γ) αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια του συστήματος. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 4.9 Η εξίσωση

$$\frac{1}{\rho^2}A^TPA - P = -Q \tag{4.80}$$

έχει θετικά ορισμένη λύση εάν και μόνον εάν για κάθε ιδιοτιμή λ_i της μήτρας A ισχύει

$$|\lambda_i| < \rho \tag{4.81}$$

Άμεσο συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.9 και της σχέσεως (4.79) είναι ότι το σύστημα διακριτού χρόνου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν οι ιδιοτιμές της μήτρας A βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των συντεταγμένων.

Παράδειγμα 4.9

Για το αυτόνομο σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\underline{x}(k+1)=A\underline{x}(k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}\underline{x}(k) \tag{4.82}$$

το σημείο ισορροπίας προκύπτει από την εξίσωση

$$\underline{x}_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}\underline{x}_0 \tag{4.83}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -b & -a-1 \end{bmatrix}\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

Εάν $1+a+b\neq 0$, το μοναδικό σημείο ισορροπίας θα είναι η αρχή των συντεταγμένων. Έστωσαν

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \qquad Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

Από τη σχέση (4.79) λαμβάνεται

$$
\begin{aligned}
A^T PA\text{-}P &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \text{-}b & \text{-}a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \text{-}b & \text{-}a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} b^2 p_3\text{-}p_1 & \text{-}bp_2\text{+}abp_3\text{-}p_2 \\ \text{-}bp_2\text{+}abp_3\text{-}p_2 & p_1\text{-}2ap_2\text{+}a^2 p_3\text{-}p_3 \end{bmatrix} = \text{-}Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.86}
$$

Εξισώνοντας τα στοιχεία στις αντίστοιχες θέσεις των μητρών λαμβάνεται το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$
\begin{bmatrix} \text{-}1 & 0 & b^2 \\ 0 & \text{-}1\text{-}b & ab \\ 1 & \text{-}2a & a^2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.87}
$$

Επιλύοντας ως προς τα p_1, p_2, p_3, η μήτρα P προκύπτει

$$
P = \begin{bmatrix} \dfrac{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{+}b^2\text{+}b^3}{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{-}b^2\text{-}b^3} & \dfrac{2ab}{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{-}b^2\text{-}b^3} \\ \dfrac{2ab}{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{-}b^2\text{-}b^3} & \dfrac{2(1\text{+}b)}{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{-}b^2\text{-}b^3} \end{bmatrix} \tag{4.88}
$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Sylvester η μήτρα P είναι θετικά ορισμένη εάν και μόνο εάν

$$
\begin{aligned}
&\frac{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{+}b^2\text{+}b^3}{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{-}b^2\text{-}b^3} > 0 \\
&\frac{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{+}b^2\text{+}b^3}{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{-}b^2\text{-}b^3} \frac{2(1\text{+}b)}{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{-}b^2\text{-}b^3} - \left(\frac{2ab}{\text{-}a^2\text{+}1\text{+}a^2 b\text{+}b\text{-}b^2\text{-}b^3} \right)^2 > 0
\end{aligned} \tag{4.89}
$$

Οι ανισότητες (4.89) αποτελούν αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος διακριτού χρόνου.

4.5 Θέσεις Ριζών Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου και Ευστάθεια Συστήματος

4.5.1 Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 4. , ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν οι ιδιοτιμές της μήτρας A ή ισοδύναμα οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$
\psi(s)\text{=}\det(sI\text{-}A)\text{=}s^n\text{+}a_1 s^{n-1}\text{+}...\text{+}a_{n-1}s\text{+}a_n = \prod_{i=1}^{n}(s\text{-}s_i) \tag{4.90}
$$

έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Οι συνθήκες για να έχει το πολυώνυμο ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο δίδονται σε μία σειρά θεωρημάτων στη συνέχεια.

Θεώρημα 4.10 (Θεώρημα Stodola)
Εάν το πολυώνυμο ψ(s) έχει όλες τις ρίζες του στο αριστερό ήμισυ του μιγαδικού επιπέδου, οι συντελεστές a_i, i=1,2,…,n είναι μη μηδενικοί και θετικοί.

Το θεώρημα είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να είναι οι ρίζες του ψ(s) στο αριστερό ημιεπίπεδο. Σαν παράδειγμα το πολυώνυμο

$$\psi(s)=s^7+s^6+s^5+s^4+s^3+s^2+s+1 \tag{4.91}$$

έχει ρίζα την 0.707+j0.707, η οποία ανήκει στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Η θεωρία του Routh, η οποία θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, συνίσταται στον καθορισμό του αριθμού των ριζών του πραγματικού πολυωνύμου ψ(s) οι οποίες βρίσκονται στο δεξιό ημιεπίπεδο. Πριν από την παρουσίαση θα γίνει αναφορά σε ορισμένες βασικές έννοιες οι οποίες χρειάζονται στη συνέχεια.

Ορισμός 4.14 Ο δείκτης Cauchy $I_a^b R(x)$ μιάς πραγματικής ρητής συνάρτησης R(x) στο διάστημα (a,b) είναι η διαφορά των πηδημάτων της R(x) από το $-\infty$ στο $+\infty$ από τον αριθμό των πηδημάτων της R(x) από το $+\infty$ στο $-\infty$.

Αξίζει να τονιστεί ότι τα πηδήματα στα άκρα του διαστήματος δεν συμπεριλαμβάνονται στον δείκτη.

Μία μέθοδος για τον υπολογισμό του δείκτη $I_a^b R(x)$ βασίζεται στο θεώρημα του Sturm. Ας θεωρηθεί μία ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Για κάθε τιμή του x στο διάστημα (a,b) για την οποία $f_k(x)=0$ για κάποιο k

   $$f_{k-1}(x)\, f_{k+1}(x) < 0 \tag{4.92}$$

   δηλαδή τα γειτονικά πολυώνυμα δεν μηδενίζονται και έχουν αντίθετα πρόσημα.
2. Το $f_m(x)$ δεν μηδενίζεται στο διάστημα (a,b).

Η ακολουθία αυτή καλείται αλυσίδα Sturm στο διάστημα (a,b). Εάν παρασταθεί με N(x) ο αριθμός των αλλαγών προσήμου στην ακολουθία των πολυωνύμων για μία δεδομένη τιμή του x, θα ισχύει

Θεώρημα 4.11 Εάν $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ είναι μία αλυσίδα Sturm

$$I_a^b \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = N(a)-N(b) \tag{4.93}$$

Η απόδειξη είναι απλή. Καθώς το x μεταβάλλεται από το a έως το b το N(x) θα αλλάζει τιμή όταν ένα από τα $f_k(x)$ μηδενίζεται. Όμως όταν ένα από τα $f_2(x)$, $f_3(x)$,..., $f_{m-1}(x)$ (το $f_m(x)$ δεν μηδενίζεται) το N(x) δεν μεταβάλλεται και συνεπώς ο δείκτης Cauchy μειώνεται ή αυξάνει μόνο στους μηδενισμούς του $f_1(x)$ ανάλογα εάν το πήδημα είναι από το $-\infty$ στο $+\infty$ ή αντίθετα.

Μία αλυσίδα Sturm μπορεί να δημιουργηθεί με τον αλγόριθμο της Ευκλίδειας διαίρεσης όταν ο βαθμός του $f_1(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του $f_2(x)$ ως ακολούθως.

$$f_1(x)=f_2(x)\pi_1(x)-f_3(x) \tag{4.94}$$

και γενικότερα

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)\pi_{k-1}(x)-f_{k+1}(x) \tag{4.95}$$

Η αλυσίδα που δημιουργείται κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγει στο μέγιστο κοινό διαιρέτη των πολυωνύμων $f_1(x)$ και $f_2(x)$.

Ας θεωρηθεί η μεταβολη του ορίσματος $\Delta_{-\infty}^{\infty}\psi(j\omega)$ καθώς το ω μεταβάλλεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$. Επειδή

$$\Delta_{-\infty}^{\infty}\psi(j\omega)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_{-\infty}^{\infty}(s-s_i) \tag{4.96}$$

και η μεταβολή του ορίσματος για κάθε ρίζα η οποία είναι στο δεξιό ημιεπίπεδο είναι από $-\pi/2$ έως $-3\pi/2$, δηλαδή $-\pi$ ενώ για κάθε ρίζα η οποία είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο είναι από $-\pi/2$ έως $\pi/2$, δηλαδή π, θα ισχύει

$$\Delta_{-\infty}^{\infty}\psi(j\omega)=\pi\left\{\text{Αριθμος ριζων}\in C^{-}-\text{Αριθμος ριζων}\in C^{+}\right\}=\pi(n-2\nu) \tag{4.97}$$

όπου ν είναι ο αριθμός των ριζών του ψ(s) στο δεξιό ημιεπίπεδο. Καθώς

$$\arg\{\psi(j\omega)\}=\text{τοξεφ}\frac{\mathrm{Im}[\psi(j\omega)]}{\mathrm{Re}[\psi(j\omega)]}=\text{τοξσφ}\frac{\mathrm{Re}[\psi(j\omega)]}{\mathrm{Im}[\psi(j\omega)]} \tag{4.98}$$

ανεξάρτητα εάν το n είναι άρτιος ή περιττός θα είναι

$$I_{-\infty}^{\infty}\frac{a_1\omega^{n-1}-a_3\omega^{n-3}+a_5\omega^{n-5}-\dots}{\omega^{n}-a_2\omega^{n-2}+a_4\omega^{n-4}-\dots}=n-2\nu \tag{4.99}$$

Για τον προσδιορισμό του δείκτη Cauchy θεωρούνται τα δύο πρώτα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} f_1(\omega)&=\omega^{n}-a_2\omega^{n-2}+a_4\omega^{n-4}-\dots\\ f_2(\omega)&=a_1\omega^{n-1}-a_3\omega^{n-3}+a_5\omega^{n-5}-\dots \end{aligned} \tag{4.100}$$

και κατασκευάζονται τα υπόλοιπα με τον αλγόριθμο της διαίρεσης του Ευκλείδη ως εξής

$$f_3(\omega)=\frac{\omega}{a_1}f_2(\omega)-f_1(\omega)=A_{31}\omega^{n-2}-A_{32}\omega^{n-4}+A_{33}\omega^{n-6}-\dots \tag{4.101}$$

και γενικότερα

$$f_{k+2}(\omega)=\frac{A_{k,1}\omega}{A_{k+1,1}}f_{k+1}(\omega)-f_k(\omega)=A_{k+2,1}\omega^{n-3}-A_{k+2,2}\omega^{n-5}+A_{k+2,3}\omega^{n-7}-\dots \tag{4.102}$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου $f_{k+2}(\omega)$ προκύπτουν άμεσα από την τελευταία σχέση

$$A_{k+2,j}=\frac{A_{k+1,1}A_{k,j+1}-A_{k,1}A_{k+1,j+1}}{A_{k+1,1}}=-\frac{\begin{vmatrix}A_{k,1} & A_{k,j+1}\\ A_{k+1,1} & A_{k+1,j+1}\end{vmatrix}}{A_{k+1,1}} \tag{4.103}$$

Εάν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των πολυωνύμων $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ είναι σταθερά, η αλυσίδα Sturm τελειώνει στο πολυώνυμο $f_{n+1}(\omega)$. Εάν εφαρμοστεί η σχέση (4.93) για το διάστημα $(-\infty,\infty)$, θα είναι

$$N(\infty)=N(1,a_1,A_{3,1},A_{4,1},...,A_{n+1,1})$$
$$N(-\infty)=N(1,-a_1,A_{3,1},-A_{4,1},...,(-1)^n A_{n+1,1})=n-N(\infty) \quad (4.104)$$

οπότε ο αριθμός των ριζών του ψ(s) στο δεξιό ημιεπίπεδο θα είναι

$$\nu=N(1,a_1,A_{3,1},A_{4,1},...,A_{n+1,1}) \quad (4.105)$$

Από την Σχέση αυτή προκύπτει άμεσα το θεώρημα του Routh το οποίο διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 4.12 (Θεώρημα Routh)
Έστω το πολυώνυμο ψ(s), όπως στη Σχέση (4.90). Ας σχηματιστεί η διάταξη Routh ως εξής.

s^n	1	a_2	a_4	…	$a_{2\rho}$	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	...	$a_{2\rho+1}$	...
s^{n-2}	A_{31}	A_{32}	A_{33}			
s^{n-3}	A_{41}	A_{42}	A_{43}			
:	:	:				
:	:	:				
s	A_{n1}					
$s^0=1$	$A_{n+1,1}$					

όπου $a_{2\rho}$, $a_{2\rho+1}$ είναι μηδενικά όταν ο δείκτης 2ρ ή 2ρ+1 είναι μεγαλύτερος από n και τα στοιχεία A_{ij} υπολογίζονται από τη σχέση (4.103). Τότε ο αριθμός των ριζών του πολυωνύμου ψ(s) οι οποίες έχουν θετικό πραγματικό μέρος ισούται με τον αριθμό των μεταβολών των προσήμων των στοιχείων της πρώτης στήλης της διάταξης Routh.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι εάν το ψ(s) έχει ρίζα επάνω στο φανταστικό άξονα, έστω $j\omega_0$, αυτή θα μηδενίζει και το φανταστικό και το πραγματικό του μέρος και συνεπώς το ω_0 θα είναι ρίζα του μέγιστου κοινού διαιρέτη των $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$. Άμεσο συμπέρασμα της παρατήρησης αυτής και του Θεωρήματος Routh είναι ότι εάν η διάταξη φθασει μέχρι τη γραμμή n+1 και τα στοιχεία της πρώτης στήλης είναι ομόσημα (θετικά στην περίπτωση αυτή καθώς $A_{11}=1$), όλες οι ρίζες του ψ(s) θα είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο και συνεπώς το σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Δύο ειδών δυσκολίες μπορούν να εμφανιστούν στη διάταξη Routh και αντιμετωπίζονται ως εξής.

1. Ένας από τους όρους της πρώτης στήλης, έστω στην κ γραμμή, μηδενίζεται ενώ στην ίδια γραμμή υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή ο μηδενικός όρος αντικαθίσταται από μία παράμετρο ε και υπολογίζεται η διάταξη Routh ως συνήθως.

Στη διάταξη Routh εάν δοθούν οι γραμμές κ και κ+1 μπορεί να υπολογιστεί κατά μοναδικό τρόπο η γραμμή κ+2. Αντίθετα για τον υπολογισμό της γραμμής κ-1 απαιτείται η γνώση ενός στοιχείου της γραμμής αυτής. Διατηρώντας τα στοιχεία της πρώτης στήλης της διάταξης για τις γραμμές 1,2,...,κ-1 μπορούν να συμπληρωθούν οι γραμμές για το ε που έχει επιλεγεί. Οι δύο πρώτες γραμμές προσδιορίζουν ένα πολυώνυμο Ψ(s,ε) το οποίο ταυτίζεται με το ψ(s) όταν ε=0. Επειδή οι ρίζες του Ψ(s,ε) είναι συνεχείς συναρτήσεις της παραμέτρου ε και δεν υπάρχουν ρίζες του Ψ(s,ε) επάνω στο φανταστικό άξονα για ε=0, οι αριθμοί των ριζών του Ψ(s,ε) και του Ψ(s,0)=ψ(s) στο δεξιό ημιεπίπεδο θα ταυτίζονται για μικρές τιμές του ε. Επομένως, καθώς το ε τείνει στο μηδέν, υπολογίζεται ο αριθμός των αλλαγών προσήμου των στοιχείων της πρώτης στήλης και καθορίζεται ο αριθμός των ριζών του ψ(s) στο δεξιό ημιεπίπεδο.

2. Όλα τα στοιχεία μιάς γραμμής, έστω της κ, μηδενίζονται. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο που αντιστοιχεί στην κ-1 γραμμή και είναι

$$B(s)=A_{\kappa-1,1}s^{n-\kappa+2}+A_{\kappa-1,2}s^{n-\kappa}+A_{\kappa-1,3}s^{n-\kappa-2}+... \tag{4.106}$$

είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των πολυωνύμων $f_1(s)$, $f_2(s)$ και συνεπώς το B(s) είναι παράγων του ψ(s). Αξίζει να τονιστεί ότι το B(s) είναι ένα άρτιο ή ένα περιττό πολυώνυμο και συνεπώς σημαίνει ότι το σύστημα θα είναι ασταθές εάν υπάρχει ρίζα του B(s) η οποία δεν είναι επάνω στο φανταστικό άξονα.

Για τη συνέχιση της διαδικασίας η μηδενική γραμμή αντικαθίσταται από τους συντελεστές της παραγώγου του B(s), δηλαδή η γραμμή

$$\begin{array}{c|cccc} s^{n-\kappa+1} & 0 & 0 & 0 & ... \end{array}$$

Αντικαθίσταται από τη γραμμή

$$\begin{array}{c|cccc} s^{n-\kappa+1} & (n-\kappa+2)A_{\kappa-1,1} & (n-\kappa)A_{\kappa-1,2} & (n-\kappa-2)A_{\kappa-1,3} & ... \end{array}$$

και η υπόλοιπη διάταξη ευρίσκεται ως συνήθως. Είναι προφανές ότι εάν το B(s) έχει ρίζα με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του ένα, έστω μ, η παράγωγός του θα έχει τη ρίζα αυτή με πολλαπλότητα μ-1 και συνεπώς αυτή θα ανήκει στον μέγιστο κοινό διαιρέτη των πολυωνύμων B(s) και dB(s)/ds. Αυτό σημαίνει ότι μ γραμμές της διάταξης Routh θα μηδενίζονται και θα χρειαστεί η αντικατάσταση που περιγράφηκε ανωτέρω πριν τελειώσει η διαδικασία στην γραμμή n+1.

Εάν μετά τη συμπλήρωση της διάταξης Routh δεν εμφανίζονται αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη, όλες οι ρίζες του B(s) θα βρίσκονται επάνω στο φανταστικό άξονα και ενδεχομένως κάποιες από αυτές έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας. Για την εξέταση της ευστάθειας ας θεωρηθεί η χρονική απόκριση του συστήματος κάτω από την επίδραση των αρχικών συνθηκών. Εάν P είναι η ο μετασχηματισμός ομοιότητας που μετασχηματίζει την μήτρα A στην Jordan μορφή, θα είναι

$$\underline{x}(t)=e^{At}\underline{x}(0)=P\mathrm{diag}\left[e^{J_1 t},e^{J_2 t},...,e^{J_\lambda t}\right]P^{-1}\underline{x}(0) \tag{4.107}$$

όπου λ είναι ο αριθμός των διακριτών ριζών του ψ(s) και J_i το ιοστό μπλόκ Jordan της A. Καθώς

$$e^{J_i t}=e^{s_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \vdots & \dfrac{t^{\mu_i-2}}{(\mu_i-2)!} & \dfrac{t^{\mu_i-1}}{(\mu_i-1)!} \\ 0 & 1 & \vdots & \dfrac{t^{\mu_i-3}}{(\mu_i-3)!} & \dfrac{t^{\mu_i-2}}{(\mu_i-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.108}$$

όπου μ_i είναι η πολλαπλότητα της ρίζας s_i, και για τις ρίζες s_i=jω επάνω στο φανταστικό άξονα ισχύει

$$e^{j\omega t} = \sigma\upsilon\nu(\omega t) + j\eta\mu(\omega t)\,, \tag{4.109}$$

η $\underline{x}(t)$ θα είναι φραγμένη για κάθε σύνολο αρχικών συνθηκών εάν και μόνο εάν δεν εμφανίζονται μπλόκ Jordan για τις ιδιοτιμές της Α επάνω στο φανταστικό άξονα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν μ ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της Α τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή s_i. Συνεπώς θα ισχύει

Θεώρημα 4.13 Το σύστημα συνεχούς χρόνου το οποίο περιγράφεται από τη σχέση (4.) με χαρακτηριστικό πολυώνυμο ψ(s) το οποίο

- έχει ρίζες s_i με πολλαπλότητα μ_i, i=1,2,…,ρ επάνω στο φανταστικό άξονα
- δεν εμφανίζονται αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη της διάταξης Routh

θα είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν

$$\mathrm{rank}[s_i I_n - A] = n - \mu_i \quad i=1,2,...,\rho \tag{4.110}$$

Παράδειγμα 4.10

Για την εύρεση της θέσης των ριζών του πολυωνύμου

$$\psi_1(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4 \tag{4.111}$$

στο μιγαδικό επίπεδο εφαρμόζεται η διάταξη Routh ως εξής

s^4	1	1	4
s^3	2	4	0
s^2	-1	4	
s	12		
1	4		

Καθώς στην πρώτη στήλη εμφανίζονται δύο αλλαγές προσήμου, το πολυώνυμο έχει δύο ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα 4.11

Για την εύρεση της θέσης των ριζών του πολυωνύμου

$$\psi_2(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 3s + 2 \tag{4.112}$$

στο μιγαδικό επίπεδο εφαρμόζεται η διάταξη Routh ως εξής

s^5	1	4	3
s^4	2	8	2
s^3	0 αντικαθίσταται με ε	2	0
s^2	8-4/ε	2	
s	$2-\dfrac{2\varepsilon}{8-\dfrac{4}{\varepsilon}}=2-\dfrac{\varepsilon^2}{4\varepsilon-2}$	0	
1	2		

Όταν το ε τείνει στο μηδέν εμφανίζονται δύο αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη της διάταξης. Επομένως το πολυώνυμο έχει δύο ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα 4.12

Για το αυτόνομο σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\underline{\dot{x}}(t)=A\underline{x}(t)=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4-k & 5-k & 3-k & 2-k & 1-2k \\ k & -7+k & -3+k & -4+k & -2-2k \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}(t) \tag{4.113}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι

$$\psi_3(s)=\det(sI-A)=s^5+s^4+(1+k)s^3+(1+k)s^2+ks+k \tag{4.114}$$

Για την εύρεση της θέσης των ριζών του πολυωνύμου $\psi_3(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο εφαρμόζεται η διάταξη Routh ως εξής

s^5	1	1+k	k
s^4	1	1+k	k
s^3	0	0	0
Αντικαθίσταται με s^3	4	2(1+k)	
s^2	(1+k)/2	k	
s	$2\dfrac{(1-k)^2}{1+k}$	0	
1	k		

Ο μηδενισμός της τρίτης γραμμής σημαίνει ότι το πολυώνυμο

$$B(s)=s^4+(1+k)s^2+k \tag{4.115}$$

είναι παράγων του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

1. Εάν

$$k<-1 \tag{4.116}$$

υπάρχει μία αλλαγή προσήμου στην πρώτη στήλη της διάταξης και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής του συστήματος έχει μία ρίζα στο δεξιό ημιεπίπεδο και επομένως είναι ασταθής.

2. Εάν

$$-1<k<0 \tag{4.117}$$

υπάρχει μία αλλαγή προσήμου στην πρώτη στήλη της διάταξης και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής του συστήματος έχει μία ρίζα στο δεξιό ημιεπίπεδο και επομένως είναι ασταθής.

3. Εάν

$$0<k<1 \;\; ή \;\; 1<k \tag{4.118}$$

δεν υπάρχει αλλαγή προσήμου στην πρώτη στήλη της διάταξης και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής του συστήματος δεν έχει ρίζα στο δεξιό ημιεπίπεδο. Επειδή θα έχει τέσσερις απλές ρίζες επάνω στο φανταστικό άξονα η περιγραφή θα είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής.

4. Εάν

$$k=1 \tag{4.119}$$

θα μηδενίζεται και η γραμμή με δείκτη s και συνεπώς το B(s) θα έχει διπλές ρίζες επάνω στο φανταστικό άξονα τις s=j και s=-j. Επειδή

$$\mathrm{rank}[s_i I_n - A] = \mathrm{rank}[jI_5 - A] = 4 > n - \mu_i = 3 \tag{4.120}$$

η περιγραφή θα είναι ασταθής.

Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το πολυώνυμο ψ(s) όλες τις ρίζες του στο αριστερό ημιεπίπεδο δόθηκε επίσης από τον Hurwitz και περιγράφεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.14 (Θεώρημα Hurwitz)
Έστω το πολυώνυμο

$$\psi(s)=\det(sI-A)=s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n=\prod_{i=1}^{n}(s-s_i) \tag{4.121}$$

και Δ η μήτρα που κατασκευάζεται από τους συντελεστές του ως ακολούθως

$$\Delta=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{4.122}$$

με $a_k=0$ εάν k>n. Οι ρίζες του ψ(s) είναι όλες στο αριστερό ήμισυ του μιγαδικού επιπέδου εάν και μόνο εάν όλες οι ελάσσονες Δ_i, i=1,2,…,n που σχηματίζονται από τις i πρώτες γραμμές και τις i πρώτες στήλες της Δ είναι θετικές.

Εάν ένα ζεύγος ριζών του ψ(s) ευρίσκεται επάνω στο φανταστικό άξονα ορισμένες από τις ελάσσονες Δ_i μηδενίζονται. Και στην περίπτωση αυτή είναι δυνατός ο προσδιορισμός των ριζών του ψ(s) που κείνται στο δεξιό ημιεπίπεδο (Gantmacher 1959).

Η απαίτηση να είναι θετικές όλες οι ελάσσονες Δ_i συνεπάγεται άσκοπους υπολογισμούς. Οι Lienard και Chipart διετύπωσαν τέσσερις εναλλακτικές συνθήκες οι οποίες απαιτούν τον υπολογισμό του ημίσεως των οριζουσών του Hurwitz.

Θεώρημα 4.15 (Θεώρημα Lienard-Chipart)
Οι ρίζες του ψ(s) είναι όλες στο αριστερό ήμισυ του μιγαδικού επιπέδου εάν και μόνο εάν μία από τις ακόλουθες ικανές και αναγκαίες συνθήκες ισχύει.

1. n άρτιος

$$a_n>0 \quad a_{n-2}>0 \quad a_{n-4}>0 \quad ... \quad a_{n-2\rho}>0 \quad \cdots \tag{4.123}$$

$$\Delta_1>0 \quad \Delta_3>0 \quad \Delta_5>0 \quad ... \quad \Delta_{2\rho+1}>0 \quad \cdots$$

2. n περιττός

$$a_n>0 \quad a_{n-2}>0 \quad a_{n-4}>0 \quad ... \quad a_{n-2\rho}>0 \quad \cdots \tag{4.124}$$

$$\Delta_2>0 \quad \Delta_4>0 \quad \Delta_6>0 \quad ... \quad \Delta_{2\rho+2}>0 \quad \cdots$$

3. n άρτιος

$$a_n>0 \quad a_{n-1}>0 \quad a_{n-3}>0 \quad ... \quad a_{n-2\rho-1}>0 \quad \cdots \tag{4.125}$$

$$\Delta_1>0 \quad \Delta_3>0 \quad \Delta_5>0 \quad ... \quad \Delta_{2\rho+3}>0 \quad \cdots$$

4. n περιττός

$$a_n>0 \quad a_{n-1}>0 \quad a_{n-3}>0 \quad ... \quad a_{n-2\rho-1}>0 \quad \cdots \tag{4.126}$$

$$\Delta_2>0 \quad \Delta_4>0 \quad \Delta_6>0 \quad ... \quad \Delta_{2\rho+4}>0 \quad \cdots$$

4.5.2 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Το πρόβλημα της ασυμπτωτικής ευστάθειας των συστημάτων διακριτού χρόνου έγκειται στον προσδιορισμό του αριθμού των ριζών του πολυωνύμου

$$\psi(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0 \tag{4.127}$$

οι οποίες βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων.

Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$z=\frac{1+s}{1-s}, \tag{4.128}$$

ο οποίος απεικονίζει το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων στο αριστερό ημιεπίπεδο, είναι δυνατόν από το ψ(z) να δημιουργηθεί το πολυώνυμο φ(s) και με ένα από τα κριτήρια που έχουν παρουσιαστεί να προσδιοριστεί ο αριθμός των ριζών του φ(s) στο αριστερό ημιεπίπεδο.

Εκτός της έμμεσης αυτής διαδικασίας υπάρχουν και άμεσα κριτήρια τα οποία εξασφαλίζουν ότι οι ρίζες του ψ(z) ευρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Στο ακόλουθο κριτήριο των Jury - Blanchard κατασκευάζεται μία διάταξη ανάλογη με εκείνη του κριτηρίου του Routh.

Από του συντελεστές του πολυώνυμου κατασκευάζεται η διάταξη

Γραμμή	z^0	z^1	z^2	…	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	$a_0^0=a_0$	$a_1^0=a_1$	$a_2^0=a_2$	…	$a_{n-2}^0=a_{n-2}$	$a_{n-1}^0=a_{n-1}$	$a_n^0=1$
2	$a_n^0=1$	$a_{n-1}^0=a_{n-1}$	$a_{n-2}^0=a_{n-2}$	…	$a_2^0=a_2$	$a_1^0=a_1$	$a_0^0=a_0$
3	a_0^1	a_1^1	a_2^1	…	a_{n-2}^1	a_{n-1}^1	
4	a_{n-1}^1	a_{n-2}^1	a_{n-3}^1	…	a_1^1	a_0^1	
5	a_0^2	a_1^2	a_2^2		a_{n-2}^2		

6	a_{n-2}^2	a_{n-3}^2	a_{n-4}^2		a_0^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	
2n-3	a_0^{n-2}	a_1^{n-2}	a_2^{n-2}		
2n-2	a_2^{n-2}	a_1^{n-2}	a_0^{n-2}		

Τα στοιχεία της γραμμής 2κ+2 είναι τα στοιχεία της γραμμής 2κ+1 γραμμένα κατά αντίστροφη τάξη. Τα στοιχεία της διατάξεως ορίζονται

$$a_i^{\kappa} = \begin{vmatrix} a_0^{\kappa-1} & a_{n-\kappa+1-i}^{\kappa-1} \\ a_{n-\kappa+1}^{\kappa-1} & a_i^{\kappa-1} \end{vmatrix} \quad \kappa=1,2,...,n-2 \quad \text{και} \quad i=0,1,...,n-\kappa \tag{4.129}$$

Θεώρημα 4.16 (Θεώρημα Jury-Blanchard)
Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει το ψ(z) όλες τις ρίζες του εντός του μοναδιαίου κύκλου είναι:

$$\psi(1)>0 \tag{4.130α}$$

$$(-1)^n \psi(-1)>0 \tag{4.130β}$$

$$\left|a_0^0\right|<1 \tag{4.130γ}$$

$$\left|a_0^{\kappa-1}\right|>\left|a_{n-\kappa+1}^{\kappa-1}\right| \quad \kappa=2,3,...,n-2 \tag{4.130δ}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο Θεώρημα 4.16 έγινε δεκτό ότι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί και ότι a_n=1.

Παράδειγμα 4.13
Έστω το πολυώνυμο

$$\psi(z)=z^5+0.9z^4+0.3z^3-0.2z^2-0.1z-0.04 \tag{4.131}$$

Κατασκευάζεται η διάταξη Jury – Blanchard

Γραμμή	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
1	-0.04	-0.1	-0.2	0.3	0.9	1
2	1	0.9	0.3	-0.2	-0.1	-0.04
3	-0.9984	-0.896	-0.292	0.188	0.064	
4	0.064	0.188	-0.292	-0.896	-0.9984	
5	0.9927	0.8825	0.3102	-0.1304		
6	-0.1304	0.3102	0.8825	0.9927		
7	0.9684	0.9165	0.423			
8	0.423	0.9165	0.9684			

Από τις σχέσεις (4.130) λαμβάνονται

$$\psi(1)=1+0.9+0.3-0.2-0.1-0.04=1.86>0 \tag{4.132α}$$

$$(-1)^5 \psi(-1)=-(-1+0.9-0.3-0.2+0.1-0.04)=0.54>0 \tag{4.132β}$$

$$|-0.04|=0.04<1 \tag{4.132γ}$$

$$|-0.9984|=0.9984>|0.064|=0.064 \tag{4.132δ}$$

$$|0.9927|=0.9927> |-0.1304|=0.1304 \qquad (4.132ε)$$

$$|0.9684|=0.9684> |0.423|=0.423 \qquad (4.132στ)$$

Επειδή τα κριτήρια ικανοποιούνται το σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

4.6 Ευστάθεια Συστημάτων με αβεβαιότητα

4.6.1 Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Το μοντέλο του συστήματος, το οποίο χρησιμοποιείται για την ανάλυσή του και τη σχεδίαση του ελεγκτή, εμφανίζει ανακρίβειες εξαιτίας της αβεβαιότητας των τιμών των στοιχείων του, της γραμμικοποίησης των εξισώσεών του ή της παράλειψης μέρους της δυναμικής του. Σαν αποτέλεσμα αυτών των αβεβαιοτήτων οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι δυνατόν να μην είναι γνωστοί αλλά να λαμβάνουν τιμές μέσα σε ένα δεδομένο διάστημα. Είναι προφανές το ενδιαφέρον να εξασφαλιστεί η ευστάθεια ολόκληρης της οικογένειας των συστημάτων.

Έστω

$$\psi(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+...+a_ns^n \qquad (4.133)$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος με

$$\underline{a}_i \le a_i \le \overline{a}_i \quad i=0,1,...,n \qquad (4.134)$$

Ο έλεγχος της ευστάθειας της οικογένειας θα μπορούσε να γίνει με σάρωση των περιοχών μεταβολής των συντελεστών και χρήση του θεωρήματος του Routh. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυξάνει δραματικά με την αύξηση του αριθμού των αβέβαιων συντελεστών. Για 20 συντελεστές (πολυώνυμο βαθμού ίσου με δεκαεννέα) και 20 σημεία σε κάθε διάστημα θα απαιτείτο ο έλεγχος 20^{20} πολυωνύμων.

Το 1978 ο Ρώσος μαθηματικός Kharitonov απέδειξε ένα πρωτοποριακό θεώρημα, το οποίο περιορίζει δραστικά την υπολογιστική προσπάθεια για τον έλεγχο της ασυμπτωτικής ευστάθειας της οικογένειας των συστημάτων συνεχούς χρόνου, ως ακολούθως.

Θεώρημα 4.17 (Θεώρημα Kharitonov)
Το σύνολο των πολυωνύμων της σχέσεως (4.) των οποίων οι συντελεστές ικανοποιούν τις σχέσεις (4.) είναι ασυμπτωτικά ευσταθή εάν και μόνο εάν τα ακόλουθα τέσσερα πολυώνυμα

$$K_1(s)=\underline{a}_0+\underline{a}_1s+\overline{a}_2s^2+\overline{a}_3s^3+\underline{a}_4s^4+\underline{a}_5s^5+\overline{a}_6s^6+... \qquad (4.135α)$$

$$K_2(s)=\underline{a}_0+\overline{a}_1s+\overline{a}_2s^2+\underline{a}_3s^3+\underline{a}_4s^4+\overline{a}_5s^5+\overline{a}_6s^6+... \qquad (4.135β)$$

$$K_3(s)=\overline{a}_0+\underline{a}_1s+\underline{a}_2s^2+\overline{a}_3s^3+\overline{a}_4s^4+\underline{a}_5s^5+\underline{a}_6s^6+... \qquad (4.135γ)$$

$$K_4(s)=\overline{a}_0+\overline{a}_1s+\underline{a}_2s^2+\underline{a}_3s^3+\overline{a}_4s^4+\overline{a}_5s^5+\underline{a}_6s^6+... \qquad (4.135δ)$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθή

Πολλές αποδείξεις του θεωρήματος αυτού μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία. Εάν θεωρηθεί ο χώρος που δημιουργείται από τους συντελεστές του ψ(s), αυτός θα είναι ένας χώρος n+1 διαστάσεων και στο χώρο αυτό οι συντελεστές της οικογένειας των πολυωνύμων θα ανήκουν σε ένα παραλληλεπίπεδο το οποίο θα έχει 2^{n+1} κορυφές. Από το Θεώρημα 4. προκύπτει ότι μόνο τέσσερις κορυφές αυτού του παραλληλεπιπέδου χρειάζεται να εξεταστούν για την εξακρίβωση της ευστάθειας όλης της οικογένειας.

Παράδειγμα 4.14

Ας θεωρηθεί το πολυώνυμο

$$\psi(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3 \tag{4.136}$$

με

$$5 \le a_0 \le 15 \quad 6 \le a_1 \le 30 \quad 5 \le a_2 \le 40 \quad 1 \le a_3 \le 1 \tag{4.137}$$

Για το πολυώνυμο τρίτου βαθμού, από τη διάταξη Routh λαμβάνεται

$$\begin{array}{lll} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s & \dfrac{a_2a_1-a_3a_0}{a_2} & \\ s^0 & a_0 & \end{array}$$

Καθώς a_3=1, για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες

$$a_0>0 \tag{4.138α}$$

$$a_2>0 \tag{4.138β}$$

$$\frac{a_2a_1-a_3a_0}{a_2}>0 \tag{4.138γ}$$

Επειδή τα διαστήματα των συντελεστών είναι στο θετικό άξονα, από το θεώρημα του Kharitonov πρέπει και αρκεί να εξεταστεί η τελευταία ανισότητα για τα τέσσερα πολυώνυμα της σχέσεως (4.135)

$$K_1(s)=5+6s+40s^2+s^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{40*6-1*5}{40}=\frac{235}{40}>0 \tag{4.139α}$$

$$K_2(s)=5+30s+40s^2+s^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{40*30-1*5}{40}=\frac{1195}{40}>0 \tag{4.139β}$$

$$K_3(s)=15+6s+5s^2+s^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{5*6-1*15}{5}=\frac{15}{5}>0 \tag{4.139γ}$$

$$K_4(s)=15+30s+5s^2+s^3 \quad \Rightarrow \frac{30*5-1*15}{5}=\frac{135}{5}>0 \tag{4.139δ}$$

Καθώς και τα τέσσερα πολυώνυμα έχουν ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο, όλη η οικογένεια των πολυωνύμων θα αντιστοιχεί σε ασυμπτωτικά ευσταθή συστήματα.

Αξίζει να τονιστεί ότι στο θεώρημα του Kharitonov υποτίθεται ότι οι συντελεστές μεταβάλλονται ανεξάρτητα στα διαστήματα. Αυτό δεν είναι η γενική περίπτωση, όπου η μεταβλητότητα ενός στοιχείου προκαλεί μεταβολή σε όλους τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Και στην περίπτωση αυτή το θεώρημα του Kharitonov μπορεί να εφαρμοστεί βρίσκοντας τις ακρότατες μεταβολές των συντελεστών και φράσσοντας τις μεταβολές με ένα παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες προς τους άξονες του χώρου των συντελεστών. Τα αποτελέσματα εάν εφαρμοστεί αυτή η διαδικασία προσδιορίζονται με απλότητα, όμως είναι δυνατόν να είναι πολύ συντηρητικά, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα

Παράδειγμα 4.15

Ας θεωρηθεί το πολυώνυμο

$$\psi(s)=k+a_1s+ks^2+a_3s^3 \tag{4.140}$$

με

$$6\le a_1\le 30 \quad 5\le k\le 40 \quad 1\le a_3\le 1 \tag{4.141}$$

Οι ακρότατες τιμές των συντελεστών a_0,a_2 είναι 5 και 40. Εάν εφαρμοστεί θεώρημα του Kharitonov, το πολυώνυμο $K_3(s)$ δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και συνεπώς η ασυμπτωτική ευστάθεια της οικογένειας των πολυωνύμων της σχέσεως (4.140) δεν μπορεί να συναχθεί. Καθώς $k>0$, από τις σχέσεις (4.138) προκύπτει ότι για να είναι ευσταθής η οικογένεια των πολυωνύμων της σχέσεως (4.140) πρέπει και αρκεί

$$\frac{a_2a_1-a_3a_0}{a_2}=\frac{ka_1-a_3k}{k}=a_1-a_3=a_1-1>0 \tag{4.142}$$

η οποία ισχύει. Επομένως όλη η οικογένεια αντιστοιχεί σε ασυμπτωτικά ευσταθή συστήματα, συμπέρασμα το οποίο δεν μπορεί να εξαχθεί με τη διαδικασία που περιγράφηκε.

4.6.2 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Αξίζει να τονιστεί ότι το θεώρημα του Kharitonov αφορά την ασυμπτωτική ευστάθεια συστημάτων συνεχούς χρόνου, δηλαδή εξασφάλιση ότι οι ρίζες των πολυωνύμων ανήκουν στο αριστερό ήμισυ του μιγαδικού επιπέδου. Για την ευστάθεια των συστημάτων διακριτού χρόνου οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πρέπει να ευρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων. Ας θεωρηθεί το πολυώνυμο

$$\psi(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n \tag{4.143}$$

με συντελεστές που ανήκουν στο παραλληλεπίπεδο A του χώρου των συντελεστών που καθορίζεται από τις σχέσεις

$$\underline{a}_i\le a_i\le \overline{a}_i \quad i=0,1,...,n \tag{4.144}$$

Ορισμός 4.15 Κορυφές του παραλληλεπιπέδου A είναι το σύνολο των σημείων

$$V=\left\{(a_0,a_1,a_2,...,a_n):\ a_i=\underline{a}_i \quad ή \quad a_i=\overline{a}_i \quad i=0,1,2,...,n\right\} \tag{4.145}$$

Ορισμός 4.16 Ακμή του παραλληλεπιπέδου A είναι το σύνολο των σημείων

$$E_k=\left\{(a_0,a_1,a_2,...,a_n):\ a_i=\underline{a}_i \ \text{ή}\ a_i=\overline{a}_i,\ i=0,1,2,...,n,\quad i\neq k \ \text{και}\ \underline{a}_k\leq a_k\leq \overline{a}_k\right\} \quad (4.146)$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι για κάθε k αντιστοιχούν 2^n ακμές.

Ορισμός 4.17 Σύνολο των ανώτερων ακμών του παραλληλεπιπέδου A είναι το σύνολο

$$E^*=\left\{\begin{array}{ll} \bigcup\limits_{\frac{n}{2}+1}^{n} E_k & \text{k άρτιος} \\ \\ \bigcup\limits_{\frac{n+1}{2}}^{n} E_k & \text{k περιττός} \end{array}\right\} \quad (4.147)$$

Ορισμός 4.18 Ένα πολυώνυμο της οικογένειας των πολυωνύμων της σχέσεως (4.143) καλείται ακμιακό εάν οι συντελεστές του ανήκουν σε μία ακμή του παραλληλεπιπέδου

Κατόπιν των ανωτέρω το αντίστοιχο του θεωρήματος του Kharitonov για τα συστήματα διακριτού χρόνου μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 4.18 Το σύνολο των πολυωνύμων της σχέσεως (4.143) των οποίων οι συντελεστές ανήκουν στο παραλληλεπίπεδο A (ικανοποιούν τις σχέσεις (4.144)) έχουν τις ρίζες τους εντός του μοναδιαίου κύκλου (είναι Schur ευσταθή) εάν και μόνο εάν η οικογένεια των ακμιακών πολυωνύμων που αντιστοιχούν στις ανώτερες ακμές του παραλληλεπιπέδου A αποτελείται από Schur ευσταθή πολυώνυμα.

Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 4.18, για τον έλεγχο της Schur ευστάθειας δεν αρκεί ο έλεγχος των πολυωνύμων που αντιστοιχούν στις κορυφές του παραλληλεπιπέδου αλλά χρειάζεται και ο έλεγχος των πολυωνύμων που αντιστοιχούν στις ανώτερες ακμές. Άμεσο συμπέρασμα του θεωρήματος είναι ότι εάν οι συντελεστές των όρων που καθορίζουν τις ανώτερες ακμές δεν υφίστανται μεταβολές, η Schur ευστάθεια της οικογένειας των πολυωνύμων συνάγεται από την Schur ευστάθεια των πολυωνύμων που αντιστοιχούν στις κορυφές του παραλληλεπιπέδου.

Παράδειγμα 4.16

Ας θεωρηθεί το πολυώνυμο

$$\psi(z)=a_0+a_1z+a_2z^2 \quad (4.148)$$

με

$$1\leq a_0\leq 3 \quad 4\leq a_1\leq 5 \quad 5\leq a_2\leq 7 \quad (4.149)$$

Για το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, από τη διάταξη Jury-Blanchard λαμβάνεται

Γραμμή	z^0	z^1	z^2
1	a_0	a_1	a_2
2	a_2	a_1	a_0

οπότε θα έχουμε:

$$\psi(1)=a_0+a_1+a_2>0 \tag{4.150α}$$

$$(-1)^2\psi(-1)=a_0-a_1+a_2>0 \tag{4.150β}$$

$$|a_0|<|a_2| \tag{4.150γ}$$

Για τις περιοχές μεταβολής των συντελεστών τα πολυώνυμα που αντιστοιχούν στις ανώτερες ακμές του παραλληλεπιπέδου θα είναι

$$K_1(z)=1+4z+\left[5\lambda+7(1-\lambda)\right]z^2 \quad \mu\varepsilon \quad 0\le\lambda\le 1 \tag{4.151α}$$

$$K_2(z)=1+5z+\left[5\lambda+7(1-\lambda)\right]z^2 \quad \mu\varepsilon \quad 0\le\lambda\le 1 \tag{4.151β}$$

$$K_3(z)=3+4z+\left[5\lambda+7(1-\lambda)\right]z^2 \quad \mu\varepsilon \quad 0\le\lambda\le 1 \tag{4.151γ}$$

$$K_4(z)=3+5z+\left[5\lambda+7(1-\lambda)\right]z^2 \quad \mu\varepsilon \quad 0\le\lambda\le 1 \tag{4.151δ}$$

Η ικανοποίηση των ανισοτήτων (4.150) από τα τέσσερα πολυώνυμα φαίνεται στον ακόλουθο Πίνακα

Πολυώνυμο	$\psi(1)=a_0+a_1+a_2>0$	$(-1)^2\psi(-1)=a_0-a_1+a_2>0$	$\lvert a_0\rvert<\lvert a_2\rvert$
$K_1(z)$	$12-2\lambda\geq 10>0$	$4-2\lambda\geq 2>0$	$\lvert a_2\rvert=\lvert 7-2\lambda\rvert\ge 5>1=\lvert a_0\rvert$
$K_2(z)$	$13-2\lambda\geq 11>0$	$3-2\lambda\geq 1>0$	$\lvert a_2\rvert=\lvert 7-2\lambda\rvert\ge 5>1=\lvert a_0\rvert$
$K_3(z)$	$14-2\lambda\geq 12>0$	$6-2\lambda\geq 4>0$	$\lvert a_2\rvert=\lvert 7-2\lambda\rvert\ge 5>3=\lvert a_0\rvert$
$K_4(z)$	$15-2\lambda\geq 13>0$	$5-2\lambda\geq 3>0$	$\lvert a_2\rvert=\lvert 7-2\lambda\rvert\ge 5>3=\lvert a_0\rvert$

Καθώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 4.18, η οικογένεια των πολυωνύμων της σχέσεως (4.148) θα αντιστοιχεί σε ασυμπτωτικά ευσταθή συστήματα διακριτού χρόνου.

4.7 Ευστάθεια υβριδικών συστημάτων

Ένα υβριδικό σύστημα συνίσταται από ένα σύστημα συνεχούς ή διακριτού χρόνου το οποίο αλληλεπιδρά με μία λογική διαδικασία ή με μία διαδικασία λήψεως αποφάσεων. Το σύστημα συνεχούς ή διακριτού χρόνου επιδρά στη μεταβολή της κατάστασης του λογικού συστήματος ενώ η λογική διαδικασία επιδρά στην κίνηση του διανύσματος καταστάσεων του συστήματος συνεχούς ή διακριτού χρόνου. Υβριδικά συστήματα χρησιμοποιούνται ευρύτατα. Η λειτουργία on-off ενός φούρνου ή ενός συστήματος θέρμανσης κτιρίου, η κίνηση οχήματος με κιβώτιο ταχυτήτων το οποίο διαθέτει περισσότερους του ενός λόλους μετάδοσης, διακοπτ'ομενα τροφοδοτικά κ.α.

Ας θεωρηθεί η περιγραφή του υβριδικού συστήματος ως εξής.

$$\dot{\underline{x}}(t)=f\left(\underline{x}(t),p(t),\underline{u}(t)\right) \tag{4.152α}$$

$$\underline{y}(t)=g\left(\underline{x}(t),p(t),\underline{u}(t)\right) \tag{4.152β}$$

$$p(t^{+})=\varphi\left(\underline{x}(t),p(t),\underline{u}(t),\sigma(t)\right) \tag{4.152γ}$$

όπου x(t) είναι η κατάσταση του συστήματος συνεχούς χρόνου, u(t) η είσοδός του, y(t) η έξοδός του, $p(t)\in\{1,2,\ldots,M\}$ μία διακριτή κατάσταση η οποία παραμετροποιεί τη συνάρτηση f, σ(t) μία είσοδος διακριτού γεγονότος και φ μία ασυνεχής συνάρτηση μεταγωγής, η οποία περικλείει τη δυναμική της λογικής διαδικασίας.

Παράδειγμα 4.17

Ας θεωρηθεί το σύστημα κίνησης οχήματος, όπως στο Σχήμα 4.7. Ο λόγος N_1:N_2 εξαρτάται από τον εμπλεκόμενο τροχό στο κιβώτιο ταχυτήτων και έστω R η ακτίνα του τροχού του οχήματος.

	Σχήμα 4.7

Θα είναι

$$J_1\frac{d\omega_1}{dt}=T_1-T_1^{'} \tag{4.153α}$$

$$\omega_1=\omega_1^{'}=-\frac{N_2}{N_1}\omega_2^{'}=\frac{N_2}{N_1}\omega_2 \tag{4.153β}$$

$$T_1^{'}=\frac{N_1}{N_2}T_2^{'} \tag{4.153γ}$$

$$T_2=-T_2^{'}=J_2\frac{d\omega_2}{dt}+B\omega_2 \tag{4.153δ}$$

Εάν x_1=x παριστάνει τη θέση του οχήματος και x_2=v την ταχύτητά του, θα είναι

$$x_2=\omega_2 R \tag{4.154}$$

και το σύστημα θα περιγράφεται από τις σχέσεις.

$$\dot{x}_1=x_2 \tag{4.155α}$$

$$\left(\frac{N_1}{N_2}J_2+\frac{N_2}{N_1}J_1\right)\frac{dx_2}{dt}=-\frac{N_1}{N_2}Bx_2+RT_1 \tag{4.155β}$$

Η ροπή T_1 εξαρτάται από την παροχή καυσίμου και αυτή από τη θέση $u\in[0,1]$ της βαλβίδας. Ο λόγος N_1:N_2 εξαρτάται από τον εμπλεκόμενο τροχό στο κιβώτιο ταχυτήτων (ταχύτητα) την οποία χρησιμοποιεί ο οδηγός και αντιστοιχεί στη διακριτή κατάσταση p. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, οι εξισώσεις (4.155) γράφονται

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.156α}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a(p)x_2 + b(p)u \tag{4.156β}$$

Η απλούστερη μορφή υβριδικών συστημάτων είναι τα διακοπτικά συστήματα. Η εξέταση της ευστάθειας τέτοιων συστημάτων κρύβει εκπλήξεις, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.18

Έστω το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\underline{\dot{x}}(t) = A_{p(t)}\underline{x}(t) \qquad p \in \{1,2\} \tag{4.157α}$$

με

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 100 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.157β}$$

Και οι δύο μήτρες αντιστοιχούν σε ασυμπτωτικά ευσταθή συστήματα, καθώς οι ιδιοτιμές τους είναι $-1 \pm j\sqrt{1000}$. Εάν χρησιμοποιηθεί σαν διαδικασία μεταγωγής η

$$p(t^+) = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad p(t)=2 \quad \text{και} \quad x_2=0 \\ \\ 2 & \text{εάν} \quad p(t)=1 \quad \text{και} \quad x_1=0 \end{cases} \tag{4.158}$$

οι τροχιές του διανύσματος καταστάσεων για διάφορες αρχικές συνθήκες (φασικό πορτραίτο) φαίνονται στο Σχήμα 4.8(α). Είναι προφανές ότι το διακοπτικό σύστημα είναι ασταθές.

Σχήμα 4.8(α)	Σχήμα 4.8(β)

Εάν χρησιμοποιηθεί σαν διαδικασία μεταγωγής η

$$p(t^+) = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad p(t)=2 \quad \text{και} \quad x_1=0 \\ \\ 2 & \text{εάν} \quad p(t)=1 \quad \text{και} \quad x_2=0 \end{cases} \tag{4.159}$$

οι τροχιές του διανύσματος καταστάσεων για διάφορες αρχικές συνθήκες (φασικό πορτραίτο) φαίνονται στο Σχήμα 4.8(β). Είναι προφανές ότι το διακοπτικό σύστημα είναι ευσταθές.

Ας θεωρηθεί το σύστημα

$$\underline{\dot{x}}(t) = f\left(\underline{x}(t), p(t)\right) = f_p(\underline{x}) \qquad p \in \{1,2,...,M\} \tag{4.160}$$

με κοινό σημείο ισορροπίας το σημείο $x=x_e$ για όλα τα p. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι $x_e=0$, όπως και στην περίπτωση των συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Ορισμός 4.19 Μία οικογένεια βαθμωτών πραγματικών συναρτήσεων με συνεχείς μερικές παραγώγους $V_i(\underline{x})$, i=1,2,…,M, οι οποίες αντιστοιχούν στις διανυσματικές συναρτήσεις $f_i(\underline{x})$

και στο σημείο ισορροπίας $\underline{x}_e=\underline{0}$ καλείται συνάρτηση τύπου Lyapunov εάν ικανοποιεί τις συνθήκες

α) $V_i(\underline{0})=0$ και $V_i(\underline{x})>0$ για $\underline{x}\neq\underline{0}$ και $\underline{x}\in\Omega_i$ περιοχή του σημείου ισορροπίας.

β) $\dot{V}_i(\underline{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}f_{ij}\left(\underline{x}(t)\right)\leq 0$ για $\underline{x}\in\Omega_i$ περιοχή του σημείου ισορροπίας.

Η συνάρτηση τύπου Lyapunov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της ευστάθειας του διακοπτικού συστήματος, όπως φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.19 Ας υποτεθεί ότι κάθε συνάρτηση $f_i(\underline{x})$ διαθέτει συνάρτηση $V_i(\underline{x})$ στην περιοχή Ω_i του σημείου ισορροπίας και έστω $\bigcup_i \Omega_i=R^n$, ο χώρος καταστάσεων. Έστω p(t) ακολουθία μεταγωγής ώστε p(t) λαμβάνει την τιμή i μόνο εάν $\underline{x}(t)\in\Omega_i$ και επιπλέον

$$V_i\left(\underline{x}(t_{i,k})\right)\leq V_i\left(\underline{x}(t_{i,k-1})\right) \tag{4.161}$$

όπου ti,k παριστάνει την χρονική στιγμή της k μεταγωγής στην συνάρτηση $f_i(\underline{x})$, δηλαδή

$$p(t_{i,k}^{-})\neq p(t_{i,k}^{+})=i \tag{4.162}$$

Τότε το σύστημα (4.160) είναι ευσταθές κατά Lyapunov.

Το ανωτέρω θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της ακολουθίας των μεταγωγών μεταξύ των συναρτήσεων $f_i(\underline{x})$ ώστε η τροχιά που προκύπτει να είναι ευσταθής ως εξής.

Θεώρημα 4.20 Εάν για κάθε $\underline{x}\in R^n$, $\underline{x}\neq\underline{0}$ είναι δυνατόν να επιλεγεί μία συνάρτηση $f_i(\underline{x})$ ώστε

$$\underline{x}^T f_i(\underline{x})<0 \tag{4.163}$$

και κάθε προκύπτουσα δυναμική ολίσθησης είναι κυρτός συνδυασμός, η αρχή $\underline{x}=\underline{0}$ για το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ευσταθής κατά Lyapunov.

Πολλοί κανόνες έχουν προταθεί για την ευσταθειοποίησητων υβριδικών συστημάτων με βάση το θεώρημα 4.20. Σαν παράδειγμα, οι Pettersson και Lennartson πρότειναν για κάθε $\underline{x}\in\bigcup_i \Omega_i$ η συνάρτηση $f_i(\underline{x})$ να επιλέγεται σύμφωνα με το κριτήριο

$$i=\arg\left\{\underset{k}{\mathrm{Min}}(\underline{x}^T f_k(\underline{x}))\right\} \tag{4.164}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εμφανίζει η περίπτωση της μεταγωγής μεταξύ γραμμικών συστημάτων. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις του διακοπτικού συστήματος παίρνουν τη μορφή

$$\dot{\underline{x}}(t)=A_{p(t)}\underline{x}(t) \qquad p\in\{1,2,...,M\} \tag{4.165α}$$

$$p(t^+)=\varphi\left(\underline{x}(t),p(t)\right) \tag{4.165β}$$

Για την ευστάθεια των συστημάτων αυτών ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 4.21 Εάν A_i, i=1,2,…,M, έχουν ιδιοτιμές στο αριστερό ημιεπίπεδο και εάν όλες διαθέτουν μία κοινή τετραγωνική συνάρτηση Lyapunov $V(\underline{x})=\underline{x}^T P\underline{x}$ ώστε $\dot{V}(\underline{x})=-\underline{x}^T(t)Q\underline{x}(t)\leq 0$ με Q>0, τότε το σύστημα είναι ευσταθές για όλες τις ακολουθίες μεταγωγής.

Αξίζει να τονιστεί ότι η ύπαρξη κοινής συνάρτησης Lyapunov τετραγωνικής μορφής είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια του διακοπτικού συστήματος.

Εάν κάποιες από τις μήτρες A_i έχουν ιδιοτιμές στο δεξιό ημιεπίπεδο, θα υπάρχουν ακολουθίες μεταγωγής οι οποίες αποσταθεροποιούν το σύστημα. Εάν όλες οι μήτρες A_i έχουν ιδιοτιμές στο δεξιό ημιεπίπεδο, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 4.22 Εάν όλες οι A_i έχουν ιδιοτιμές στο δεξιό ημιεπίπεδο, υπάρχει p(t) η οποία ευσταθειοποιεί το αντισταθμισμένο σύστημα εάν υπάρχει κυρτός συνδυασμός των A_i

$$A_\sigma = \sum_{i=1}^{M} a_i A_i \quad a_i \geq 0,\ i=1,2,...,M \text{ και } \sum_{i=1}^{M} a_i = 1 \tag{4.166}$$

ώστε η A_σ να είναι ευσταθής.

Το θεώρημα 4.22 δίδει μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της p(t). Η συνθήκη αυτή αποδεικνύεται ότι είναι και αναγκαία για την περίπτωση M=2. Για την ειδική αυτή περίπτωση μπορούν να ευρεθούν μήτρες P_σ,Q_σ θετικά ορισμένες ώστε

$$A_\sigma^T P_\sigma + P_\sigma A_\sigma = -Q_\sigma \tag{4.167}$$

και να οριστούν οι θετικά ορισμένες μήτρες Q_i από τις σχέσεις

$$Q_i = -\left(A_i^T P_\sigma + P_\sigma A_i\right) \quad i=1,2 \tag{4.168}$$

και οι περιοχές

$$\Omega_i = \left\{\underline{x}: -\underline{x}^T Q_i \underline{x} < 0\right\} \tag{4.169}$$

Εάν καθοριστούν οι επιφάνειες μεταγωγής από τις σχέσεις

$$s_1(\underline{x}) = \underline{x}^T\left[Q_1 - \varepsilon Q_2\right] = 0 \tag{4.170α}$$

$$s_2(\underline{x}) = \underline{x}^T\left[Q_2 - \varepsilon Q_1\right] = 0 \tag{4.170β}$$

με ε μικρή συνήθως θετική ποσότητα, ο προσδιορισμός της p(t) μπορεί να γίνει με την ακόλουθη διαδικασία.

- Για δεδομένο $\underline{x}(t_0)$ ενεργοποιείται η $A_{p(t_0)}$ ώστε $\underline{x}(t_0) \in \Omega_{p(t_0)}$.
- $p(t^+)=2$ εάν $p(t)=1$ και $s_1(\underline{x})=0$.
- $p(t^+)=1$ εάν $p(t)=2$ και $s_2(\underline{x})=0$.

Έχει αποδειχθεί ότι η διαδικασία αυτή ευσταθειοποιεί το αντισταθμισμένο σύστημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\underline{\dot{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3bK & 3K+a-Kb & 1-a-K \end{bmatrix}\underline{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

Να διερευνηθεί για ποιές τιμές του K το σύστημα είναι ευσταθές.

Λύση
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής του συστήματος είναι

$$\psi(s)=s^3+(a+K-1)s^2+(-a+Kb-3K)s-3bK \qquad (1)$$

Για τη διερεύνηση της ευστάθειας της περιγραφής κατασκευάζεται η διάταξη Routh ως εξής

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & Kb-3K-a \\ s^2 & a+K-1 & -3Kb \\ s & \dfrac{(Kb-3K-a)(a+K-1)+3bK}{a+K-1} & \\ s^0 & -3Kb & \end{array}$$

Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες

$$a+K-1>0 \qquad (2.\alpha)$$

$$-3Kb>0 \qquad (2.\beta)$$

$$(Kb-3K-a)(a+K-1)+3bK=f(K)=K^2(b-3)+K(ab-4a+2b+3)+a(1-a)>0 \qquad (2.\gamma)$$

Από τις σχέσεις (2.β) και (2.γ) προκύπτει

$$Kb-3K-a>0 \qquad (3)$$

διαφορετικά άθροισμα αρνητικών αριθμών θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός.
Από τη σχέση (2.γ) προκύπτουν δύο περιπτώσεις.

1η Περίπτωση

$$K>0 \text{ και } b<0. \qquad (4)$$

Από τη σχέση (2.α) πρέπει

$$K>1-a \qquad (5)$$

Από τη σχέση (3), καθώς b-3<0, πρέπει

$$K<a/(b-3) \qquad (6)$$

και συνεπώς

$$a<0 \tag{7}$$

Οι σχέσεις (5) και (6) συναληθεύουν μόνο εάν 1-a<a/(b-3) ή ισοδύναμα καθώς b-3<0

$$(1-a)(b-3)-a=b-ab+2a-3>0 \tag{8}$$

Η σχέση (8) είναι αδύνατη καθώς άθροισμα αρνητικών αριθμών προκύπτει μεγαλύτερο του μηδενός. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει λύση του προβλήματος.

2η Περίπτωση

$$K<0 \text{ και } b>0 \tag{9}$$

Από τη σχέση (2.α) προκύπτει

$$a>1-K>1 \tag{10}$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει K(b-3)>a>1 και επειδή K<0

$$b<3 \tag{11}$$

Από τη σχέση (2.α) προκύπτει

$$K>1-a \tag{12}$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει καθώς b<3

$$K<a/(b-3) \tag{13}$$

Για να συναληθεύουν οι σχέσεις (12) και (13) πρέπει

$$1-a<a/(b-3) \tag{14}$$

ή ισοδύναμα καθώς b<3

$$a-(1-a)(b-3)=ab+3-b-2a<0 \tag{15}$$

Ας θεωρηθεί η σχέση (2.γ). Καθώς b-3<0, το τριώνυμο ως προς K θα ικανοποιεί τη σχέση όταν το K βρίσκεται μεταξύ των ριζών του. Αυτό συνεπάγεται ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου

$$\Delta=(ab-4a+2b+3)^2-4(b-3)a(1-a)>0 \tag{16}$$

Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι a(a-1)/(b-3), δηλαδή θετικό, και οι ρίζες είναι ομόσημες. Για να είναι και οι δύο αρνητικές πρέπει το άθροισμά τους να είναι αρνητικό, δηλαδή

$$ab-4a+2b+3<0 \tag{17}$$

Είναι

$$f(K)\Big|_{K=1-a}=(1-a)^2(b-3)+(1-a)(ab-4a+2b+3)+a(1-a)=3b(1-a)<0 \tag{18}$$

$$f(K)\Big|_{K=\frac{a}{b-3}}=\left(\frac{a}{b-3}\right)^2(b-3)+\left(\frac{a}{b-3}\right)(ab-4a+2b+3)+a(1-a)=\frac{2ab}{b-3}<0 \tag{19}$$

δηλαδή το (1-a) και το a/(b-3) είναι εκτός των ριζών του τριωνύμου. Για να ικανοποιείται η (12) και η (2.γ)πρέπει το 1-a να είναι μικρότερο από τη μικρότερη ρίζα του τριωνύμου και επειδή ισχύει η (18), πρέπει

$$(1\text{-a})<-\frac{ab-4a+2b+3}{2(b-3)} \quad \Rightarrow \quad -ab+2a+4b-3>0 \tag{20}$$

Για να ικανοποιείται η (13) και η (2.γ)πρέπει το a/(b-3) να είναι μεγαλύτερο από τη μεγαλύτερη ρίζα του τριωνύμου και επειδή ισχύει η (19), πρέπει

$$\frac{a}{b-3}>-\frac{ab-4a+2b+3}{2(b-3)} \quad \Rightarrow \quad -ab+2a-2b-3>0 \tag{21}$$

Εάν επιλεγούν

$$a=8 \tag{22}$$

$$b=0.25 \tag{23}$$

το K πρέπει να είναι μεταξύ των ριζών του τριωνύμου, δηλαδή

$$-6.5<K<-3.13 \tag{24}$$

$$1-8=-7<K \tag{25}$$

$$K<0 \tag{26}$$

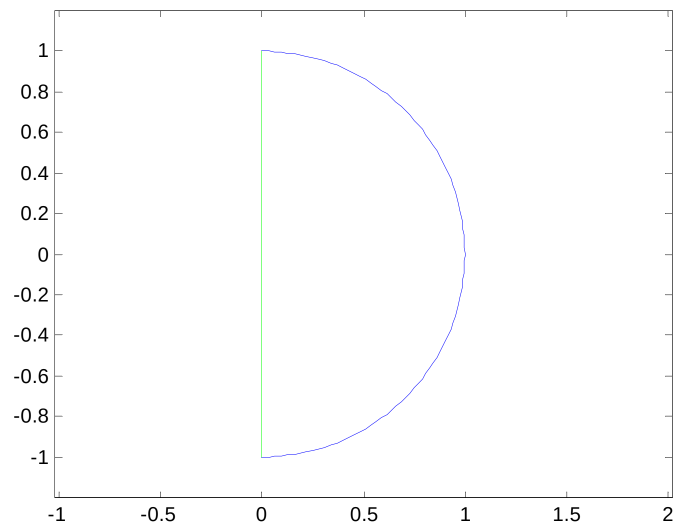
και το K πρέπει να είναι στο διάστημα (-6.5,-3.13)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να ευρεθεί η περιοχή στο διδιάστατο χώρο των συντελεστών α_1,α_2 του πολυωνύμου

$$\psi(z)=z^2+\alpha_1 z+\alpha_2$$

ώστε οι ρίζες του να ευρίσκονται στην ακόλουθη περιοχή του μιγαδικού επιπέδου



Λύση

Η επιθυμητή περιοχή είναι η τομή του δεξιού ημιεπιπέδου του μιγαδικού επιπέδου με το μοναδιαίο κύκλο.

Για την εύρεση της θέσης των ριζών του πολυωνύμου ως προς το μοναδιαίο κύκλο εφαρμόζεται το κριτήριο του Jury, το οποίο έχει τετριμμένη μορφή ως εξής

Γραμμή	z^0	z	z^2
1	α_2	α_1	1
2	1	α_1	α_2

Για να είναι οι ρίζες του πολυωνύμου εντός του μοναδιαίου κύκλου πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες.

$$\psi(1)=1+\alpha_1+\alpha_2>0$$

$$(-1)^2\psi(-1)=1-\alpha_1+\alpha_2>0$$

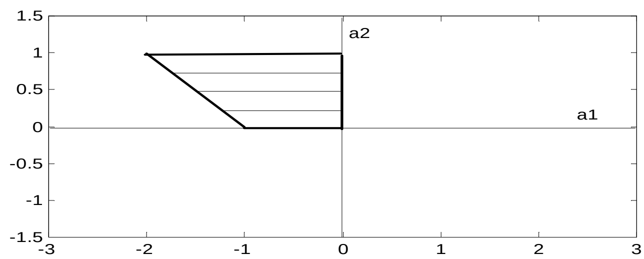
$$|\alpha_2|<1$$

Για την εύρεση της θέσης των ριζών του πολυωνύμου ως προς τον φανταστικό άξονα εφαρμόζεται το κριτήριο του Routh, το οποίο έχει τη μορφή

s^2	1	α_2
s	α_1	0
s^0	α_2	0

Για να είναι οι ρίζες του πολυωνύμου στο δεξιό ημιεπίπεδο πρέπει να συμβαίνουν δύο αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη της διάταξης και αυτό συνεπάγεται

$$\alpha_1<0$$
$$\alpha_2>0$$



Οι ανισότητες συναληθεύουν στη διαγραμμισμένη περιοχή του επιπέδου α_1,α_2 που φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ας θεωρηθεί το ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x}_1=-x_2+ax_1x_2^2$$
$$\dot{x}_2=x_1-bx_2x_1^2$$

όπου $a \neq b$

1. Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.
2. Να εξεταστεί η ευστάθεια της αρχής των συντεταγμένων με την έμμεση μέθοδο του Lyapunov.
3. Εάν ληφθεί

$$V(\underline{x})=x_1^2+x_2^2$$

να εξεταστεί η ευστάθεια της αρχής των συντεταγμένων με την άμεση μέθοδο του Lyapunov.

Λύση

1. Για την εύρεση των σημείων ισορροπίας πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις

$$0=-x_2+ax_1x_2^2 \qquad (1)$$

$$0=x_1-bx_2x_1^2 \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (1) επί x_1 , τη σχέση (2) επί x_2 και προσθέτοντας, λαμβάνεται

$$0=(a-b)x_2^2x_1^2 \qquad (3)$$

Από την σχέση (3) προκύπτει ότι ένα τουλάχιστον από τα x_1, x_2 είναι μηδενικό.
Εάν $x_1=0$, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι και $x_2=0$.
Εάν $x_2=0$, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι και $x_1=0$.
Συνεπώς το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι η αρχή των συντεταγμένων.

2. Γραμμικοποιώντας το μη γραμμικό σύστημα στην αρχή των συντεταγμένων, λαμβάνεται

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\right|_{x=x_0}=\left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x_1=x_2=0}=\left.\begin{bmatrix} ax_2^2 & -1+2ax_1x_2 \\ 1-2bx_1x_2 & -bx_1^2 \end{bmatrix}\right|_{x_1=x_2=0}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$\psi(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}=s^2+1 \qquad (5)$$

Καθώς οι ρίζες του $\psi(s)$ είναι επάνω στο φανταστικό άξονα, η ευστάθεια του μη γραμμικού συστήματος δεν μπορεί να συναχθεί από την ευστάθεια του γραμμικοποιημένου συστήματος.

3. Η $V(\underline{x})=x_1^2+x_2^2$ είναι θετικά ορισμένη για οποιαδήποτε περιοχή της αχής των συντεταγμένων. Καθώς

$$\frac{dV(\underline{x})}{dt}=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1\left(-x_2+ax_1x_2^2\right)+2x_2\left(x_1-bx_2x_1^2\right)=2(a-b)x_1^2x_2^2 \qquad (6)$$

Εάν b>a, η dV/dt είναι αρνητικά ημιορισμένη και συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές αλλά δεν μπορεί να συναχθεί η ασυμπτωτική του ευστάθεια.
Εάν b<a, η dV/dt είναι θετική στο πρώτο τεταρτημόριο, όπου η $V(\underline{x})=x_1^2+x_2^2$ είναι επίσης θετική και σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3 το σύστημα είναι ασταθές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ας θεωρηθεί το ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2+x_1(x_1^2+x_2^2)$$

$$\dot{x}_2=-x_1-x_2+x_2(x_1^2+x_2^2)$$

1. Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.
2. Να εξεταστεί η ευστάθεια της αρχής των συντεταγμένων με την έμμεση μέθοδο του Lyapunov.
3. Εάν ληφθεί

$$V(\underline{x})=x_1^2+x_2^2$$

να εξεταστεί η ευστάθεια της αρχής των συντεταγμένων με την άμεση μέθοδο του Lyapunov και να εκτιμηθεί το πεδίο έλξης του σημείου ισορροπίας.

Λύση

1. Για την εύρεση των σημείων ισορροπίας πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις

$$0=-x_1+x_2+x_1(x_1^2+x_2^2) \qquad (1)$$

$$0=-x_1-x_2+x_2(x_1^2+x_2^2) \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (1) επί x_2, τη σχέση (2) επί x_1 και αφαιρώντας, λαμβάνεται

$$0=x_2^2+x_1^2 \qquad (3)$$

Από την σχέση (3) προκύπτει ότι $x_1= x_2 =0$. Συνεπώς το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι η αρχή των συντεταγμένων.

2. Γραμμικοποιώντας το μη γραμμικό σύστημα στην αρχή των συντεταγμένων, λαμβάνεται

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\right|_{x=x_0}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1=x_2=0}=\begin{bmatrix} -1+3x_1^2+x_2^2 & 1+2x_1x_2 \\ -1+2x_1x_2 & -1+x_1^2+3x_2^2 \end{bmatrix}_{x_1=x_2=0}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$\psi(s)=\det(sI\text{-}A)=\det\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}=s^2+2s+2 \tag{5}$$

Καθώς οι ρίζες του ψ(s) είναι επάνω στο αριστερό ημιεπίπεδο, η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος μπορεί να συναχθεί από την ευστάθεια του γραμμικοποιημένου συστήματος.

3. Η ευστάθεια που προκύπτει από το γραμμικοποιημένο σύστημα δεν δίνει την πληροφορία της απόστασης της αρχικής συνθήκης από το σημείο ισορροπίας η οποία εξασφαλίζει ότι η τροχιά θα καταλήξει στο σημείο ισορροπίας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση της άμεσης μεθόδου Lyapunov.

Η $V(\underline{x})=x_1^2+x_2^2$ είναι θετικά ορισμένη για οποιαδήποτε περιοχή της αχής των συντεταγμένων. Καθώς

$$\begin{aligned}\frac{dV(\underline{x})}{dt}&=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1\left(-x_1+x_2+x_1^3+x_1x_2^2\right)+2x_2\left(-x_1-x_2+x_2^3+x_2x_1^2\right)=\\&=2\left[x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2-x_1^2-x_2^2\right]=2(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2-1)\end{aligned} \tag{6}$$

Η dV/dt είναι αρνητικά ορισμένη και συνεπώς το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν

$$x_1^2+x_2^2<1 \tag{7}$$

Συνεπώς το πεδίο έλξης θα περιέχει τον κύκλο με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων και ακτίνα ίση με τη μονάδα. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι διαφορετική συνάρτηση Lyapunov μπορεί να δώσει διαφορετική εκτίμηση του πεδίου έλξης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ας θεωρηθεί η κίνηση ενός διαστημικού οχήματος ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας του. Οι εξισώσεις του Euler είναι

$$\begin{aligned}J_x\dot{\omega}_x-(J_y-J_z)\omega_y\omega_z&=T_x\\J_y\dot{\omega}_y-(J_z-J_x)\omega_x\omega_z&=T_y\\J_z\dot{\omega}_z-(J_x-J_y)\omega_y\omega_x&=T_z\end{aligned}$$

όπου J_x, J_y, J_z είναι οι ροπές αδρανείας ως προς τους κύριους άξονες, ω_x, ω_y, ω_z είναι οι γωνιακές ταχύτητες ως προς τους κύριους άξονες και T_x, T_y, T_z είναι οι ροπές ελέγχου. Εάν για τη σταθεροποίηση του οχήματος ληφθούν

$$\begin{aligned}T_x&=K_1J_x\omega_x\\T_y&=K_2J_y\omega_y\\T_z&=K_3J_z\omega_z\end{aligned}$$

1. Να γραφούν οι εξισώσεις του συστήματος που προκύπτει και να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας του.

2. Να εξεταστεί η ευστάθεια της αρχής των συντεταγμένων με την έμμεση μέθοδο του Lyapunov.
3. Εάν ληφθεί

$$V=\frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2\right)$$

να εξεταστεί η ευστάθεια της αρχής των συντεταγμένων με την άμεση μέθοδο του Lyapunov και να εκτιμηθεί το πεδίο έλξης του σημείου ισορροπίας.

Λύση

1. Θεωρώντας σαν καταστάσεις του συστήματος τα ω_x, ω_y, ω_z και αντικαθιστώντας τις ροπές ελέγχου λαμβάνονται οι εξισώσεις του αντισταθμισμένου συστήματος ως εξής

$$\dot{\omega}_x=\frac{J_y-J_z}{J_x}\omega_y\omega_z+K_1\omega_x \qquad (1)$$

$$\dot{\omega}_y=\frac{J_z-J_x}{J_y}\omega_x\omega_z+K_2\omega_y \qquad (2)$$

$$\dot{\omega}_z=\frac{J_x-J_y}{J_z}\omega_y\omega_x+K_3\omega_z \qquad (3)$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η εφαρμογή διεγέρσεων που εξαρτώνται μόνο από τις καταστάσεις καθιστά το αντισταθμισμένο σύστημα αυτόνομο

Για την εύρεση των σημείων ισορροπίας πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις

$$0=\frac{J_y-J_z}{J_x}\omega_y\omega_z+K_1\omega_x \qquad (4)$$

$$0=\frac{J_z-J_x}{J_y}\omega_x\omega_z+K_2\omega_y \qquad (5)$$

$$0=\frac{J_x-J_y}{J_z}\omega_y\omega_x+K_3\omega_z \qquad (6)$$

Εάν ένα από τα ω_x, ω_y, ω_z είναι μηδενικό, από τις σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι και τα υπόλοιπα είναι μηδενικά και συνεπώς η αρχή των συντεταγμένων είναι σημείο ισορροπίας.
Θέτοντας

$$\lambda=\omega_x\omega_y\omega_z \neq 0 \qquad (7)$$

από τις σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτουν

$$\omega_x^2=-\frac{J_y-J_z}{J_x}\frac{\lambda}{K_1} \qquad (8)$$

$$\omega_y^2=-\frac{J_z-J_x}{J_y}\frac{\lambda}{K_2} \qquad (9)$$

$$\omega_z^2=-\frac{J_x\text{-}J_y}{J_z}\frac{\lambda}{K_3} \tag{10}$$

$$\lambda=-\frac{K_1}{J_y\text{-}J_z}\frac{K_2}{J_z\text{-}J_y}\frac{K_3}{J_x\text{-}J_y}J_xJ_yJ_z \tag{11}$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι για την ύπαρξη σημείων ισορροπίας εκτός της αρχής πρέπει να υπάρχει κατάλληλη επιλογή των προσήμων των παραμέτρων K_i. Εάν είναι ομόσημα είναι σαφές ότι τουλάχιστον μία από τις σχέσεις (8), (9) ή (10) είναι αδύνατη και συνεπώς το σημείο ισορροπίας στην αρχή είναι μοναδικό.

2. Γραμμικοποιώντας το μη γραμμικό σύστημα στην αρχή των συντεταγμένων, λαμβάνεται

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\omega_x} & \frac{\partial f_1}{\partial\omega_y} & \frac{\partial f_1}{\partial\omega_z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\omega_x} & \frac{\partial f_2}{\partial\omega_y} & \frac{\partial f_2}{\partial\omega_z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial\omega_x} & \frac{\partial f_3}{\partial\omega_y} & \frac{\partial f_3}{\partial\omega_z} \end{bmatrix}_{\omega_x=\omega_y=\omega_z=0} \qquad \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$\psi(s)=\det(sI\text{-}A)=(s\text{-}K_1)(s\text{-}K_2)(s\text{-}K_3) \tag{13}$$

Εάν τα K_1, K_2, K_3 είναι αρνητικά, οι ρίζες του $\psi(s)$ είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο και η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος μπορεί να συναχθεί από την ευστάθεια του γραμμικοποιημένου συστήματος.

3. Η

$$V=\frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2\right) \tag{14}$$

είναι θετικά ορισμένη για οποιαδήποτε περιοχή της αχής των συντεταγμένων. Καθώς

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}&=J_x\omega_x\dot{\omega}_x+J_y\omega_y\dot{\omega}_y+J_z\omega_z\dot{\omega}_z= \\ &=J_x\omega_x\left[\frac{J_y\text{-}J_z}{J_x}\omega_y\omega_z+K_1\omega_x\right]+J_y\omega_y\left[\frac{J_z\text{-}J_x}{J_y}\omega_z\omega_x+K_2\omega_y\right]+J_z\omega_z\left[\frac{J_x\text{-}J_y}{J_z}\omega_x\omega_y+K_3\omega_z\right] \\ &=K_1J_x\omega_x^2+K_2J_y\omega_y^2+K_3J_z\omega_z^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Η dV/dt είναι αρνητικά ορισμένη εάν τα K_1, K_2, K_3 είναι αρνητικά και συνεπώς για την εκλογή αυτή των κερδών η αρχή των συντεταγμένων είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Εάν τα K_1, K_2, K_3 είναι όλα αρνητικά, το μοναδικό σημείο ισορροπίας θα ειναι η αρχή των συντεταγμένων. Καθώς η V τείνει στο άπειρο καθώς το μέτρο του διανύσματος καταστάσεων τείνει στο άπειρο, το σημείο ισορροπίας στην αρχή των συντεταγμένων θα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ας θεωρηθεί το ακόλουθο σύστημα μιάς εισόδου

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x})+g(\underline{x})u \tag{1}$$

όπου $f(\underline{x})$, $g(\underline{x})$ μη γραμμικές συναρτήσεις του διανύσματος $\underline{x}$. Ζητείται να προσδιοριστεί η διέγερση u, ώστε η αρχή των συντεταγμένων να είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Για το σκοπό αυτό λαμβάνεται

$$V(\underline{x})=\frac{1}{2}\left[a^T\underline{x}\right]^2 \tag{2}$$

Για την ευστάθεια είναι επιθυμητό

$$\frac{dV(\underline{x})}{dt}=\left[a^T\underline{x}\right]\frac{d(a^T\underline{x})}{dt}<0 \tag{3}$$

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εάν ληφθεί

$$\frac{dV(\underline{x})}{dt}=-\eta^2\left|a^T\underline{x}\right| \tag{4}$$

το οποίο συνεπάγεται

$$\frac{d(a^T\underline{x})}{dt}=-\eta^2\text{sign}(a^T\underline{x}) \tag{5}$$

όπου

$$\text{sign}(a^T\underline{x})=\begin{cases}1 & \text{εάν} \quad a^T\underline{x}>0\\ 0 & \text{εάν} \quad a^T\underline{x}=0\\ -1 & \text{εάν} \quad a^T\underline{x}<0\end{cases} \tag{6}$$

Από την σχέση (5) σε συνδυασμό με τη σχέση (1) λαμβάνεται

$$\frac{d(a^T\underline{x})}{dt}=a^T\dot{\underline{x}}=a^T\left[f(\underline{x})+g(\underline{x})u\right]=-\eta^2\text{sign}(a^T\underline{x}) \tag{7}$$

Επιλύοντας ως προς u λαμβάνεται

$$u=-\left[a^Tg(\underline{x})\right]^{-1}a^Tf(\underline{x})-\left[a^Tg(\underline{x})\right]^{-1}\eta^2\text{sign}(a^T\underline{x}) \tag{8}$$

Από τη σχέση (8) προκύπτει ότι ο νόμος ελέγχου αποτελείται από δύο όρους, μία μη γραμμική ανατροφοδότηση κατάστασης και ένα διακοπτικό νόμο ελέγχου. Ο όρος η2 είναι αυθαίρετη θετική ποσότητα η οποία επιλέγεται ώστε η dV/dt να είναι αρνητικά ορισμένη ακόμη και όταν υπάρχουν σφάλματα στο μοντέλο του συστήματος ή διαταραχές.

Ο ανωτέρω νόμος ελέγχου εξασφαλίζει την ευστάθεια του $\left[a^T\underline{x}\right]=0$. Το a πρέπει να επιλεγεί κατάλληλα ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του $\underline{x}$=0.

Εάν $\left[a^T \underline{x}\right]=0$, θα είναι

$$u=-\left[a^T g(\underline{x})\right]^{-1} a^T f(\underline{x}) \quad (9)$$

και το αντισταθμισμένο σύστημα γίνεται

$$\dot{\underline{x}}=f(\underline{x})-g(\underline{x})\left[a^T g(\underline{x})\right]^{-1} a^T f(\underline{x}) \quad (10)$$

Εάν γραμμικοποιηθεί το σύστημα της σχέσεως (1), θα είναι

$$\dot{\underline{x}}=A\underline{x}+bu \quad (11)$$

όπου

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} \quad b=g(0) \quad (12)$$

Εάν $\left[a^T \underline{x}\right]=0$, θα είναι

$$\dot{\underline{x}}=A\underline{x}-b\left[a^T b\right]^{-1} a^T A\underline{x}=\left[A-b\left[a^T b\right]^{-1} a^T A\right]\underline{x}=\left[A-bk\right]\underline{x} \quad (13)$$

Καθώς

$$a^T\left[A-bk\right]=a^T\left[A-b\left[a^T b\right]^{-1} a^T A\right]=a^T A-a^T A=0 \quad (14)$$

το a θα είναι το ιδιοδιάνυσμα της $(A\text{-}bk)^T$ το οποίο αντιστοιχεί στη μηδενική ιδιοτιμή. Η διαδικασία συνεπώς για την αντιστάθμιση του συστήματος θα είναι

1. Προσδιορισμός του k ώστε η A-bk να έχει μία μηδενική ιδιοτιμή και όλες οι άλλες να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο.
2. Υπολογισμός του ιδιοδιανύσματος a ώστε

$$\left[A-bk\right]^T a=0 \quad (15)$$

3. Εφαρμόζεται για το μη γραμμικό σύστημα ο νόμος ελέγχου

$$u=-\left[a^T g(\underline{x})\right]^{-1} a^T f(\underline{x})-\left[a^T g(\underline{x})\right]^{-1} \eta^2 \mathrm{sign}(a^T \underline{x}) \quad (16)$$

   ενώ εάν το σύστημα είναι γραμμικό εφαρμόζεται ο νόμος ελέγχου

$$u=-\left[a^T b\right]^{-1} a^T A\underline{x}-\left[a^T b\right]^{-1} \eta^2 \mathrm{sign}(a^T \underline{x}) \quad (17)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ας θεωρηθούν οι πληθυσμοί N_1, N_2 δύο ειδών εκ των οποίων ο δεύτερος τρέφεται με μέλη του πρώτου. Ο ρυθμός αύξησης του πρώτου πληθυσμού, δηλαδή αριθμός γεννήσεων μείον αριθμός θανάτων, εάν δεν υπάρχουν μέλη του πληθυσμού N_2 και οι φυσικοί πόροι είναι απεριόριστοι θα είναι ανάλογος του πληθυσμού N_1. Καθώς η πιθανότητα συνάντησης ενός μέλους του πληθυσμού N_1 με ένα μέλος του πληθυσμού N_2, η οποία οδηγεί στο θάνατο του μέλους του πληθυσμού N_1,είναι ανάλογη του γινομένου των πληθυσμών, μπορεί να γραφεί

$$\frac{dN_1}{dt}=a_1N_1-c_1N_1N_2$$

Αντίστοιχα για τον πληθυσμό N_2, καθώς ο αριθμός θανάτων από πείνα μειώνεται ανάλογα με την πιθανότητα συνάντησης ενός μέλους του πληθυσμού N_1 με ένα μέλος του πληθυσμού N_2, μπορεί να γραφεί

$$\frac{dN_2}{dt}=a_2N_2+c_2N_1N_2$$

Στις ανωτέρω εξισώσεις οι παράμετροι c_1,c_2 είναι θετικές.

Αξίζει να τονιστεί ότι οι εξισώσεις έχουν φυσικό νόημα μόνο για N_1, N_2 ακεραίους και $N_1\geq 0$, $N_2\geq 0$.

Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας με την .έμμεση μέθοδο Lyapunov.

Λύση

Το ανωτέρω σύστημα εξισώσεων έχει δύο σημεία ισορροπίας ως εξής.

Πρώτο σημείο ισορροπίας

$$(N_{10},N_{20})=(0,0) \tag{1}$$

Δεύτερο σημείο ισορροπίας

$$(N_{10},N_{20})=\left(\frac{-a_2}{c_2},\frac{a_1}{c_1}\right) \tag{2}$$

Γραμμικοποίηση συστήματος στην περιοχή του πρώτου σημείου ισορροπίας δίνει

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}N_1\\N_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & 0\\0 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1\\N_2\end{bmatrix} \tag{3}$$

Το σημείο ισορροπίας (0,0) θα είναι

- ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και οι δύο παράμετροι a_1,a_2 είναι αρνητικές.
- ασταθές εάν μία τουλάχιστον από τις παραμέτρους a_1,a_2 είναι θετική.
- Αδυναμία συναγωγής συμπεράσματος εάν μία από τις παραμέτρους a_1,a_2 είναι μηδενική.

Το δεύτερο σημείο ισορροπίας έχει φυσικό νόημα εάν το a_2 είναι αρνητικό ενώ το a_1 θετικό.

Γραμμικοποίηση συστήματος στην περιοχή του δεύτερου σημείου ισορροπίας δίνει

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{N}_1\\\hat{N}_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial N_2}\\[2mm]\dfrac{\partial f_2}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial N_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{N}_1\\\hat{N}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1-c_1N_2 & -c_1N_1\\c_2N_2 & a_2+c_2N_1\end{bmatrix}_{(N_1,N_2)=\left(\frac{-a_2}{c_2},\frac{a_1}{c_1}\right)}\begin{bmatrix}\hat{N}_1\\\hat{N}_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{-c_1}{c_2}a_2\\[2mm]\dfrac{c_2}{c_1}a_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{N}_1\\\hat{N}_2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4}$$

όπου

$$\hat{N}_1 = N_1 + \frac{a_2}{c_2}, \quad \hat{N}_2 = N_2 - \frac{a_1}{c_1} \tag{5}$$

Οι ιδιοτιμές της μήτρας A της περιγραφής είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\psi(s)=\det(sI\text{-}A)=\det\begin{bmatrix} s & \frac{c_1}{c_2}a_2 \\ -\frac{c_2}{c_1}a_1 & s \end{bmatrix} = s^2+a_1a_2 \tag{6}$$

Καθώς τα a_1,a_2 είναι ετερόσημα, το σημείο ισορροπίας θα είναι ασταθές.

Αξίζει να τονιστεί ότι στα μη γραμμικά συστήματα, όταν δεν υπάρχει διέγερση, υπάρχει η δυνατότητα περιοδικών συναρτήσεων σαν λύσεων. Το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος έχει αυτή τη δυνατότητα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένα ασύρματο δίκτυο αποτελείται από N ζεύγη θέσεων εκπομπής-λήψης. Ο νιοστός πομπός εκπέμπει ισχύ $p_\nu(t)$. Το κέρδος της σύζευξης από τον νιοστό πομπό στον ιοστό δέκτη είναι $G_{\iota\nu}\geq 0$. Η ισχύς που λαμβάνεται από τον ιοστό δέκτη εξαιτίας της εκπομπής του ιοστού πομπού είναι

$$s_\iota=G_{\iota\iota}p_\iota$$

Η ισχύς του θορύβου ο οποίος εμφανίζεται στον ιοστό δέκτη εξαρτάται από την ισχύ του θορύβου σ_ι του δέκτη καθώς και από τις ισχείς των σημάτων παρεμβολής των άλλων πομπών και μπορεί να γραφεί

$$n_\iota=\sigma_\iota+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\iota}}^{N} G_{\iota\nu}p_\nu$$

Τις χρονικές στιγμές t=kT οι πομποί αναπροσαρμόζουν την ισχύ εκπομπής τους. Αν σαν κατάσταση του συστήματος θεωρηθεί το διάνυσμα

$$\underline{x}(kT)=\begin{bmatrix} p_1(kT) & p_2(kT) & \cdots & p_N(kT)\end{bmatrix}^T$$

και σαν έξοδος το διάνυσμα

$$\underline{y}=\begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_N\end{bmatrix}^T$$

α) Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος διακριτού χρόνου, αν οι ισχείς του θορύβου των δεκτών ταυτίζονται (σ_ι=σ).

β) Εάν σαν νόμος ελέγχου θεωρηθεί

$$\underline{u}=a\mathrm{Diag}(G^{-1}_{\nu\nu})\underline{y}-\underline{x}$$

όπου a πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας και οι ισχείς του θορύβου των δεκτών ταυτίζονται (σ_ι=σ), να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του αντισταθμισμένου συστήματος.

γ) Να ευρεθεί το

$$\lim_{k\to\infty}\underline{x}(kT)$$

και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτό υπάρχει.

Λύση

α) Για την ισχύ του νιοστού πομπού θα ισχύει

$$p_\nu[(k+1)T]=p_\nu(kT)+u_\nu(kT) \qquad \nu=1,2,...,N \tag{1}$$

όπου $u_\nu(kT)$ είναι η είσοδος του πομπού. Το διάνυσμα των εισόδων έχει N συνιστώσες. Σε διανυσματική μορφή θα είναι

$$\underline{x}[(k+1)T]=I_N\underline{x}(kT)+I_N\underline{u}(kT) \tag{2}$$

Για τη νιοστή συνιστώσα του διανύσματος των εξόδων θα είναι

$$y_\nu(kT)=n_\nu(kT)=\sigma+\sum_{\substack{\iota=1\\ \iota\neq\nu}}^{N}G_{\nu\iota}p_\iota(kT) \tag{3}$$

Σε μητρική μορφή θα ισχύει

$$\underline{y}(kT)=[G\text{-}Diag(G_{\nu\nu})]\underline{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\sigma \tag{4}$$

β) Εάν εφαρμοστεί ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου, οι εξισώσεις καταστάσεως του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\underline{x}[(k+1)T]=I_N\underline{x}(kT)+I_N\left[aDiag(G^{-1}_{\nu\nu})\underline{y}\text{-}\underline{x}\right]=aDiag(G^{-1}_{\nu\nu})\left[[G\text{-}Diag(G_{\nu\nu})]\underline{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\sigma\right] \tag{5α}$$

$$\underline{y}(kT)=[G\text{-}Diag(G_{\nu\nu})]\underline{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\sigma \tag{5β}$$

γ) Η μήτρα A του αντισταθμισμένου συστήματος είναι

$$A_d=aDiag(G^{-1}_{\nu\nu})[G\text{-}Diag(G_{\nu\nu})]=a\begin{bmatrix}0 & \frac{G_{12}}{G_{11}} & \cdots & \frac{G_{1n}}{G_{11}}\\ \frac{G_{21}}{G_{22}} & 0 & \cdots & \frac{G_{2n}}{G_{22}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{G_{n1}}{G_{nn}} & \frac{G_{n2}}{G_{nn}} & \cdots & 0\end{bmatrix}=a\tilde{G} \tag{6}$$

Εάν λ_ι είναι η ιοστή ιδιοτιμή της μήτρας $\tilde{G}$ και

$$\lambda_{max} = \underset{\iota=1,2,...,n}{Max} |\lambda_\iota| \quad (7)$$

το αντισταθμισμένο σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν

$$a < \frac{1}{\lambda_{max}} \quad (8)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένα απλό μοντέλο του ελέγχου της συμφόρησης (congestion control) μεταξύ N υπολογιστών οι οποίοι συνδέονται με ένα δρομολογητή δίδεται από το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων.

$$\dot{x}_i = -b\frac{x_i^2}{2} + (b_{max} - b) \quad i=1,2,...,N \quad (1)$$

$$\dot{b} = -c + \sum_{i=1}^{N} x_i \quad (2)$$

όπου x_i είναι ο ρυθμός μετάδοσης του i-οστού υπολογιστή, b είναι το στιγμιαίο μέγεθος του απομονωτή του δρομολογητή, b_{max} είναι το μέγιστο μέγεθος του απομονωτή και $c>0$ είναι η χωρητικότητα της σύνδεσης μεταξύ του δρομολογητή και των υπολογιστών. Καθεμία από τις πρώτες εξισώσεις περιγράφει το νόμο σύμφωνα με τον οποίο ο αντίστοιχος υπολογιστής καθορίζει το ρυθμό με τον οποίο στέλνει δεδομένα στο δίκτυο. Η τελευταία εξίσωση περιγράφει το ρυθμό με τον οποίο γεμίζει ο απομονωτής του δρομολογητή.

1. Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας του αντισταθμισμένου συστήματος.
2. Να εξεταστεί η ευστάθεια των σημείων του ερωτήματος (1).

Λύση

1. Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τις λύσεις των εξισώσεων

$$0 = -b\frac{x_i^2}{2} + (b_{max} - b) \quad i=1,2,...,N \quad (3)$$

$$0 = -c + \sum_{i=1}^{N} x_i \quad (4)$$

Αφαιρώντας κατα μέλη δύο από τις N πρώτες εξισώσεις και δεδομένου ότι οι ρυθμοί μετάδοσης οφείλουν να μην είναι αρνητικοί αριθμοί, λαμβάνεται

$$0 = b(x_i^2 - x_j^2) = b(x_i + x_j)(x_i - x_j) \quad (5)$$

από την οποία προκύπτουν

$$b = 0 \quad (6)$$

ή

$$x_i = x_j \quad (7)$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = c \tag{8}$$

Αξίζει να τονιστεί ότι στην περιοχή του μηδενός για τη μεταβλητή b το μοντέλο δεν περιγράφει ουσιαστικά το σύστημα. Για ρυθμούς μετάδοσης που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{i=1}^{N} x_i < c \tag{9}$$

η παράγωγος του b λαμβάνει αρνητικές τιμές, το οποίο συνεπάγεται αρνητικές τιμές του b τις επόμενες χρονικές στιγμές, αδύνατο από τη φύση του προβλήματος, όπου το b δεν μπορεί να γίνει αρνητικό. Για το πραγματικό σύστημα το σύνολο των σημείων b=0 και $\sum_{i=1}^{N} x_i < c$ είναι σημεία ισορροπίας.

Από τις εξισώσεις (7) και (8) προκύπτει το σημείο ισορροπίας

$$x_{i0} = \frac{c}{N} \tag{10}$$

$$b_0 = \frac{b_{max}}{1+\frac{c^2}{2N^2}} \tag{11}$$

2. Γραμμικοποιώντας στην περιοχή του σημείου ισορροπίας (x_{10}, x_{20},…,x_{N0},b_0), για τη μήτρα Α λαμβάνεται

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} -bx_i \Big|_{x_{i0},b_0} = -\frac{b_{max}\frac{c}{N}}{1+\frac{c^2}{2N^2}} = -\rho \quad \text{για} \quad i=j=1,2,...,N \\ 0 \qquad \text{για} \quad i=1,2,...,N,\ j=1,2,...,N \text{ και } i \neq j \end{cases} \tag{12α}$$

$$A_{i,N+1} = \frac{\partial f_i}{\partial b} = \left(-1-\frac{x_i^2}{2}\right)\Bigg|_{x_{i0},b_0} = -\left(1+\frac{c^2}{2N^2}\right) = -\mu \tag{12β}$$

$$A_{N+1,j} = \frac{\partial f_{N+1}}{\partial x_j} = 1 \quad \text{για } j=1,2,...,N \tag{12γ}$$

$$A_{N+1,N+1} = \frac{\partial f_{N+1}}{\partial b} = 0 \tag{12δ}$$

Οι ιδιοτιμές της μήτρας Α είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\psi(s)=\det[sI-A]=\begin{vmatrix} s+\rho & 0 & \cdots & 0 & \mu \\ 0 & s+\rho & \cdots & 0 & \mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s+\rho & \mu \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & s \end{vmatrix} = (s+\rho)^N \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \mu/(s+\rho) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \mu/(s+\rho) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mu/(s+\rho) \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & s \end{vmatrix}$$

$$= (s+\rho)^N \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \mu/(s+\rho) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \mu/(s+\rho) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mu/(s+\rho) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s+\dfrac{N\mu}{s+\rho} \end{vmatrix} = (s+\rho)^{N-1}\left(s^2+\rho s+N\mu\right) \qquad (13)$$

Επειδή ρ,μ είναι θετικά, οι ρίζες του τριωνύμου $s^2+\rho s+N\mu$ θα είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο. Το ψ(s) έχει επίσης ως ρίζα την $-\rho$, η οποία βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο, με πολλαπλότητα N-1. Άρα όλες οι ιδιοτιμές της A είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο και το σημείο ισορροπίας θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίδεται το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t) \quad \underline{x}(0) \neq \underline{0}$$

1. Εάν

   $$A^T P + PA = -Q$$

   να δειχθεί ότι

   $$\frac{d}{dt}\left(\underline{x}^T P \underline{x}\right) = -\underline{x}^T Q \underline{x}$$

   και

   $$-\int_0^t \underline{x}^T(\tau)Q\underline{x}(\tau)d\tau=\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t)-\underline{x}^T(0)P\underline{x}(0)$$

2. Να εξεταστεί το όριο της τελευταίας σχέσεως όταν το t τείνει στο άπειρο και η μήτρα A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
3. Παραγωγίζοντας το $t\underline{x}^T P\underline{x}$ ως προς t να δειχθεί ότι

   $$-\int_0^\infty \tau\underline{x}^T(\tau)Q\underline{x}(\tau)d\tau = -\underline{x}^T(0)P_1\underline{x}(0)$$

   όπου P_1 είναι λύση της εξισώσεως Lyapunov

   $$A^T P_1 + P_1 A = -P$$

4. Να δειχθεί ότι εάν η μήτρα A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, η P μπορεί να γραφεί

   $$P = \int_0^\infty e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}d\tau$$

Λύση

1. Θα είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{x}^T P\underline{x}\right)=\dot{\underline{x}}^T P\underline{x}+\underline{x}^T P\dot{\underline{x}}=\underline{x}^T A^T P\underline{x}+\underline{x}^T PA\underline{x}=\underline{x}^T\left(A^T P+PA\right)\underline{x}=-\underline{x}^T Q\underline{x} \quad (1)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση λαμβάνεται

$$-\int_0^t \underline{x}^T(\tau)Q\underline{x}(\tau)d\tau=\underline{x}^T(\tau)P\underline{x}(\tau)\Big|_0^t=\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t)-\underline{x}^T(0)P\underline{x}(0) \quad (2)$$

2. Εάν η μήτρα A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\underline{x}(t)\right)=\underline{0} \quad (3)$$

Επειδή η σχέση (2) ισχύει για κάθε t, θα είναι

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(-\int_0^t \underline{x}^T(\tau)Q\underline{x}(\tau)d\tau\right)&=-\int_0^\infty \underline{x}^T(\tau)Q\underline{x}(\tau)d\tau=\\&=\lim_{t\to\infty}\left(\underline{x}^T(t)P\underline{x}(t)-\underline{x}^T(0)P\underline{x}(0)\right)-\underline{x}^T(0)P\underline{x}(0)\end{aligned} \quad (4)$$

3. Παραγωγίζοντας το $t\underline{x}^T P\underline{x}$ λαμβάνεται

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(t\underline{x}^T P\underline{x}\right)&=\underline{x}^T P\underline{x}+t\dot{\underline{x}}^T P\underline{x}+t\underline{x}^T P\dot{\underline{x}}=\underline{x}^T P\underline{x}+t\underline{x}^T A^T P\underline{x}+t\underline{x}^T PA\underline{x}=\\&=\underline{x}^T P\underline{x}+t\underline{x}^T\left(A^T P+PA\right)\underline{x}=\underline{x}^T P\underline{x}-t\underline{x}^T Q\underline{x}\end{aligned} \quad (5)$$

Ολοκληρώνοντας την (5) μεταξύ των ορίων 0 και ∞ λαμβάνεται

$$t\underline{x}^T P\underline{x}\Big|_0^\infty=0=\int_0^\infty \underline{x}^T(\tau)P\underline{x}(\tau)d\tau-\int_0^\infty t\underline{x}^T(t)Q\underline{x}(t)dt \quad (6)$$

Επομένως

$$-\int_0^\infty t\underline{x}^T(t)Q\underline{x}(t)dt=-\int_0^\infty \underline{x}^T(\tau)P\underline{x}(\tau)d\tau \quad (7)$$

Εάν P_1 είναι λύση της

$$A^T P_1+P_1 A=-P \quad (8)$$

λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4), θα ισχύει

$$-\int_0^\infty t\underline{x}^T(t)Q\underline{x}(t)dt=-\int_0^\infty \underline{x}^T(\tau)P\underline{x}(\tau)d\tau=-\underline{x}^T(0)P_1\underline{x}(0) \quad (9)$$

4. Εάν γραφεί

$$P=\int_0^\infty e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}d\tau \quad (10)$$

θα είναι

$$A^TP+PA = A^T\int_0^\infty e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}d\tau + \left[\int_0^\infty e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}d\tau\right]A=$$

$$\int_0^\infty\left[A^Te^{A^T\tau}Qe^{A\tau}+e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}A\right]d\tau = \int_0^\infty\left[\frac{d\left(e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\right)}{d\tau}\right]d\tau = e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\Big|_0^\infty \quad (11)$$

Εάν η A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, θα είναι

$$\lim_{t\to\infty}\left\{e^{At}\right\}=0 \quad (12)$$

και από τη σχέση (11) λαμβάνεται

$$A^TP+PA = e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\Big|_0^\infty = -Q \quad (13)$$

δηλαδή η P είναι η λύση της εξίσωσης Lyapunov.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η μήτρα

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma_{n-2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sigma_{n-1} & -\sigma_n \end{bmatrix}$$

καλείται ότι είναι σε μορφή Schwarz.

1. Να δειχθεί ότι εκλέγοντας

   $$Q=\mathrm{Diag}[0, 0, 0, ..., 0, 1]$$

   η λύση της εξίσωσης Lyapunov είναι διαγώνια μήτρα.
2. Να εκφραστούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι η A ευσταθής.

Λύση

1. Εάν λ_i, i=1,2,…,n είναι οι ιδιοτιμές της μήτρας A, η εξίσωση Lyapunov έχει μοναδική λύση εάν για κάθε ζεύγος i,j ισχύει

$$\lambda_i+\lambda_j \neq 0 \quad (1)$$

Η σχέση (1) ισχύει εάν η μήτρα A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
Έστω

$$P=\mathrm{Diag}[p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1}, p_n] \quad (2)$$

Θα είναι

$$A^TP+PA=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1p_1+p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\sigma_1p_1+p_2 & 0 & -\sigma_2p_2+p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2p_2+p_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma_{n-2}p_{n-2}+p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sigma_{n-1}p_{n-1}+p_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma_{n-1}p_{n-1}+p_n & -2\sigma_np_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Εάν ληφθούν

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2\sigma_n} \\ p_k &= \frac{p_{k+1}}{\sigma_k} \quad k=n-1,n-2,...,1 \end{aligned} \quad (4)$$

θα είναι

$$A^TP+PA=-Q \quad (5)$$

δηλαδή η διαγώνιος P είναι λύση της εξίσωσης Lyapunov. Εάν ισχύει η (1) θα είναι και η μοναδική λύση.

2. Για να είναι η συνάρτηση $V(\underline{x})=\underline{x}^TP\underline{x}$ θετικά ορισμένη πρέπει και αρκεί

$$p_i>0 \quad i=1,2,\ldots,n \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (4) και (6) προκύπτει ότι για να είναι η $V(\underline{x})$ θετικά ορισμένη πρέπει και αρκεί

$$\sigma_i>0 \quad i=1,2,\ldots,n \quad (6)$$

Θα είναι

$$\dot{V}(\underline{x})=-\underline{x}^TQ\underline{x}=-x_n^2 \quad (7)$$

δηλαδή θετικά ημιορισμένη και από το θεώρημα του Lyapunov προκύπτει η ευστάθεια της μήτρας A. Η ασυμπτωτική ευστάθεια προκύπτει με τη χρήση του θεωρήματος του LaSalle.