ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

Τρύφων Κουσιουρής

Ακ. Έτος 2006-2007

5. ΠΟΙΟΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

5.1 Εισαγωγή

Οι έννοιες της ελεγξιμότητας και της παρατηρησιμότητας της περιγραφής, που θα εισαχθούν στο κεφάλαιο αυτό, έχουν ιδιαίτερη σημασία τόσο στον Αυτόματο Έλεγχο όσο και στη θεωρία των συστημάτων. Στην θεωρία του αυτομάτου ελέγχου σχετίζονται με τη σχεδίαση του ελεγκτή ο οποίος επιλύει το πρόβλημα της ρύθμισης μέσω της τοποθέτησης των πόλων του αντισταθμισμένου συστήματος σε επιθυμητές θέσεις ή της ελαχιστοποίησης ενός τετραγωνικού δείκτη επιδόσεως. Στη θεωρία των συστημάτων ο ρόλος τους είναι σημαντικός για την επιλογή των μεταβλητών που συνιστούν το διάνυσμα καταστάσεως. Αν και οι έννοιες αυτές αφορούν την γενική περιγραφή ενός συστήματος, η παρουσίαση θα περιοριστεί στα γραμμικά και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα τα οποία περιγράφονται στη μορφή των εξισώσεων καταστάσεως.

5.2 Ελεγξιμότητα

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου μπορεί να περιγραφεί στη μορφή των εξισώσεων καταστάσεως

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t)+B\underline{u}(t) \qquad (5.1\alpha)$$

$$\underline{y}(t)=C\underline{x}(t)+D\underline{u}(t) \qquad (5.1\beta)$$

ενώ η περιγραφή ενός συστήματος διακριτού χρόνου στη μορφή των εξισώσεων καταστάσεως θα είναι

$$\underline{x}[(k+1)T] = A\underline{x}(kT)+B\underline{u}(kT) \qquad (5.2\alpha)$$

$$\underline{y}(kT)=C\underline{x}(kT)+D\underline{u}(kT) \qquad (5.2\beta)$$

Ορισμός 5.1 Η περιγραφή του συστήματος καλείται ελέγξιμη εάν για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\underline{x}_0$, $\underline{x}_f$ του χώρου καταστάσεων υπάρχει πεπερασμένο χρονικό διάστημα T_f και είσοδος $\underline{u}(t)$, $0 \leq t \leq T_f$ η οποία μεταφέρει την κατάσταση του συστήματος από την $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ στην $\underline{x}(T_f)=\underline{x}_f$.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό εάν το σύστημα είναι διακριτού χρόνου η είσοδος θα είναι ακολουθία με πεπερασμένο αριθμό βημάτων και το διάστημα T_f θα είναι πολλαπλάσιο της περιόδου T. Επίσης είναι σαφές ότι δεν ενδιαφέρει η τροχιά του διανύσματος καταστάσεων αλλά μόνον τα δύο οριακά σημεία ενώ δεν υπάρχει περιορισμός στο μέγεθος της εισόδου.

Τα σημεία στα οποία υπάρχει επιθυμία να οδηγηθεί το σύστημα είναι τα σημεία ισορροπίας, καθώς σε αυτά το σύστημα μπορεί να παραμείνει, επιλύοντας το πρόβλημα της ρύθμισης, της διατήρησης δηλαδή της εξόδου σε μία σταθερή επιθυμητή τιμή. Το σύνολο των σημείων ισορροπίας x_e τα οποία επιτυγχάνονται με σταθερές διεγέρσεις δίδεται από τη σχέση

$$S=\{\underline{x}_e : A\underline{x}_e + B\underline{u}_e = \underline{0}\} \tag{5.3}$$

ανήκουν δηλαδή σε ένα γραμμικό υπόχωρο του χώρου καταστάσεως. Εάν η μήτρα A είναι ομαλή, αυτός ο υπόχωρος ορίζεται από της στήλες της μήτρας $A^{-1}B$.

5.2.1 Ελεγξιμότητα περιγραφής συστήματος διακριτού χρόνου

Η χρονική απόκριση του συστήματος διακριτού χρόνου δίδεται από τη σχέση

$$\underline{x}(kT)=A^k\underline{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}B\underline{u}(iT) \tag{5.4}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.4), η κατάσταση του συστήματος στο (N+1) βήμα μπορεί να γραφεί

$$\underline{x}_f=\underline{x}[(N+1)T]=A^{N+1}\underline{x}(0)+\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^N B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u}(N)\\ \underline{u}(N-1)\\ \vdots \\ \underline{u}(0)\end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Έστω n η διάσταση του διανύσματος κατάστασης. Τότε θα είναι:

Θεώρημα 5.1 Το σύστημα διακριτού χρόνου θα είναι ελέγξιμο εάν και μόνο εάν η μήτρα ελεγξιμότητος

$$\Gamma_c=\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

έχει βαθμό ίσο με n.

Απόδειξη

Από το θεώρημα των Cayley - Hamilton η μήτρα A^{n+i}, i=0,1,… θα είναι γραμμικός συνδυασμός των μητρών I, A, A^2, …, A^{n-1}. Συνεπώς το σύστημα των εξισώσεων (5.5) θα έχει λύση για κάθε τιμή των $\underline{x}_0$, $\underline{x}_f$ εάν και μόνο εάν οι στήλες της μήτρας Γ_c περιέχουν μία βάση του n-διάστατου χώρου και αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

Έστω ότι το σύστημα έχει p εισόδους, η περιγραφή του είναι ελέγξιμη και έστω λ ο ελάχιστος ακέραιος ώστε η μήτρα

$$\tilde{\Gamma}_c=\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{\lambda-1}B\end{bmatrix} \tag{5.7}$$

να έχει βαθμό ίσο με n.

Ορισμός 5.2 Ο ακέραιος λ καλείται δείκτης ελεγξίμου του συστήματος.

Από τον ορισμό του δείκτη ελεγξίμου και την σχέση (5.5) προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2 Εάν η περιγραφή του συστήματος είναι ελέγξιμη, το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου κατάστασης το πολύ σε λ βήματα.

Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα έχει μία μόνο είσοδο και η περιγραφή του είναι ελέγξιμη, ο δείκτης ελεγξίμου θα είναι ίσος με n, την τάξη της περιγραφής και το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου κατάστασης το πολύ σε n βήματα.

Εάν η περιγραφή του συστήματος είναι ελέγξιμη και $N \geq \lambda$, το σύστημα των εξισώσεων (5.5) διαθέτει μία οικογένεια λύσεων και είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η λύση η οποία έχει την ελάχιστη Ευκλιδεια νόρμα, δηλαδή η λύση η οποία ικανοποιεί το κριτήριο

$$J=\sum_{i=0}^{N}\left\| u^2(iT) \right\|=\text{Minimum} \tag{5.8}$$

Από τη θεωρία της γραμμικής άλγεβρας προκύπτει ότι η βέλτιστη αυτή λύση θα δίδεται από τη σχέση

$$\underline{u}=P_N^T\left[P_N P_N^T\right]^{-1}\left\{x[(N+1)T]-A^{N+1}x(0)\right\} \tag{5.9}$$

όπου

$$P_N=\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^N B \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Η ελάχιστη νόρμα, η οποία προσδιορίζεται από την ενέργεια των εισόδων για να οδηγηθεί το σύστημα στην επιθυμητή κατάσταση θα είναι

$$\sum_{i=0}^{N}\left\| \underline{u}^2(iT) \right\|=\left\{\underline{x}[(N+1)T]-A^{N+1}\underline{x}(0)\right\}^T\left[P_N P_N^T\right]^{-1}\left\{\underline{x}[(N+1)T]-A^{N+1}\underline{x}(0)\right\} \tag{5.11}$$

Αξίζει να παρατηρηθούν τα ακόλουθα.

1. Η μήτρα

$$W_N=\left[P_N P_N^T\right]=\sum_{i=0}^{N}A^i BB^T (A^T)^i \tag{5.12}$$

είναι θετικά ορισμένη. Καθώς $W_N > W_M$ για $N > M$, η ενέργεια η οποία απαιτείται για την επίτευξη της επιθυμητής κατάστασης ελαττώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων.

2. Το ιδιοδιάνυσμα της W_N το οποίο αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή προσδιορίζει τη διεύθυνση στο χώρο κατάστασης κατά την οποία ο έλεγχος είναι μέγιστα αποτελεσματικός. Αντίθετα το ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή προσδιορίζει τη διεύθυνση στο χώρο κατάστασης κατά την οποία ο έλεγχος είναι ελάχιστα αποτελεσματικός.

3. Εάν N τείνει στο άπειρο και η μήτρα A έχει ιδιοτιμές στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, θα είναι

$$AW_\infty A^T=\sum_{i=1}^{\infty}A^i BB^T (A^T)^i = W_\infty - BB^T \tag{5.13}$$

δηλαδή η W_∞ θα ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov

$$W_\infty - A\, W_\infty\, A^T=BB^T \tag{5.14}$$

Ας θεωρηθεί ότι εφαρμόζεται μετασχηματισμός ομοιότητος στην περιγραφή του συστήματος με τη χρήση της μήτρας P. Η νέα περιγραφή του συστήματος θα είναι

$$\underline{\hat{x}}[(k+1)T] = \hat{A}\underline{\hat{x}}(kT)+\hat{B}\underline{u}(kT)=[P^{-1}AP]\underline{\hat{x}}(kT)+[P^{-1}B]\underline{u}(kT) \tag{5.15α}$$

$$\underline{y}(kT)=\hat{C}\underline{\hat{x}}(kT)+\hat{D}\underline{u}(kT)=[CP]\underline{\hat{x}}(kT)+D\underline{u}(kT) \tag{5.15β}$$

Καθώς

$$[\hat{A}]^k\hat{B}=[P^{-1}AP]^k[P^{-1}B]=P^{-1}A^kB \tag{5.16}$$

Η μήτρα ελεγξιμότητος της νέας περιγραφής θα είναι

$$\hat{\Gamma}_c=\begin{bmatrix}\hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \cdots & \hat{A}^{n-1}\hat{B}\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=P^{-1}\Gamma_c \tag{5.17}$$

Από τη σχέση (5.17), επειδή η μήτρα P είναι ομαλή, οι μήτρες $\hat{\Gamma}_c, \Gamma_c$ θα έχουν τον ίδιο βαθμό και συνεπώς θα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.3 Η ελεγξιμότητα διατηρείται εάν στην περιγραφή του συστήματος εφαρμοστεί μετασχηματισμός ομοιότητος.

Για την εξέταση της ελεγξιμότητος μιάς περιγραφής επομένως είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός ισοδυναμίας ώστε να επιτευχθεί περιγραφή για την οποία η εξέταση είναι εύκολη. Μία κατάλληλη περιγραφή είναι εκείνη στην οποία η μήτρα A είναι διαγώνιος. Αξίζει να τονιστεί ότι δεν διαγωνιοποιούνται όλες οι μήτρες με μετασχηματισμό ομοιότητος και μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι η μήτρα A να διαθέτει n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Για συστήματα μιάς εισόδου στα οποία η μήτρα A διαγωνιοποιείται θα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4 Εάν σε σύστημα μιάς εισόδου είναι

$$A=Diag[a_1,a_2,...,a_n] \qquad B=[b_1,b_2,...,b_n]^T \tag{5.18}$$

η περιγραφή είναι ελέγξιμη εάν και μόνο εάν $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$ και $b_k \neq 0$ για $k=1,2,\ldots,n$.

Απόδειξη

Η μήτρα ελεγξιμότητος της περιγραφής της σχέσης (5.18) είναι

$$\Gamma_c=\begin{bmatrix} b_1 & a_1b_1 & \cdots & a_1^{n-1}b_1 \\ b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_2^{n-1}b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_nb_n & \cdots & a_n^{n-1}b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Για να είναι η περιγραφή ελέγξιμη η μήτρα Γ_c πρέπει να είναι ομαλή, δηλαδή η ορίζουσά της να είναι διάφορη του μηδενός. Συνεπώς οι δύο τελευταίες μήτρες οφείλουν να είναι ομαλές. Εξ αυτών η τελευταία μήτρα είναι μήτρα Vandermonde και είναι ομαλή μόνο εάν $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$. Η διαγώνιος μήτρα με στοιχεία b_k θα είναι ομαλή εάν κάθε διαγώνιο στοιχείο της είναι μη μηδενικό και το θεώρημα αποδείχθηκε.

Παράδειγμα 5.1
Δίδεται σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\underline{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3a^2 & 0 & 0 & 2a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2a & 0 & 1\end{bmatrix}\underline{x}(k)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\underline{u}(k) \qquad \underline{y}(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\underline{x}(k) \tag{5.20}$$

Η μήτρα ελεγξιμότητος θα είναι

$$\Gamma_c=\begin{bmatrix}B & \cdots & A^3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & -a^2 & 2a\\ 1 & 0 & 0 & 2a & -a^2 & 2a & -4a^2 & 6a^3+2a(1-4a^2)\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2a & 1 & -2a & 1-4a^2\\ 0 & 1 & -2a & 1 & -2a & 1-4a^2 & 2a^3-3a & 1-8a^2\end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Η ορίζουσα που σχηματίζεται από τις πρώτες τέσσερις στήλες της μήτρας Γ_c είναι

$$\det\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2a & 1\end{bmatrix}=-1 \tag{5.22}$$

Συνεπώς η περιγραφή είναι ελέγξιμη και ο δείκτης ελεγξίμου είναι λ=2. Επομένως εάν χρησιμοποιούνται και οι δύο είσοδοι του συστήματος το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε οποιαδήποτε κατάσταση σε δύο βήματα

Εάν χρησιμοποιείται μόνο η πρώτη είσοδος του συστήματος, η μήτρα B_1 θα είναι ίση με την πρώτη στήλη της B. Η μήτρα ελεγξιμότητος θα είναι

$$\Gamma_c^{(1)}=\begin{bmatrix}B_1 & \cdots & A^3B_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -a^2\\ 1 & 0 & -a^2 & -4a^2\\ 0 & 0 & -2a & -2a\\ 0 & -2a & -2a & 2a^3-3a^2\end{bmatrix} \tag{5.23}$$

και για το βαθμό της θα είναι

$$\mathrm{rank}\Gamma_c^{(1)}=\begin{cases}2 & \text{εάν } a=0\\ 3 & \text{εάν } a=2/3\\ 4 & \text{εάν } a\neq 0 \quad \text{και} \quad a\neq 2/3\end{cases} \tag{5.24}$$

Η περιγραφή θα είναι ελέγξιμη εάν το a είναι διάφορο του 0 ή του 2/3. Καθώς ο δείκτης ελεγξίμου θα είναι λ=4, με χρήση μόνο της πρώτης εισόδου απαιτούνται τέσσερα βήματα για την επίτευξη οιασδήποτε κατάστασης.

5.2.2 Ελεγξιμότητα περιγραφής συστήματος συνεχούς χρόνου

Η χρονική απόκριση του συστήματος συνεχούς χρόνου δίδεται από τη σχέση

$$\underline{x}(t)=e^{At}\underline{x}(0^-)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (5.25)$$

Εάν $\delta^{(k)}(t)$ παριστάνει την k παράγωγο της συνάρτησης Dirac $\delta(t)$ και στο σύστημα εφαρμοστεί η διέγερση

$$\underline{u}(t)=\sum_{k=0}^{N}\underline{a}_k\delta^{(k)}(t) \qquad (5.26)$$

η απόκριση τη χρονική στιγμή 0^+ θα είναι

$$\underline{x}_f=\underline{x}(0^+)=\underline{x}(0^-)+\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^N B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a}_N\\ \underline{a}_{N-1}\\ \vdots\\ \underline{a}_0\end{bmatrix} \qquad (5.27)$$

Έστω n η διάσταση του διανύσματος κατάστασης. Τότε θα είναι:

Θεώρημα 5.5 Το σύστημα συνεχούς χρόνου θα είναι ελέγξιμο εάν και μόνο εάν η μήτρα ελεγξιμότητος

$$\Gamma_c=\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} \qquad (5.28)$$

έχει βαθμό ίσο με n.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι ίδια με εκείνη των συστημάτων διακριτού χρόνου. Από τη σχέση (5.27) προκύπτει ότι η οδήγηση του συστήματος στην επιθυμητή κατάσταση είναι άμεση με τη χρήση κρουστικών συναρτήσεων και των παραγώγων τους ο δε δείκτης ελεγξίμου προδιορίζει την παράγωγο μέγιστης τάξης η οποία απαιτείται για την οδήγηση αυτή.

Η είσοδος της σχέσεως (5.26) είναι ένα βίαιο σήμα το οποίο δεν μπορεί να υλοποιηθεί. Για την οδήγηση του συστήματος με ομαλότερα σήματα, απαιτείται πεπερασμένο χρονικό διάστημα T_f. Λαμβάνοντας υπόψη την έκφραση της εκθετικής συνάρτησης με τη χρήση του θεωρήματος των Cayley-Hamilton ως ακολούθως

$$e^{A\tau}=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(\tau)A^k \qquad (5.29)$$

η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή T_f θα είναι

$$\underline{x}_f=\underline{x}(T_f)=e^{AT_f}\underline{x}(0^-)+\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_0^{T_f}a_0(\tau)\underline{u}(t-\tau)d\tau\\ \int_0^{T_f}a_1(\tau)\underline{u}(t-\tau)d\tau\\ \vdots\\ \int_0^{T_f}a_{n-1}(\tau)\underline{u}(t-\tau)d\tau\end{bmatrix} \qquad (5.30)$$

Όπως προκύπτει από τη σχέση (5.30) υπάρχουν πολλές είσοδοι οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν το σύστημα από την αρχική κατάσταση στην επιθυμητή κατάσταση, εάν το σύστημα είναι ελέγξιμο. Εάν η ενέργεια ελέγχου καθορίζεται από το

$$J=\int_{t_0}^{t_1} \underline{u}^T(t)\underline{u}(t)dt \tag{5.31}$$

και παρασταθεί

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}d\tau \tag{5.32}$$

η μοναδικά προσδιοριζόμενη διέγερση η οποία οδηγεί το σύστημα από την κατάσταση $\underline{x}(t_0)=\underline{x}_0$ στην κατάσταση $\underline{x}(t_1)=\underline{x}_1$ ενώ ελαχιστοποιεί το κριτήριο (5.31) δίδεται από τη σχέση

$$\underline{u}(t)=B^Te^{-A^Tt}W^{-1}(t_0,t_1)\left[e^{-At_1}\underline{x}(t_1)-e^{-At_0}\underline{x}(t_0)\right] \tag{5.33}$$

Ο νόμος ελέγχου που δίδεται από τη σχέση (5.33) είναι ανοικτού βρόχου. Η είσοδος υπολογίζεται εκ των προτέρων και εφαρμόζεται στο σύστημα για προκαθορισμένο χρονικό διάστημα, χωρίς ανατροφοδότηση για την αντιστάθμιση των σφαλμάτων και των μεταβολών στη δυναμική του συστήματος.

Τέλος αξίζει να παρατηρηθεί ότι εάν εφαρμοστεί μετασχηματισμός ομοιότητος στο σύστημα συνεχούς χρόνου, η περιγραφή διατηρεί την ιδιότητα της ελεγξιμότητος, όπως συμβαίνει και στα συστήματα διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 5.2

Ας θεωρηθεί το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\dot{\underline{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\underline{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t) \quad \underline{x}(0^-)=\begin{bmatrix}10\\ 10\end{bmatrix} \tag{5.34}$$

Η μήτρα ελεγξιμότητος είναι

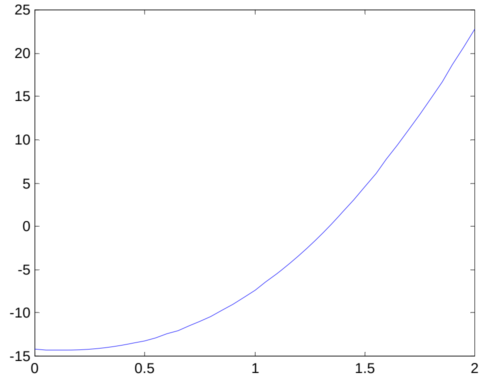
$$\Gamma_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{5.35}$$

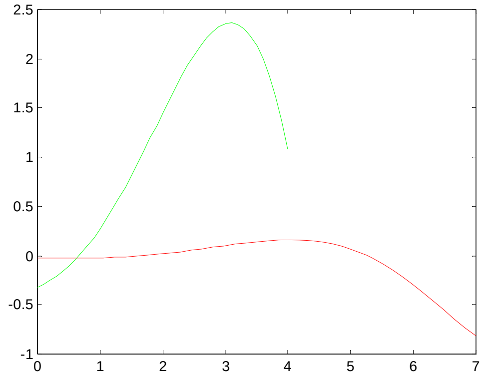
είναι ομαλή και συνεπώς το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα στην αρχή των συντεταγμένων (0,0), η οποία είναι σημείο ισορροπίας όταν u=0. Καθώς

$$e^{-At}=\begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}}\left(συν\dfrac{t\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}ημ\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right) & -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{t}{2}}ημ\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{t}{2}}ημ\dfrac{t\sqrt{3}}{2} & e^{\frac{t}{2}}\left(συν\dfrac{t\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}ημ\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)\end{bmatrix} \tag{5.36}$$

Θα είναι

$$W(0,7)=\int_0^7 e^{-At}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}e^{-A^Tt}dt=\begin{bmatrix}700.799 & -35.13\\ -35.13 & 429.97\end{bmatrix} \tag{5.37}$$





Σχήμα 5.1α Βέλτιστη είσοδος για t_1=2sec

Σχήμα 5.1β Βέλτιστη είσοδος για t_1=4 και 7sec

Στο Σχήμα 5.1 φαίνονται οι διεγέρσεις u(t) οι οποίες ελαχιστοποιούν το κριτήριο (5.31) για χρονικά διαστήματα 2, 4 και 7 seconds.

Ο υπολογισμός έγινε με το ακόλουθο πρόγραμμα σε περιβάλλον MATLAB.

```
t=sym('t')
A=[0 1;-1 -1]
b=[0 1]'
tfinal=2
xinitial=[10 10]'
N=40

z=expm(-A*t)*b*b'*expm(-A'*t)
w=INT(z,t,0,tfinal)
w1=eval(w)

for i=1:N+1
   t1(i)=(i-1)*tfinal/N;
   t2=t1(i);
   u(i)=-b'*expm(-A'*t2)*inv(w1)*xinitial;
   end

plot(t1,u,'b')
```

Από το Σχήμα 5.1 προκύπτει ότι για την οδήγηση του συστήματος από την αρχική κατάσταση στην επιθυμητή κατάσταση το μέγεθος της εισόδου μεγαλώνει όσο το χρονικό διάστημα ελαττώνεταικαι εάν δεν υπάρχει περιορισμός στο μέγεθος της εισόδου το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε αυθαίρετα μικρό διάστημα. Στα πραγματικά συστήματα υπάρχει περιορισμός στο μέγεθος της διέγερσης και αυτό περιορίζει το ελάχιστο χρονικό διάστημα στο οποίο μπορεί να επιτευχθεί η αρχή. Στο παράδειγμα 5.2, εάν η διέγερση δεν είναι δυνατόν να υπερβαίνει τη μονάδα, ο έλεγχος με ελαχιστοποίηση της ενέργειας των εισόδων δεν επιτυγχάνει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα σε χρόνο μικρότερο των 6seconds.

5.3 Παρατηρησιμότητα

5.3.1 Παρατηρησιμότητα συστήματος διακριτού χρόνου

Ας θεωρηθεί σύστημα διακριτού χρόνου στη μορφή των εξισώσεων καταστάσεως ως εξής.

$$\underline{x}[(k+1)T] = A\underline{x}(kT)+B\underline{u}(kT) \qquad (5.38\alpha)$$

$$\underline{y}(kT)=C\underline{x}(kT)+D\underline{u}(kT) \qquad (5.38\beta)$$

Ορισμός 5.3 Η περιγραφή του συστήματος καλείται παρατηρήσιμη δοθέντων των διανυσμάτων $\underline{y}(kT)$, $\underline{u}(kT)$ για $k=0,1,...,N$, όπου N πεπερασμένος ακέραιος αριθμός, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η αρχική τιμή $\underline{x}(0)$ του διανύσματος καταστάσεων.

Από τη σχέση (5.38α) προκύπτει ότι, εάν προσδιορίζεται το $\underline{x}(0)$, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί το $\underline{x}(kT)$ για $k=0,1,\ldots N$, δηλαδή για όλο το διάστημα των παρατηρήσεων. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.4), θα είναι

$$\underline{y}(kT)=C\underline{x}(kT)+D\underline{u}(kT)=CA^{k}\underline{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}CA^{k-i-1}B\underline{u}(iT)+D\underline{u}(kT) \quad k=0,1,...,N \qquad (5.39)$$

Από τη σχέση (5.39) προκύπτει το ακόλουθο σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N} \end{bmatrix}\underline{x}(0)=-\begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{u}(0) \\ \underline{u}(T) \\ \vdots \\ \underline{u}(NT) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \underline{y}(0) \\ \underline{y}(T) \\ \vdots \\ \underline{y}(NT) \end{bmatrix}=\underline{\gamma} \qquad (5.40)$$

όπου $\underline{\gamma}$ γνωστό διάνυσμα. Από τη σχέση (5.40) προκύπτει ότι χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι το διάνυσμα των διεγέρσεων είναι μηδενικό καθ' όλο το διάστημα της παρατήρησης.

Το σύστημα των εξισώσεων (5.40) οφείλει να έχει λύση και μάλιστα μοναδική αφού η κατάσταση του συστήματος λαμβάνει μοναδική τιμή κάθε χρονική στιγμή. Έστω διάνυσμα $\underline{v}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N} \end{bmatrix}\underline{v}=\underline{0} \qquad (5.41)$$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\underline{x}(0)+\underline{v}$ είναι επίσης λύση των εξισώσεων (5.40). Για να υπάρχει μοναδικότητα της λύσης η σχέση (5.41) πρέπει να έχει μοναδική λύση την $\underline{v}=\underline{0}$, δηλαδή οι στήλες της μήτρας

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N} \end{bmatrix} \qquad (5.42)$$

ή ισοδύναμα ο βαθμός της να είναι ίσος με τη διάσταση n του χώρου των καταστάσεων. Από το θεώρημα των Cayley - Hamilton η μήτρα A^{n+i}, i=0,1,… θα είναι γραμμικός συνδυασμός των μητρών I, A, A^2, …, A^{n-1}και συνεπώς το N δεν χρειάζεται να είναι μεγαλύτερο του n-1. Αυτό αποδεικνύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.6 Η περιγραφή του συστήματος διακριτού χρόνου είναι παρατηρήσιμη εάν και μόνο εάν η μήτρα παρατηρησιμότητος

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

έχει βαθμό ίσο με n.

Έστω ότι το σύστημα έχει m εξόδους, η περιγραφή του είναι παρατηρήσιμη και έστω μ ο ελάχιστος ακέραιος ώστε η μήτρα

$$\tilde{\Gamma}_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\mu-1} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

να έχει βαθμό ίσο με n.

Ορισμός 5.4 Ο ακέραιος μ καλείται δείκτης παρατηρησίμου του συστήματος.

Από τον ορισμό του δείκτη παρατηρησίμου και την σχέση (5.54) προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.7 Εάν η περιγραφή του συστήματος είναι παρατηρήσιμη, η αρχική τιμή της κατάστασης μπορεί να προσδιοριστεί από τις μετρήσεις εισόδων και εξόδων σε μ βήματα.

Ας θεωρηθεί

$$\sum_{k=0}^{N} \left\| \underline{y}(kT) \right\|^2 = \underline{x}^T(0) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix} \underline{x}(0) = \underline{x}^T(0) V_N \underline{x}(0) = \underline{x}^T(0) \sum_{k=0}^{N} (A^T)^k C^T C A^k \, \underline{x}(0) \tag{5.45}$$

σαν ενέργεια των εξόδων του συστήματος. Αξίζει να παρατηρηθούν τα ακόλουθα.

1. Η μήτρα

$$V_N = \sum_{k=0}^{N} (A^T)^k C^T C A^k \tag{5.46}$$

είναι θετικά ορισμένη. Το ιδιοδιάνυσμα της V_N το οποίο αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή προσδιορίζει τη διεύθυνση στο χώρο κατάστασης κατά την οποία η παρατήρηση των εξόδων είναι ελάχιστα αποδοτική, δημιουργεί δηλαδή για την ίδια ενέργεια της αρχικής τιμής της κατάστασης την ελάχιστη ενέργεια εξόδων. Αντίθετα το ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή προσδιορίζει τη διεύθυνση στο χώρο κατάστασης κατά την οποία η παρατήρηση είναι μέγιστα αποτελεσματική.

2. Εάν N>M, από τη σχέση (5.46) προκύπτει $V_N>V_M$ και η ενέργεια των εξόδων θα αυξάνεται, δηλαδή οι καταστάσεις θα παρατηρούνται αποτελεσματικότερα
3. Εάν N τείνει στο άπειρο και η μήτρα A έχει ιδιοτιμές στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, θα είναι

$$A^T V_\infty A = \sum_{k=1}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k = V_\infty - C^T C \tag{5.47}$$

δηλαδή η V_∞ θα ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov

$$V_\infty - A^T V_\infty A = C^T C \tag{5.48}$$

Οι ανακρίβειες στο μοντέλο το οποίο περιγράφει το σύστημα και οι θόρυβοι στις μετρήσεις είναι δυνατόν να καταστήσουν το σύστημα των εξισώσεων (5.40) μη συμβιβαστό. Στην περίπτωση αυτή η αρχική τιμή της κατάστασης προσεγγίζεται με την αρχή των ελαχίστων τετραγώνων από τη σχέση

$$\underline{\hat{x}}(0)=\left[\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{y}(0) \\ \underline{y}(T) \\ \vdots \\ \underline{y}(NT) \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

Ας θεωρηθεί ότι εφαρμόζεται μετασχηματισμός ομοιότητος στην περιγραφή του συστήματος με τη χρήση της μήτρας P. Η νέα περιγραφή του συστήματος θα είναι

$$\underline{\hat{x}}[(k+1)T] = \hat{A}\underline{\hat{x}}(kT)+\hat{B}\underline{u}(kT)=[P^{-1}AP]\underline{\hat{x}}(kT)+[P^{-1}B]\underline{u}(kT) \tag{5.50α}$$

$$\underline{y}(kT)=\hat{C}\underline{\hat{x}}(kT)+\hat{D}\underline{u}(kT)=[CP]\underline{\hat{x}}(kT)+D\underline{u}(kT) \tag{5.50β}$$

Καθώς

$$[\hat{A}]^k \hat{B}=[P^{-1}AP]^k[P^{-1}B]=P^{-1}A^k B \tag{5.51}$$

η μήτρα παρατηρησιμότητος της νέας περιγραφής θα είναι

$$\hat{\Gamma}_o=\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}P=\Gamma_o P \tag{5.52}$$

Από τη σχέση (5.52), επειδή η μήτρα P είναι ομαλή, οι μήτρες $\hat{\Gamma}_o, \Gamma_o$ θα έχουν τον ίδιο βαθμό και συνεπώς θα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.8 Η παρατηρησιμότητα διατηρείται εάν στην περιγραφή του συστήματος εφαρμοστεί μετασχηματισμός ομοιότητος.

Για την εξέταση της παρατηρησιμότητος μιάς περιγραφής επομένως είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός ισοδυναμίας ώστε να επιτευχθεί περιγραφή για την οποία η εξέταση είναι εύκολη. Μία κατάλληλη περιγραφή είναι εκείνη στην οποία η μήτρα A είναι διαγώνιος. Αξίζει να τονιστεί ότι δεν διαγωνιοποιούνται όλες οι μήτρες με μετασχηματισμό ομοιότητος και μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι η μήτρα A να διαθέτει n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Για συστήματα μιάς εισόδου στα οποία η μήτρα A διαγωνιοποιείται θα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.9 Εάν σε σύστημα μιάς εισόδου είναι

$$A=\mathrm{Diag}[a_1,a_2,...,a_n] \qquad C=[c_1,c_2,...,c_n] \tag{5.53}$$

η περιγραφή είναι ελέγξιμη εάν και μόνο εάν $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$ και $c_k \neq 0$ για $k=1,2,\ldots,n$.

Απόδειξη

Η μήτρα παρατηρησιμότητος της περιγραφής της σχέσης (5.53) είναι

$$\Gamma_o=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1a_1 & c_2a_2 & \cdots & c_na_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1a_1^{n-1} & c_2a_2^{n-1} & \cdots & c_na_n^{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

Για να είναι η περιγραφή παρατηρήσιμη η μήτρα Γ_o πρέπει να είναι ομαλή, δηλαδή η ορίζουσά της να είναι διάφορη του μηδενός. Συνεπώς οι δύο τελευταίες μήτρες οφείλουν να είναι ομαλές. Εξ αυτών η πρώτη μήτρα είναι μήτρα Vandermonde και είναι ομαλή μόνο εάν $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$. Η διαγώνιος μήτρα με στοιχεία c_k θα είναι ομαλή εάν κάθε διαγώνιο στοιχείο της είναι μη μηδενικό και το θεώρημα αποδείχθηκε.

Παράδειγμα 5.3

Δίδεται σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\underline{x}(k+1)=\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \end{bmatrix}\underline{x}(k) \tag{5.55}$$

Εάν a=1, για διέγερση u(0)=2, u(1)=1 παρατηρήθηκαν τιμές της εξόδου y(0)=1, y(1)=3 και y(3)=2.

Για την εύρεση της αρχικής τιμής του διανύσματος κατάστασης επιλύονται οι εξισώσεις (5.40), οι οποίες λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \underline{x}(0) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ CB & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ u(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

Η επίλυση των εξισώσεων δίδει

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -11.5 & -1 & 12.5 \end{bmatrix}^T \tag{5.57}$$

Ας υποτεθεί ότι η διέγερση είναι μηδενική για όλο το χρονικό διάστημα των μετρήσεων το οποίο εκτείνεται μέχρι το άπειρο και ζητείται να ευρεθούν τα διανύσματα των αρχικών συνθηκών με μοναδιαίο μέτρο τα οποία δίδουν αντίστοιχα τη μέγιστη και την ελάχιστη ενέργεια της εξόδου $E = \sum_{k=0}^{\infty} |y(k)|^2$. Η επίλυση της εξίσωσης Lyapunov της σχέσεως (5.48) δίδει

$$V_\infty = \begin{bmatrix} 1.36 & -0.089 & 1.19 \\ -0.089 & 1.21 & -0.0158 \\ 1.19 & -0.0158 & 1.11 \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

Η μήτρα V_∞ έχει ιδιοτιμές 2.44, 1.21 και 0.0336. Το ιδιοδιάνυσμα μοναδιαίου μήκους το οποίο αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή είναι

$$\underline{v}_{max} = \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -0.7427 & 0.0627 & -0.6667 \end{bmatrix}^T \tag{5.59}$$

και η μέγιστη ενέργεια που προκύπτει είναι

$$E_{max} = 2.44 \tag{5.60}$$

Το ιδιοδιάνυσμα μοναδιαίου μήκους το οποίο αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή είναι

$$\underline{v}_{min} = \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.6693 & 0.0407 & -0.7418 \end{bmatrix}^T \tag{5.61}$$

και η μέγιστη ενέργεια που προκύπτει είναι

$$E_{\mu\iota\nu} = 0.0336 \tag{5.62}$$

Τέλος ζητείται να ευρεθεί εάν υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα αρχικών συνθηκών για τα οποία η ενέργεια της εξόδου είναι μηδενική.

Από τον ορισμό της ενέργειας εξόδου προκύπτει ότι για να μηδενιστεί πρέπει το διάνυσμα της εξόδου να είναι μηδενικό κάθε χρονική στιγμή. Εάν η περιγραφή του συστήματος είναι παρατηρήσιμη, μηδενική τιμή της εξόδου με μηδενικές διεγέρσεις συνεπάγεται μηδενικές αρχικές συνθήκες από τη σχέση (5.40). Επομένως αναζητείται για ποιές τιμές του a η περιγραφή τουσυστήματος δεν είναι παρατηρήσιμη.

Η μήτρα παρατηρησιμότητος είναι

$$\Gamma_o=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} & 0 \\ 0.5 & \frac{a-1}{4} & \frac{3(a+1)}{20} \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

Η ορίζουσα της μήτρας Γ_o είναι

$$\det(\Gamma_o)=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} & 0 \\ 0.5 & \frac{a-1}{4} & \frac{3(a+1)}{20} \end{bmatrix}=\frac{a^3}{8}-\frac{17a^2}{40}+\frac{a}{40}+\frac{3}{40} \tag{5.64}$$

και μηδενίζεται για τις τιμές 3.28, 0.49 και –0.37. Τα διανύσματα τα οποία ικανοποιούν τη σχέση (5.41) θα είναι τα διανύσματα που ανήκουν στους χώρους που δημιουργούν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές της μήτρας Γ_o. Συνεπώς θα είναι

$$\underline{x}(0)=K\begin{bmatrix}-0.8522 & 0.4543 & 0.2596\end{bmatrix}^T \quad \text{για} \quad a=3.28 \tag{5.65α}$$

$$\underline{x}(0)=K\begin{bmatrix}-0.4351 & -0.1489 & 0.888\end{bmatrix}^T \quad \text{για} \quad a=0.49 \tag{5.65β}$$

$$\underline{x}(0)=K\begin{bmatrix}0.2767 & 0.6055 & 0.7462\end{bmatrix}^T \quad \text{για} \quad a=-0.37 \tag{5.65α}$$

5.2.3 Παρατηρησιμότητα περιγραφής συστήματος συνεχούς χρόνου

Ας θεωρηθεί γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου το οποίο περιγράφεται στη μορφή των εξισώσεων καταστάσεως

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t)+B\underline{u}(t) \tag{5.66α}$$

$$\underline{y}(t)=C\underline{x}(t)+D\underline{u}(t) \tag{5.66β}$$

Εάν η μήτρα C είναι ομαλή, δηλαδή η ορίζουσα της C είναι μη μηδενική και συνεπώς το σύστημα έχει τόσες εξόδους όσες και καταστάσεις, το διάνυσμα $\underline{x}(0)$ είναι δυνατόν να προσδιοριστεί από τις μετρήσεις των $\underline{y}(0), \underline{u}(0)$ με χρήση της σχέσεως (5.66β). Καθώς το σύστημα έχει συνήθως πολύ λιγότερες εξόδους από καταστάσεις, παραγωγίζοντας την (5.66β) διαδοχικά και χρησιμοποιώντας την (5.66α) λαμβάνεται

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}\underline{x}(t)=-\begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{u}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \underline{u}^{(N)}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \underline{y}(t) \\ \underline{y}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \underline{y}^{(N)}(t) \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

Όπως και στην περίπτωση των συστημάτων διακριτού χρόνου η διέγερση μπορεί να αγνοηθεί χωρίς απώλεια της γενικότητος. Από την σχέση (5.67) και λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα των Cayley-Hamilton, αποδεικνύεται ότι το $\underline{x}(0)$ είναι δυνατόν να προσδιοριστεί από τις μετρήσεις των $\underline{y}(0)$, $\underline{u}(0)$ και θα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.10 Η περιγραφή του συστήματος συνεχούς χρόνου είναι παρατηρήσιμη εάν και μόνο εάν η μήτρα παρατηρησιμότητος

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.68}$$

έχει βαθμό ίσο με n.

Από τη σχέση (5.67) προκύπτει ότι ο προσδιορισμός της κατάστασης του συστήματος είναι άμεσος με τη χρήση των παραγώγων των εισόδων και των εξόδων ο δε δείκτης παρατηρησίμου καθορίζει την παράγωγο μέγιστης τάξης η οποία απαιτείται για την εκτίμηση αυτή.

Η χρονική απόκριση του συστήματος συνεχούς χρόνου δίδεται από τη σχέση

$$\underline{y}(t)=Ce^{At}\underline{x}(0^-) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau + D\underline{u}(t) \tag{5.69}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί $e^{A^T t}C^T$ εξ αριστερών και ολοκληρώνοντας μεταξύ 0 και t_1, λαμβάνεται

$$\left[\int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T Ce^{At}dt\right]\underline{x}(0^-) = \int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T\left[\underline{y}(t)\text{-}C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau - D\underline{u}(t)\right]dt \tag{5.70}$$

Εάν οριστεί

$$V(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T Ce^{At}dt \tag{5.71}$$

η Gramian παρατηρησιμότητος, η αρχική τιμή του διανύσματος καταστάσεων θα είναι

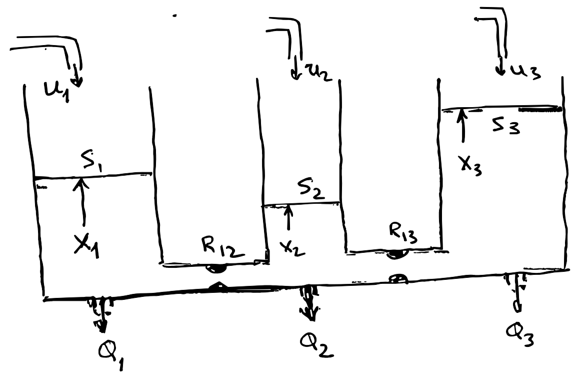
$$\underline{x}(0^-) = V^{-1}(0,t_1)\int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T\left[\underline{y}(t)\text{-}C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau - D\underline{u}(t)\right]dt \tag{5.72}$$

Τέλος αξίζει να παρατηρηθεί ότι εάν εφαρμοστεί μετασχηματισμός ομοιότητος στο σύστημα συνεχούς χρόνου, η περιγραφή διατηρεί την ιδιότητα της παρατηρησιμότητος, όπως συμβαίνει και στα συστήματα διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 5.4

Δίδεται το σύστημα των τριών δοχείων του Σχήματος 5.2. Υπάρχει δυνατότητα τροφοδοσίας ενός μόνο δοχείου και μέτρησης του ύψους του υγρού σε ένα μόνο δοχείο. Ζητείται να ευρεθεί σε ποιό δοχείο θα γίνει η τροφοδοσία και η στάθμη ποίου δοχείου θα μετράται. Οι εξισώσεις καταστάσεως λαμβάνοντας υπόψη τις αντιστάσεις και τις επιφάνειες των δοχείων είναι ως εξής

$$\underline{\dot{x}}(t)=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\underline{x}(t) \tag{5.73}$$



Σχήμα 5.2

Εάν θεωρηθεί ότι τροφοδοτούνται και τα τρία δοχεία και μετρούνται τα ύψη και στα τρία δοχεία, οι πλήρεις εξισώσεις καταστάσεως θα είναι

$$\underline{\dot{x}}(t)=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\underline{x}(t)+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} \tag{5.74}$$

Είναι προφανές ότι το σύστημα πρέπει να είναι ελέγξιμο από την είσοδο και παρατηρήσιμο από την έξοδο που θα επιλεγεί. Εφαρμόζεται μετασχηματισμός ομοιότητος για να οδηγηθεί η μήτρα A σε διαγώνια μορφή. Η μήτρα των ιδιοδιανυσμάτων είναι

$$P=\begin{bmatrix}0.4082 & -0.4082 & -0.7071\\ -0.8165 & -0.8165 & 0.0000\\ 0.4082 & -0.4082 & 0.7071\end{bmatrix} \tag{5.75}$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t)=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\hat{\underline{x}}(t)+\begin{bmatrix}0.6124 & -0.6124 & 0.6124\\ -0.6124 & -0.6124 & -0.6124\\ -0.7071 & 0 & 0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\end{bmatrix} \tag{5.76α}$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4082 & -0.4082 & -0.7071\\ -0.8165 & -0.8165 & 0.0000\\ 0.4082 & -0.4082 & 0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1(t)\\ \hat{x}_2(t)\\ \hat{x}_3(t)\end{bmatrix} \tag{5.76β}$$

Η πρώτη στήλη της μήτρας $\hat{B}$ δεν έχει μηδενικά και συνεπώς το σύστημα είναι ελέγξιμο από την πρώτη είσοδο. Το αυτό συμβαίνει και με την τρίτη είσοδο. Καθώς η δεύτερη στήλη της $\hat{B}$ έχει μηδενικό, το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο από την δεύτερη είσοδο. Επομένως πρέπει να επιλεγεί μία από τις εισόδους 1 ή 3.

Η πρώτη γραμμή της μήτρας $\hat{C}$ δεν έχει μηδενικά και συνεπώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο από την πρώτη έξοδο. Το αυτό συμβαίνει και με την τρίτη έξοδο. Καθώς η δεύτερη γραμμή της $\hat{C}$ έχει μηδενικό, το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο από την δεύτερη έξοδο. Επομένως πρέπει να επιλεγεί μία από τις εξόδους 1 ή 3.

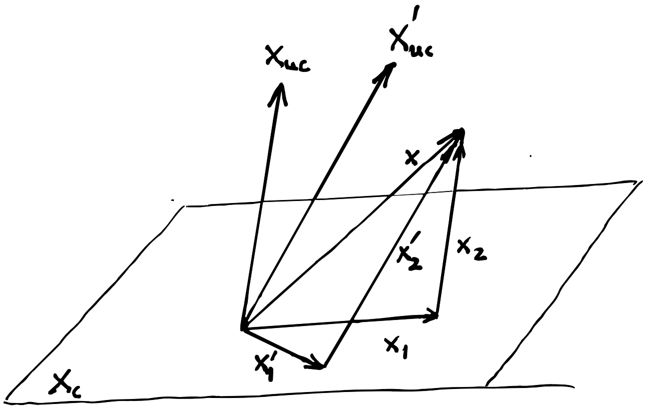
5.4 Αποσύνθεση Kalman

Η αποσύνθεση Kalman αφορά τη γραφή των εξισώσεων καταστάσεως του συστήματος σε ειδική μορφή με τη χρήση μετασχηματισμού ομοιότητος και αφορα τόσο τα συστήματα διακριτού όσο και τα συστήματα συνεχούς χρόνου.

Έστω X_c ο χώρος που δημιουργείται από τις στήλες της μήτρας $Γ_c$, όπως στην εξίσωση (5.28). Είναι προφανές ότι εάν το αρχικό σημείο είναι η αρχή των συντεταγμένων, μόνο στα σημεία αυτού του χώρου μπορεί να οδηγηθεί η κατάσταση του συστήματος με κατάλληλη επιλογή του διανύσματος των εισόδων.

Ορισμός 5.5 Ο χώρος X_c καλείται ο ελέγξιμος υπόχωρος της περιγραφής του συστήματος.

Είναι δυνατόν να ευρεθεί ένας υπόχωρος X_{uc} του χώρου καταστάσεων X όπως στο Σχήμα 5.3 (όχι κατά μοναδικό τρόπο), ο οποίος να μην τέμνεται με τον υπόχωρο X_c ώστε



Σχήμα 5.3

$$X = X_c \oplus X_{uc} \qquad (5.77)$$

Έστω επίσης X_{uo} ο υπόχωρος του χώρου καταστάσεων που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\underline{x}$ που ικανοποιούν την σχέση

$$Γ_o\underline{x} = \underline{0} \qquad (5.78)$$

όπου $Γ_o$ η μήτρα παρατηρησιμότητος της σχέσεως (5.43). Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως τα διανύσματα αυτά δεν μπορούν να προσδιοριστούν από τις μετρήσεις των εισόδων και των εξόδων του συστήματος.

Ορισμός 5.6 Ο υπόχωρος X_{uo} καλείται ο μη παρατηρήσιμος υπόχωρος της περιγραφής του συστήματος.

Είναι δυνατόν να ευρεθεί ένας υπόχωρος X_o του χώρου καταστάσεων X (όχι κατά μοναδικό τρόπο), ο οποίος να μην τέμνεται με τον υπόχωρο X_o ώστε

$$X = X_o \oplus X_{uo} \qquad (5.79)$$

Με κατάλληλη επιλογή των υποχώρων X_o και X_{uc}, λαμβάνοντας τις τομές των χώρων αυτών, ο χώρος καταστάσεων μπορεί να γραφεί:

$$X = (X_c \cap X_{uo}) \oplus (X_c \cap X_o) \oplus (X_{uc} \cap X_{uo}) \oplus (X_{uc} \cap X_o) \qquad (5.80)$$

Αξίζει να τονιστεί ότι η σχέση (5.80) δεν ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή των X_o και X_{uc} οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις (5.77) και (5.79). Έστω ότι ισχύει η σχέση (5.80) και

$$\dim \{X_c \cap X_{uo}\} = n_1 \tag{5.81α}$$

$$\dim \{X_c \cap X_o\} = n_2 \tag{5.81β}$$

$$\dim \{X_{uc} \cap X_{uo}\} = n_3 \tag{5.81γ}$$

$$\dim \{X_{uc} \cap X_o\} = n_4. \tag{5.81δ}$$

Από τη σχέση (5.80) προκύπτει ότι

$$n=n_1+n_2+n_3+n_4 \tag{5.82}$$

Έχει αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα (Kalman 1963).

Θεώρημα 5.11 Εάν εκλεγεί μία βάση του χώρου καταστάσεων τέτοια ώστε τα πρώτα n_1 διανύσματα να ανήκουν στο χώρο $X_c \cap X_{uo}$, τα επόμενα n_2 στον χώρο $X_c \cap X_o$, τα επόμενα n_3 στον χώρο $X_{uc} \cap X_{uo}$ και τα τελευταία n_4 στον χώρο $X_{uc} \cap X_o$, οι μήτρες A,B,C που περιγράφουν το σύστημα λαμβάνουν την μορφή:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \tag{5.83α}$$

$$B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.83β}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \tag{5.83γ}$$

με A_{11} διαστάσεων $n_1 x n_1$, A_{22} διαστάσεων $n_2 x n_2$, A_{33} διαστάσεων $n_3 x n_3$ και A_{44} διαστάσεων $n_4 x n_4$ ενώ ο χωρισμός των B και C είναι σύμμορφος με τον χωρισμό της μήτρας A.

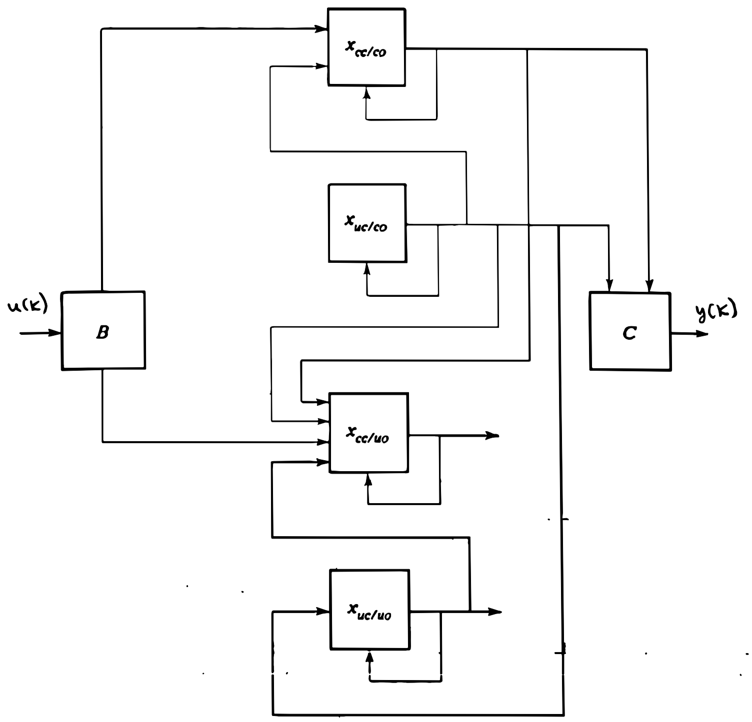
Η μορφή των εξισώσεων (5.83) καλείται αποσύνθεση Kalman του συστήματος. Το αρχικό σύστημα αποσυντίθεται σε τέσσερα υποσυστήματα όπως στο σχήμα 5.4 εκ των οποίων

- το πρώτο είναι ελέγξιμο και μή παρατηρήσιμο
- το δεύτερο είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο
- το τρίτο είναι μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο
- το τέταρτο είναι μη ελέγξιμο και παρατηρήσιμο

Εάν υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, από την περιγραφή αυτή θα ισχύει.

Θεώρημα 5.12 Η συνάρτηση μεταφοράς G(z) του συστήματος είναι:

$$G(z) = C[\, zI_n - A]^{-1}B = C_2[zI_{n2} - A_{22}]^{-1}B_2 \tag{5.84}$$

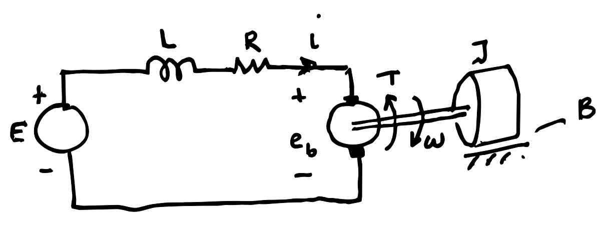


Σχήμα 5.4
Αποσύνθεση Kalman συστήματος.

Η σχέση (5.84) είναι κεφαλαιώδης για την θεωρία των συστημάτων. Υποδεικνύει ότι στη διαμόρφωση της συνάρτησης μεταφοράς συμβάλλει μόνο το ελέγξιμο και παρατηρήσιμο υποσύστημα της περιγραφής του συστήματος. Κατά συνέπεια

1. Η ευστάθεια του συστήματος δεν μπορεί να συναχθεί από την συνάρτηση μεταφοράς, εκτός εάν το σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.
2. Εάν ζητείται μία περιγραφή, η οποία πραγματοποιεί την G(z) και έχει ευρεθεί μία, η οποία είναι μη ελέγξιμη ή μη παρατηρήσιμη ή και τα δύο, αυτή δεν έχει ελάχιστη τάξη και μπορεί να ληφθεί σαν πραγματοποίηση ελάχιστης τάξεως η περιγραφή του ελέγξιμου και παρατηρήσιμου υποσυστήματος της.
3. Οι μη ελέγξιμοι και μη παρατηρήσιμοι πόλοι του συστήματος απαλείφονται με μηδενικά κατά τον σχηματισμό της συνάρτησης μεταφοράς.
4. Από τις σχέσεις εισόδου-εξόδου δεν μπορεί να αναγνωριστεί ένα σύστημα καθώς το μη ελέγξιμο ή μη παρατηρήσιμο υποσύστημά του δεν γίνεται αντιληπτό και εάν συμπεριληφθούν τέτοια υποσυστήματα στην περιγραφή του, η ύπαρξή τους δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί ούτε να αντικρουστεί. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα απαισιόδοξο για την ικανότητα κατανόησης της φύσης[1].

Παράδειγμα 5.5



Σχήμα 5.5

[1] Θεμίστιος Λόγοι 5 σ. 69 «φύσις δε καθ' Ηράκλειτον κρύπτεσθαι φιλεί»

Στο σύστημα του Σχήματος 5.5 ο κινητήρας, ο οποίος έχει περιγραφική σχέση

$$\begin{bmatrix} e_b \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ T \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

κινεί τη ροπή αδρανείας J η οποία εμφανίζει τριβή σε σχέση με το ακίνητο σύστημα αναφοράς. Μετράται η γωνιακή ταχύτητα ω.
Ο παρατηρητής I, γράφοντας την εξίσωση για το ηλεκτρικό σύστημα λαμβάνει

$$L\frac{di}{dt} = E - Ri - e_b = E - Ri - A\omega \tag{5.86}$$

ενώ για το μηχανικό σύστημα λαμβάνει

$$J\frac{d\omega}{dt} = -T - B\omega = Ai - B\omega \tag{5.87}$$

Οι Εξισώσεις (5.86) και (5.87) μαζί με την εξίσωση της απόκρισης

$$y = \omega \tag{5.88}$$

γράφονται σε μητρική μορφή ως εξής

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{A}{L} \\ \frac{A}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{A}{L} \\ \frac{A}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{5.89α}$$

$$y = \omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \tag{5.89β}$$

και συνεπώς σαν διάνυσμα καταστάσεων μπορεί να θεωρηθεί το

$$\underline{x} = [i \quad \omega]^T \tag{5.90}$$

Ας υποτεθεί ότι ο παρατηρητής II επιθυμεί να γνωρίζει τη γωνία θ κατά την οποία είναι στραμμένος ο άξονας του μηχανικού συστήματος κάθε χρονική στιγμή t. Από τη σχέση (5.88) μπορεί να γραφεί

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)d\tau \tag{5.91}$$

δηλαδή η θ(t) δεν μπορεί να εκφραστεί σαν αλγεβρικός συνδυασμός των διεγέρσεων και των συνιστωσών του διανύσματος καταστάσεως. Η λύση δίδεται με την προσθήκη μιάς μεταβλητής, της θ(t), στο διάνυσμα καταστάσεως, το οποίο λαμβάνει τη μορφή

$$\hat{\underline{x}} = [i(t) \quad \theta(t) \quad \omega(t)]^T \tag{5.92}$$

Καθώς

$$\omega = d\theta/dt \tag{5.93}$$

οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος θα λάβουν τη μορφή

$$\frac{d\hat{\underline{x}}}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{di}{dt}\\ \frac{d\theta}{dt}\\ \frac{d\omega}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & 0 & -\frac{A}{L}\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{A}{J} & 0 & -\frac{B}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\ \theta\\ \omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}E \tag{5.94α}$$

$$y=\omega=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\hat{\underline{x}} \tag{5.94β}$$

και η τάξη της περιγραφής αυξήθηκε από δύο σε τρία.
Ας υποτεθεί ότι ο παρατηρητής ΙΙ επέλεξε το διάνυσμα $\hat{\underline{x}}$ για την περιγραφή του συστήματος χωρίς να επιθυμεί τη γνώση της γωνίας θ(t). Ουσιαστικά επέλεξε ένα διάνυσμα με μεγαλύτερο αριθμό συνιστωσών από αυτές που πραγματικά χρειάζεται για να περιγράψει το σύστημα.
Η μήτρα ελεγξιμότητος για την περιγραφή του παρατηρητή Ι είναι

$$\Gamma_c(I)=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{L} & \frac{-R}{L^2}\\ 0 & \frac{A}{JL}\end{bmatrix} \tag{5.95}$$

και έχει βαθμό 2, όση και η τάξη της περιγραφής, οπότε η περιγραφή είναι ελέγξιμη.

Η μήτρα ελεγξιμότητος για την περιγραφή του παρατηρητή ΙΙ είναι

$$\Gamma_c(II)=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{L} & \frac{-R}{L^2} & \frac{R^2}{L^3}-\frac{A^2}{JL^2}\\ 0 & 0 & \frac{A}{JL}\\ 0 & \frac{A}{JL} & -\frac{RA}{JL^2}-\frac{AB}{J^2L}\end{bmatrix} \tag{5.96}$$

και έχει βαθμό 3, όση και η τάξη της περιγραφής, οπότε η περιγραφή είναι ελέγξιμη.

Η μήτρα παρατηρησιμότητος για την περιγραφή του παρατηρητή Ι είναι

$$\Gamma_o(I)=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{A}{J} & \frac{-B}{J}\end{bmatrix} \tag{5.97}$$

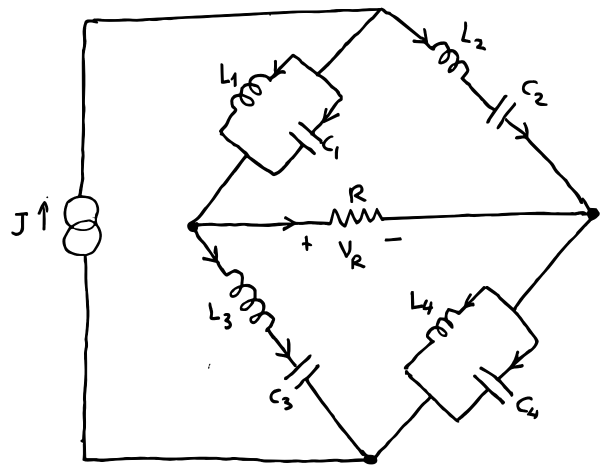
και έχει βαθμό 2, όση και η τάξη της περιγραφής, οπότε η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.

Η μήτρα παρατηρησιμότητος για την περιγραφή του παρατηρητή ΙΙ είναι

$$\Gamma_o(\text{II})=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{A}{J} & 0 & \frac{-B}{J} \\ \frac{-BA}{J^2}-\frac{RA}{JL} & 0 & \frac{-A^2}{JL}+\frac{B^2}{J^2} \end{bmatrix} \tag{5.98}$$

και έχει βαθμό 2, μικρότερο από την τάξη της περιγραφής, οπότε η περιγραφή είναι μη παρατηρήσιμη.
Σαν συμπέρασμα μπορεί να εξακριβωθεί ότι περιγραφή με υπερβάλλοντα αριθμό καταστάσεων προκαλεί μη ελεγξιμότητα ή μη παρατηρησιμότητα της περιγραφής.

Παράδειγμα 5.6



Σχήμα 5.6

Για το κύκλωμα του Σχήματος 5.6 είσοδος θεωρείται η ανεξάρτητη πηγή έντασης J ενώ έξοδος θεωρείται η τάση κατά μήκος της αντίστασης R. Οι εξισώσεις του συστήματος από τους νόμους τάσεων και εντάσεων του Kirchhoff σε συνδυασμό με τις περιγραφικές σχέσεις των στοιχείων είναι ως εξής

$$L_1\frac{di_{L1}}{dt}=V_{C1} \tag{5.99α}$$

$$L_2\frac{di_{L2}}{dt}+V_{C2}-V_{C1}-V_R=0 \tag{5.99β}$$

$$L_3\frac{di_{L3}}{dt}+V_{C3}-V_{C4}-V_R=0 \tag{5.99γ}$$

$$L_4\frac{di_{L4}}{dt}=V_{C4} \tag{5.99δ}$$

$$V_R=R(J-i_{L2}-i_{L3}) \tag{5.99ε}$$

$$C_1\frac{dV_{C1}}{dt}+i_{L1}+i_{L2}=J \tag{5.99στ}$$

$$C_2\frac{dV_{C2}}{dt}=i_{L2} \tag{(5.99ζ}$$

$$C_3\frac{dV_{C3}}{dt}=i_{L3} \tag{5.99η}$$

$$C_4\frac{dV_{C4}}{dt}+i_{L3}+i_{L4}=J \tag{5.99θ}$$

Θεωρώντας σαν διάνυσμα κατάστασης το

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}V_{C1} & V_{C2} & V_{C3} & V_{C4} & i_{L1} & i_{L2} & i_{L3} & i_{L4}\end{bmatrix}^T \tag{5.100}$$

οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος γράφονται

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C_4} & \frac{-1}{C_4}\\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-R}{L_2} & \frac{-R}{L_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{L_3} & \frac{1}{L_3} & 0 & \frac{-R}{L_3} & \frac{-R}{L_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_4} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{C_4}\\ 0\\ \frac{R}{L_2}\\ \frac{R}{L_3}\\ 0\end{bmatrix}J \tag{5.101}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & -R & 0\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix}R\end{bmatrix}J$$

Εάν όλα τα στοιχεία έχουν μοναδιαίες τιμές εκτός του L_1 και τεθεί $a=1/L_1$, η μήτρα ελεγξιμότητος γίνεται

$$\Gamma_c=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1-a & a & a^2-2 & 3-2a-a^2 & -1+4a-a^2-a^3 & -2-4a+4a^2+a^3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2-a & 2a-3 & 1-2a+a^2 & 2+a-2a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & a-2 & 3-3a & -1+3a-a^2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1-a & -2+3a & a^2-2a \\ 0 & a & -a & a-a^2 & a^2 & a^3-2a & -2a^2+3a-a^3 & -a^4-a^3+4a^2-a \\ 1 & -1 & 0 & 2-a & 2a-3 & a^2-2a+1 & 2+a-2a^2 & -3+2a+a^2-a^3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & a-2 & 3-3a & -1+3a-a^2 & -6+2a+3a^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1-a & -2+3a \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

Καθώς

$$\det(\Gamma_c)=a(a-1)^6 \quad (5.103)$$

η περιγραφή του συστήματος είναι ελέγξιμη εκτός της τιμής L_1=1Henry και $L_1=\infty$.

Η μήτρα παρατηρησιμότητος είναι

$$\Gamma_o=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2+a & 2 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2a & 0 & 0 & -2 & 2-a & 4-a & 3 & 1 \\ 4+a-a^2 & a-4 & -3 & 4 & 2a & -7+3a & a-5 & 2 \\ -7+3a+2a^2 & 7-3a & 5-a & a-3 & -4-a+a^2 & 4-4a+a^2 & 5-4a & -4 \\ 4-8a+a^3 & -4+4a-a^2 & -5+4a & 1-4a & 7-3a-2a^2 & 5+2a-3a^2 & -1+6a-a^2 & 3-a \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

Καθώς

$$\det(\Gamma_o)=a(a-1)^4 \quad (5.105)$$

η περιγραφή του συστήματος είναι παρατηρήσιμη εκτός της τιμής L_1=1Henry και $L_1=\infty$.

Για a=1 ο ελέγξιμος υπόχωρος είναι ο χώρος που δημιουργούν τα διανύσματα στήλης της μήτρας ελεγξιμότητος

$$X_c=\text{Range}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \quad (5.106)$$

ενώ ο μη παρατηρήσιμος υπόχωρος θα είναι ο μηδενοχώρος της μήτρας παρατηρησιμότητος, ο οποίος είναι ο χώρος που δημιουργούν τα διανύσματα της μήτρας

$$X_{uo}=\text{Range}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{5.107}$$

Οι υπόχωροι X_o και X_{uc} επιλέγονται ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (5.77), (5.79) και (5.80) ως εξής.

$$X_{o}=\text{Range}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{5.108}$$

$$X_{uc}=\text{Range}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{5.109}$$

Αξίζει να τονιστεί ότι καθώς

$$(X_c \cap X_{uo})=0 \tag{5.110}$$

επιλέχθηκε ο υπόχωρος X_{uc} να περιέχει τον υπόχωρο X_{uo} και ο υπόχωρος X_o να περιέχει τον υπόχωρο X_c. Η μήτρα P του μετασχηματισμού ομοιότητος θα είναι

$$
P=\left[\begin{array}{cc:cccc:cc}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \tag{5.111}
$$

$$X_o \cap X_c \qquad X_{uo} \cap X_{uc} \qquad X_o \cap X_{uc}$$

Η περιγραφή του συστήματος στη νέα βάση του χώρου των καταστάσεων θα είναι

$$
\dot{\hat{\underline{x}}}=\left[\begin{array}{cc:cccc:cc}
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -0.5 & 0.5\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -0.5 & 0.5\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right]\hat{\underline{x}}+\begin{bmatrix}1\\0\\\cdots\\0\\0\\0\\0\\\cdots\\0\\0\end{bmatrix}J \tag{5.112α}
$$

$$
y=\left[\begin{array}{cc:cccc:cc}-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\hat{\underline{x}}+\left[1\right]J \tag{5.112β}
$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$
G(s)=C_2[sI-A_{22}]^{-1}B_2+D=\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1=\frac{s^2-s+1}{s^2+s+1} \tag{5.113}
$$

Σαν συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί ότι η αλληλοσύνδεση ελέγξιμων και παρατηρήσιμων συστημάτων μπορεί να προκαλέσει απώλεια της ελεγξιμότητος ή της παρατηρησιμότητος. Στην περίπτωση του παραδείγματος αυτό συμβαίνει για ειδικές τιμές των υποσυστημάτων (στοιχείων του κυκλώματος). Η απώλεια μπορεί να συμβεί για όλες τις τιμές των στοιχείων, όταν η αλληλοσύνδεση εισάγει μία γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών καταστάσεως των υποσυστημάτων, όπως συμβαίνει όταν συνδέονται γενικευμένοι πυκνωτές παράλληλα ή γενικευμένοι επαγωγείς σε σειρά.

5.5 Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα στο πεδίο της συχνότητας

Για την εξέταση των γραμμικών και χρονικά αμετάβλητων συστημάτων συνεχούς χρόνου είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί μετασχηματισμός Laplace στις διαφορικές εξισώσεις που τα περιγράφουν. Αντίστοιχα για τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα διακριτού χρόνου είναι δυνατόν να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Z στις εξισώσεις διαφορών που τα περιγράφουν. Αν εφαρμοστεί μετασχηματισμός Laplace στις εξισώσεις καταστάσεως (5.1) ή μετασχηματισμός Z στις εξισώσεις καταστάσεως (5.2) με μηδενικές αρχικές συνθήκες, λαμβάνεται

$$(zI\text{-}A)X(z)=BU(z) \tag{5.114α}$$

$$Y(z)=CX(z)+DU(z) \tag{5.114β}$$

όπου στη θέση της μιγαδικής μεταβλητής z αντιστοιχεί το s του μετασχηματισμού Laplace είτε το z του μετασχηματισμού Z. Οι δύο σχέσεις (5.114) μπορούν να συνδυαστούν σε μία μητρική εξίσωση ως εξής.

$$\begin{bmatrix} zI\text{-}A & B \\ \text{-}C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(z) \\ \text{-}U(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \text{-}Y(z) \end{bmatrix} \tag{5.115}$$

Ορισμός 5.7 Η μήτρα

$$P(z)=\begin{bmatrix} zI\text{-}A & B \\ \text{-}C & D \end{bmatrix} \tag{5.116}$$

καλείται μήτρα συστήματος

Στη μήτρα συστήματος υπάρχουν όλες οι πληροφορίες για το σύστημα. Οι έννοιες της ελεγξιμότητος και της παρατηρησιμότητος, οι οποίες έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμες στη θεωρία των συστημάτων και του αυτομάτου ελέγχου, φαίνεται αδύνατο να εξεταστούν στο πεδίο z, καθώς για τον ορισμό τους απαιτείται ο χρόνος ο οποίος εξαφανίζεται κατά το μετασχηματισμό. Αυτό δεν είναι αληθές και το θεώρημα 5.12 επιτρέπει τη δημιουργία κριτηρίων ελεγξιμότητος και παρατηρησιμότητος στο πεδίο z ως εξής.

Θεώρημα 5.13

α. Η περιγραφή του συστήματος είναι ελέγξιμη εάν και μόνο εάν η μήτρα

$$\Gamma_c(z)=\begin{bmatrix} zI\text{-}A & B \end{bmatrix} \tag{5.117}$$

δεν χάνει βαθμό για κανένα μιγαδικό z.

β. Η περιγραφή του συστήματος είναι παρατηρήσιμη εάν και μόνο εάν η μήτρα

$$\Gamma_o(z)=\begin{bmatrix} zI\text{-}A \\ \text{-}C \end{bmatrix} \tag{5.118}$$

δεν χάνει βαθμό για κανένα μιγαδικό z.

Απόδειξη

α. Ας θεωρηθεί σύστημα Σ το οποίο περιγράφεται από τις μήτρες A,B, I_n. Από το κριτήριο παρατηρησιμότητος η περιγραφή θα είναι πάντα παρατηρήσιμη και συνεπώς απαλοιφή πόλων-μηδενικών στη συνάρτηση μεταφοράς θα αντιστοιχεί σε μη ελέγξιμους πόλους.

Καθώς det(zI-A) είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής, η $\Gamma_c(z)$ είναι δυνατόν να χάνει βαθμό μόνο στις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, οι οποίες αντιστοιχούν στους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. Για απλότητα ας γίνει δεκτό ότι η $\Gamma_c(z)$ χάνει βαθμό για ένα πραγματικό λ. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πραγματικό διάνυσμα $\underline{a}$ τέτοιο ώστε μία γραμμή της $\underline{a}^T\ \Gamma_c(\lambda)$, έστω η πρώτη, μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη γραμμή της $\underline{a}^T\ \Gamma_c(z)$ είναι διαιρετή με το z-λ. Κατά το σχηματισμό της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος Σ θα ισχύει

$$G(z)=I_n\left[zI-A\right]^{-1}B=\left[zI-A\right]^{-1}\begin{bmatrix} a^T \\ 0\ \vdots\ I_{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a^T \\ 0\ \vdots\ I_{n-1}\end{bmatrix}B=\left[\begin{bmatrix} a^T \\ 0\ \vdots\ I_{n-1}\end{bmatrix}\left[zI-A\right]\right]^{-1}\begin{bmatrix} a^T \\ 0\ \vdots\ I_{n-1}\end{bmatrix}B \quad (5.119)$$

και ο παράγοντας z-λ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν θα εμφανίζεται στην G(z), άρα η περιγραφή δεν θα είναι ελέγξιμη.

β. Αποδεικνύεται όπως το (α).

Αξίζει να τονιστεί ότι το Θεώρημα 5.13 ισχύει και όταν

$$P(z)=\begin{bmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z)\end{bmatrix} \qquad (5.120)$$

όπου A(z), B(z), C(z), D(z) είναι πολυωνυμικές μήτρες του z, χωρίς να έχουν την ειδική μορφή της σχέσεως (5.116).

Παράδειγμα 5.7

Ας θεωρηθεί το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\underline{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}u \qquad (5.121\alpha)$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\underline{x} \qquad (5.121\beta)$$

Καθώς

$$\det(sI-A)=(s+1)^2(s+2) \qquad (5.122)$$

μόνο στα σημεία s=-1 και s=-2 ενδέχεται η μήτρα [sI-A B] να χάνει βαθμό. Επειδή

$$\operatorname{rank}\left[sI-A \quad B\right]\Big|_{s=-1}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & s+1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & s+2 & \vdots & 1\end{bmatrix}_{s=-1}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1\end{bmatrix}=3 \qquad (5.123\alpha)$$

και

$$\operatorname{rank}\left[sI-A \quad B\right]\Big|_{s=-2}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & s+1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & s+2 & \vdots & 1\end{bmatrix}_{s=-2}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1\end{bmatrix}=3 \qquad (5.123\beta)$$

η μήτρα [sI-A B] δεν χάνει βαθμό για κανένα μιγαδικό s και συνεπώς η περιγραφή είναι ελέγξιμη. Αντίστοιχα επειδή

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A \\ -C \end{bmatrix}_{s=-1} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{s=-1} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3 \qquad (5.124\alpha)$$

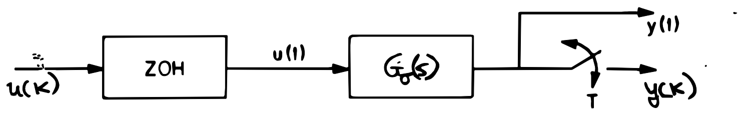
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A \\ -C \end{bmatrix}_{s=-2} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{s=-2} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3 \qquad (5.124\beta)$$

η μήτρα $\begin{bmatrix} sI-A \\ -C \end{bmatrix}$ δεν χάνει βαθμό για κανένα μιγαδικό s και συνεπώς η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.

5.6 Διακριτοποίηση και απώλεια Ελεγξιμότητος-Παρατηρησιμότητος

Για τον έλεγχο συστημάτων συνεχούς χρόνου με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή απαιτείται η κατασκευή ενός διακριτού συστήματος το οποίο να περιγράφει την απεικόνιση της ακολουθίας εξόδου του υπολογιστή με περίοδο T στα δείγματα της εξόδου, τα οποία λαμβάνονται με την ίδια περίοδο T. Η διαδικασία αυτή καλείται διακριτοποίηση.

Ας θεωρηθεί το σύστημα συνεχούς χρόνου του σχήματος 5.7, το οποίο οδηγείται από την ακολουθία u(κ) μέσω του διατηρητού (holder) μηδενικής τάξεως.
Για την συνεχή είσοδο u(t), η οποία οδηγεί το σύστημα συνεχούς χρόνου θα ισχύει.



Σχήμα 5.7 Σύστημα συνεχούς χρόνου οδηγούμενο από ακολουθία μέσω διατηρητού μηδενικής τάξεως

$$u(t) = u(\kappa) \qquad \text{για } \kappa T \le t < (\kappa+1)T \qquad (5.125)$$

Εάν θεωρηθεί ότι ο δειγματολήπτης της εξόδου συγχρονίζεται με τις χρονικές στιγμές εφαρμογής της εισόδου θα ισχύει.

$$y(\kappa) = y(\kappa T) \qquad (5.126)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της χρονικής αποκρίσεως του συνεχούς συστήματος για $\underline{x}(\kappa T) = \underline{x}(0)$ και $t=(\kappa+1)T$ και επειδή η $u(\tau)$ είναι σταθερή μεταξύ των ορίων της ολοκληρώσεως λαμβάνεται.

$$\underline{x}\left[(\kappa+1)T\right] = e^{At}\underline{x}(\kappa T) + \left[\int_0^T e^{A(t-\tau)}Bd\tau\right]\underline{u}(\kappa T) \qquad (5.127)$$

Εάν η μήτρα A είναι ομαλή, από την σχέση (5.127) λαμβάνεται.

$$\underline{x}\left[(\kappa+1)T\right]=e^{AT}\underline{x}(\kappa T)+(e^{AT}-I)A^{-1}B\underline{u}(\kappa T) \tag{5.128α}$$

ενώ για την έξοδο θα είναι.

$$\underline{y}(\kappa T)=C\underline{x}(\kappa T)+D\underline{u}(\kappa T) \tag{5.128β}$$

Οι μήτρες A_d, B_d, C_d, D_d οι οποίες περιγράφουν το διακριτοποιημένο σύστημα θα είναι.

$$A_d = e^{AT} \tag{5.129α}$$

$$B_d = (e^{AT}-I)A^{-1}B \tag{5.129β}$$

$$C_d = C \tag{5.129γ}$$

$$D_d = D \tag{5.129δ}$$

Για την ευστάθεια του διακριτοποιημένου συστήματος αξίζει να παρατηρηθεί ότι εάν λ_i, $i=1,2,\ldots,n$, είναι οι ιδιοτιμές της μήτρας A, οι ιδιοτιμές της μήτρας A_d θα είναι $e^{\lambda_i T}$. Συνεπώς εάν όλες οι ιδιοτιμές της A είναι στο αριστερό ήμισυ του μιγαδικού επιπέδου (εξασφαλίζοντας την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος συνεχούς χρόνου), οι ιδιοτιμές της A_d θα ευρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου (εξασφαλίζοντας ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος διακριτού χρόνου).

Για την ελεγξιμότητα και την παρατηρησιμότητα του διακριτοποιημένου συστήματος ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.14 Εάν το σύστημα συνεχούς χρόνου είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, το διακριτοποιημένο σύστημα θα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο εάν για κάθε ζεύγος ιδιοτιμών λ_i, λ_j της A για τις οποίες είναι

$$\mathrm{Re}(\lambda_i)=\mathrm{Re}(\lambda_j) \tag{5.130}$$

ισχύει

$$\mathrm{Im}(\lambda_i-\lambda_j) \neq \frac{2\rho\pi}{T} \tag{5.131}$$

όπου ρ είναι ακέραιος και T είναι η περίοδος της δειγματοληψίας.

Η πλήρης απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να ευρεθεί στη βιβλιογραφία (Gopal, 1984).
Το Θεώρημα 5.14 δίνει ικανή συνθήκη για τη διατήρηση της ελεγξιμότητας και της παρατηρησιμότητας του διακριτοποιημένου συστήματος. Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα έχει μία είσοδο και μία έξοδο, η συνθήκη είναι και αναγκαία. Στην περίπτωση που η μήτρα A διαγωνιοποιείται, θα διαγωνιοποιείται και η A_d, καθώς οι μήτρες A και e^{AT} έχουν το ίδιο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων. Εάν δεν ικανοποιείται η σχέση (5.131), οι διακριτές ιδιοτιμές λ_i, λ_j της A απεικονίζονται στην ίδια τιμή και συνεπώς η A_d έχει διπλή ιδιοτιμή, έστω λ. Καθώς η A_d διαγωνιοποιείται, για z=λ η μήτρα zI-A έχει βαθμό μειωμένο κατά δύο σε σχέση με την τάξη της περιγραφής. Επομένως η μήτρα [zI-A B] χάνει βαθμό για z=λ και σύμφωνα με το Θεώρημα 5.13 το διακριτοποιημένο σύστημα δεν θα είναι ελέγξιμο.

Παράδειγμα 5.8

Ας θεωρηθούν τα συστήματα τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\Sigma_1 : \quad \frac{d\underline{x}_1}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\pi^2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}_1 + \begin{bmatrix} 2.313 \\ -0.7311 \\ 1.4621 \end{bmatrix} u_1 \tag{5.132}$$

$$\Sigma_2 : \quad \frac{d\underline{x}_2}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\pi^2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}_2 + \begin{bmatrix} 0 & 2.313 \\ 0 & -0.7311 \\ 7.9463 & 1.4621 \end{bmatrix} \underline{u}_2 \tag{5.133}$$

Είναι προφανές ότι το σύστημα Σ_2 είναι το σύστημα Σ_1 στο οποίο έχει προστεθεί μία επιπλέον είσοδος.
Ο βαθμός της μήτρας ελεγξιμότητας του Σ_1 είναι.

$$\text{rank}\Gamma_c(\Sigma_1) = \text{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 2.313 & -4.626 & 9.252 \\ -0.7311 & 1.4621 & 5.0226 \\ 1.4621 & 5.0226 & -25.9376 \end{bmatrix} = 3 \tag{5.134}$$

Επομένως η περιγραφή του Σ_1 είναι ελέγξιμη και το αυτό συμβαίνει και με την περιγραφή του Σ_2.

Εάν τα συστήματα διακριτοποιηθούν με περίοδο T=1sec, θα είναι

$$\Sigma_1 : \quad \underline{x}_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0.1353 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3679 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3679 \end{bmatrix} \underline{x}_1(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(k) \tag{5.135}$$

$$\Sigma_2 : \quad \underline{x}_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0.1353 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3679 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3679 \end{bmatrix} \underline{x}_2(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}_2(k) \tag{5.136}$$

Η διακριτοποίηση του Σ_1 οδηγεί σε μη ελέγξιμη περιγραφή σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4, καθώς η μήτρα A_d είναι διαγώνια και το δεύτερο στοιχείο του διανύσματος B_d είναι μηδενικό.

Η διακριτοποίηση του Σ_2 οδηγεί σε ελέγξιμη περιγραφή σύμφωνα με το Θεώρημα 5.13, καθώς

$$\text{rank}\begin{bmatrix} zI-A_d & B_d \end{bmatrix}\Big|_{z=0.1353} = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5032 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5032 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \tag{5.137α}$$

$$\text{rank}\begin{bmatrix} zI-A_d & B_d \end{bmatrix}\Big|_{z=-0.3679} = \text{rank}\begin{bmatrix} -0.5032 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \tag{5.137β}$$

και μήτρα $[zI-A_d \quad B_d]$ δεν χάνει βαθμό για κανένα μιγαδικό z.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Μάρτιος 2005)
Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη θέρμανση ενός δωματίου είναι οι εξής:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.4 & 0.7\\ 0.7 & -35.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 35\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0.7\\ 0\end{bmatrix}w$$

$$y=x_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

όπου,

x_1: θερμοκρασία του δωματίου.
x_2: θερμοκρασία του θερμαντικού σώματος.
u: θερμοκρασία του υγρού που κυκλοφορεί στο θερμαντικό σώμα.
w: θερμοκρασία του περιβάλλοντος, η οποία θεωρείται σαν διαταραχή.

α) Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα της περιγραφής.
β) Αγνοώντας τη διαταραχή, να εκφραστεί ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου συναρτήσει του μετασχηματισμού Laplace της εισόδου και των αρχικών συνθηκών.
γ) Εάν σαν είσοδος θεωρηθεί η $u=r-Kx_1$ να βρεθεί για ποιές τιμές του K το αντισταθμισμένο σύστημα παραμένει ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση
Α) Η μήτρα ελεγξιμότητας είναι

$$P_c=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 24.5\\ 35 & -1249.5\end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_c)=2, η περιγραφή είναι ελέγξιμη.
Η μήτρα παρατηρησιμότητας είναι

$$P_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1.4 & 0.7\end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_o)=2, η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.

Β) Θα είναι

$$s\underline{X}(s)-\underline{x}(0)=A\underline{X}(s)+BU(s)$$

ή

$$\underline{X}(s)=[sI-A]^{-1}\underline{x}(0)+[sI-A]^{-1}BU(s)$$

και

$$Y(s)=C[sI-A]^{-1}\underline{x}(0)+C[sI-A]^{-1}BU(s)$$

Καθώς

$$[sI-A]^{-1}=\frac{1}{(s+1.4)(s+35.7)-0.7^2}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+37.1s+49.49}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}$$

$$Y(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{(s^2+37.1s+49.49}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}U(s)+\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s^2+37.1s+49.49}\begin{bmatrix} s+35.7 & 0.7 \\ 0.7 & s+1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{24.5}{(s^2+37.1s+49.49}U(s)+\frac{s+35.7}{s^2+37.1s+49.49}x_1(0)+\frac{0.7}{s^2+37.1s+49.49}x_2(0)$$

Γ) Εάν

$$u=r-Kx_1$$

οι εξισώσεις καταστάσεως γίνονται

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.7 & -35.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}\left(r - Kx_1\right)+\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}w =$$

$$=\begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.7-35K & -35.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \end{bmatrix}r+\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}w =$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της περιγραφής θα είναι

$$\psi_c(s)=\det[sI-A_c]=\det\begin{bmatrix} s+1.4 & -0.7 \\ 35K-0.7 & s+35.7 \end{bmatrix}=s^2+37.1s+49.49+24.5K$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^2	1	49.49+24.5K
s	37.1	
s^0	49.49+24.5K	

Για να παραμένει το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει

$$0<49.49+24.5K$$

ή ισοδύναμα

$$-2.02<K$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Σεπτέμβριος 2005)

Δίδεται η περιγραφή ενός συστήματος συνεχούς χρόνου:

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u(t),\ \ x(0)=x_0,\quad x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix},$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix}x(t)$$

α) Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα της περιγραφής.

β) Να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$.

γ) Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια η περιγραφή του συστήματος.

δ) Αν εφαρμοσθεί ο νόμος ελέγχου,

$$u(t)=r(t)-F_1x_1(t)-F_2x_2(t)$$

με r(t) μια είσοδο αναφοράς και F_1, F_2 πραγματικούς αριθμούς, να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του αντισταθμισμένου συστήματος.

ε) Να εξετασθεί για ποιές τιμές των F_1, F_2 του ερωτήματος (δ), το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Επίσης, να δειχθεί ότι αν $F_1=-2F_2$, δεν είναι δυνατόν να ευσταθειοποιηθεί το δοθέν σύστημα για οποιαδήποτε τιμή του F_1.

Λύση

Α) Η μήτρα ελεγξιμότητας είναι

$$P_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

Επειδή βαθμός(P_c)=3, η περιγραφή είναι ελέγξιμη.

Η μήτρα παρατηρησιμότητας είναι

$$P_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

Επειδή det(P_o)=12, βαθμός(P_o)=3 και η περιγραφή είναι παρατηρήσιμη.

Β) Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$G(s)=C[sI-A]^{-1}BU(s)=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ -2 & -1 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s[s(s+2)-1]-2}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{2M_{13}-M_{23}}{(s+2)(s^2-1)}$$

Είναι

$$M_{13}(s)=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ s & -1\end{vmatrix}=1\qquad M_{23}(s)=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}s & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=s$$

$$G(s)=\frac{-(s-2)}{(s+2)(s-1)(s+1)}$$

Γ) Για την ευστάθεια εξετάζονται οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\psi(s)=\det[sI-A]=(s+1)(s-1)(s+2)$$

Καθώς το ψ(s) έχει τη ρίζα s=1^{η} οποία βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, η περιγραφή του συστήματος είναι ασταθής.

Δ) Η περιγραφή του συστήματος μετά την εφαρμογή του νόμου ελέγχου θα είναι

$$\dot{\underline{x}}=A\underline{x}+B(r-F\underline{x})=(A-BF)\underline{x}+Br \quad y=C\underline{x}$$

όπου

$$F=\begin{bmatrix}F_1 & F_2 & 0\end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις καταστάσεως γίνονται

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2-F_1 & 1-F_2 & -2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}r(t)$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix}x(t)$$

Ε) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντισταθμισμένου συστήματος θα είναι

$$\psi_c(s)=\det[sI-A_c]=\det\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ F_1-2 & F_2-1 & s+2\end{bmatrix}=s[s(s+2)+F_2-1]+F_1-2=s^3+2s^2+(F_2-1)s+F_1-2$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh

s^3	1	F_2-1
s^2	2	F_1-2
s	$[2(F_2-1)-F_1+2]/2$	
s^0	F_1-2	

Καθώς 1>0 και 2>0, για να είναι το αντισταθμισμένο σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει

$$[2(F_2-1)-F_1+2]/2=2F_2-F_1>0 \text{ και}$$
$$F_1-2>0$$

ή ισοδύναμα

$$2F_2-F_1>2>0$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι τα F_2,F_1 πρέπει να είναι θετικά. Εάν $F_1=-2F_2$, τα F_2,F_1 είναι ετερόσημα και δεν είναι δυνατόν να ικανοποιείται η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ασυμπτωτική ευσταθειοποίηση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (Πρόσθετη Εξέταση Νοέμβριος 2005)
Το μοντέλο ενός συστήματος στη βιομηχανία σιδήρου συνδέει το πάχος hτου προϊόντος με την τάση του σ ως εξής

$$\dot{h}+\eta\dot{\sigma}=(1-2\eta)h-3\eta\sigma+0.94u$$

$$a\dot{h}+4.25\dot{\sigma}=(a-\delta)h-12\sigma+4.75u$$

όπου σαν είσοδος λαμβάνεται η τάση u διέγερσης του κινητήρα, a,δ,η είναι παράμετροι και μετράται το πάχος h.

1. Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως ως προς το διάνυσμα $x=[h \;\; \sigma]^T$.
2. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς.
3. Να προσδιοριστούν οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν τα a,δ,η ώστε το σύστημα να είναι μη ελέγξιμο ή μη παρατηρήσιμο.

Λύση
1. Οι εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$E\dot{x}=A_1x+B_1u$$

όπου

$$E=\begin{bmatrix}1 & \eta\\ a & 4.25\end{bmatrix} \qquad A_1=\begin{bmatrix}1-2\eta & -3\eta\\ a-\delta & -12\end{bmatrix} \qquad B_1=\begin{bmatrix}0.94\\ 4.75\end{bmatrix}$$

Θα είναι

$$\dot{x}=E^{-1}A_1x+E^{-1}B_1u=\frac{1}{4.25-a\eta}\begin{bmatrix}4.25 & -\eta\\ -a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-2\eta & -3\eta\\ a-\delta & -12\end{bmatrix}x+\frac{1}{4.25-a\eta}\begin{bmatrix}4.25 & -\eta\\ -a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.94\\ 4.75\end{bmatrix}u=$$

$$=\frac{1}{4.25-a\eta}\begin{bmatrix}4.25-8.5\eta-\eta a+\eta\delta & -0.75\eta\\ 2\eta a-\delta & 3a\eta-12\end{bmatrix}x+\frac{1}{4.25-a\eta}\begin{bmatrix}3.995-4.75\eta\\ 4.75-0.94a\end{bmatrix}u=$$

$$y=Cx=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

2. Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$G(s)=C[sI-A]^{-1}B=C[sE^{-1}E-E^{-1}A_1]^{-1}E^{-1}B_1=C[sE-A_1]^{-1}EE^{-1}B_1=C[sE-A_1]^{-1}B_1$$

οπότε

$$G(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1+2\eta & \eta s+3\eta\\ as-a+\delta & 4.25s+12\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.94\\ 4.75\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\left\{(s-1+2\eta)(4.25s+12)-(\eta s+3\eta)(as-a+\delta)\right\}}\begin{bmatrix}4.25s+12 & -\eta s-3\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.94\\ 4.75\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{(3.995-4.75\eta)s+(11.28-14.25\eta)}{\left\{(4.25-a\eta)s^2+(7.75-2\eta a+8.5\eta-\delta\eta)s+(-12+24\eta-3\eta\delta+3\eta a)\right\}}$$

3. Το σύστημα θα είναι μη ελέγξιμο ή μη παρατηρήσιμο εάν υπάρχει κοινός παράγοντας μεταξύ των πολυωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή της G(s). Καθώς ο αριθμητής είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, η ρίζα του

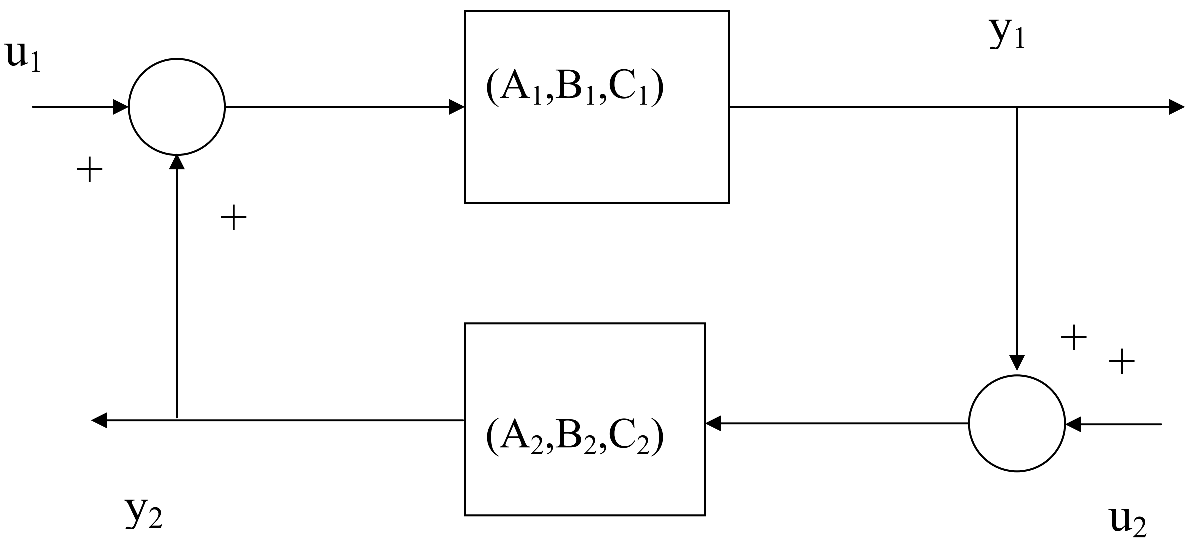
$$s = -\frac{(11.28\text{-}14.25\eta)}{(3.995\text{-}4.75\eta)}$$

πρέπει να είναι και ρίζα του παρονομαστή. Συνεπώς η ζητούμενη σχέση είναι

$$(4.25\text{-}a\eta)\left(\frac{11.28\text{-}14.25\eta}{-3.995\text{+}4.75\eta}\right)^2 + (7.75\text{-}2\eta a\text{+}8.5\eta\text{-}\delta\eta)\left(\frac{11.28\text{-}14.25\eta}{-3.995\text{+}4.75\eta}\right) + (\text{-}12\text{+}24\eta\text{-}3\eta\delta\text{+}3\eta a)=0$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο ανωτέρω Σχήμα τα συστήματα Σ_1, Σ_2 περιγράφονται σε μορφή εξισώσεων καταστάσεως από τις τριάδες των μητρών (A_1,B_1,C_1) και (A_2,B_2,C_2).



A) Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του συνολικού συστήματος.

B) Να αποδειχθεί ότι το ολικό σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο εάν και μόνο εάν τα Σ_1,Σ_2 είναι ελέγξιμα και παρατηρήσιμα.

Γ) Εάν $u_2 \equiv 0$ (καταργείται σαν είσοδος) να δειχθεί (μπορεί να χρησιμοποιηθεί και παράδειγμα) ότι η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα των Σ_1,Σ_2 είναι αναγκαία συνθήκη για την ελεγξιμότητα και την παρατηρησιμότητα του ολικού συστήματος αλλά όχι ικανή.

Λύση

Για το σύστημα Σ_1 θα ισχύει

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1(u_1 + y_2) = A_1x_1 + B_1u_1 + B_1C_2x_2$$

Για το σύστημα Σ_2 θα ισχύει

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (u_2 + y_1) = A_2 x_2 + B_2 u_2 + B_2 C_1 x_1$$

Θεωρώντας

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} x$$

B) Για την απόδειξη της πρότασης θα χρησιμοποιηθούν τα ακόλουθα λήμματα.
Λήμμα 1: Μπορεί να γραφεί

$$(A+BF)^k B = A^k B + A^{k-1} B M_{1,k} B + A^{k-2} B M_{2,k} B + \ldots + B M_{k,k} B$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.
Για k=1 είναι

$$(A+BF)B = AB + BFB = AB + BM_{1,1}B$$

Ας υποτεθεί ότι η σχέση ισχύει για k-1, δηλαδή

$$(A+BF)^{k-1} B = A^{k-1} B + A^{k-2} B M_{1,k-1} B + A^{k-3} B M_{2,k-1} B + \ldots + B M_{k-1,k-1} B$$

Θα είναι

$$\begin{aligned} &(A+BF)^k B = (A+BF)(A+BF)^{k-1} B = \\ &A^k B + A^{k-1} B M_{1,k-1} B + A^{k-2} B M_{2,k-1} B + \ldots + AB M_{k-1,k-1} B + \\ &BFA^{k-1} B + BFA^{k-2} B M_{1,k-1} B + BFA^{k-3} B M_{2,k-1} B + \ldots + BFB M_{k-1,k-1} B \end{aligned}$$

και η σχέση ισχύει με

$$\begin{aligned} &M_{i,k-1} = M_{i,k} \quad i=1,2,\ldots,k-1 \\ &M_{k,k} = FA^{k-1} + FA^{k-2} B M_{1,k-1} + FA^{k-3} B M_{2,k-1} + \ldots + FB M_{k-1,k-1} \end{aligned}$$

Λήμμα 2: Το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο εάν και μόνο εάν το ζεύγος (A+BF,B) είναι ελέγξιμο
Απόδειξη
Η μήτρα ελεγξιμότητος του ζεύγους (A+BF,B) γράφεται με χρήση και του λήμματος 1

$$\begin{bmatrix} B & (A+BF)B & (A+BF)^2 B & \cdots & (A+BF)^{n-1} B \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \cdots & A^{n-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M_{1,1} & M_{2,2}B & \cdots & M_{n-1,n-1}B \\ 0 & I & M_{1,2} & \cdots & M_{n-2,n-1}B \\ 0 & 0 & I & \cdots & M_{n-3,n-1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}$$

Καθώς η δεξιά μήτρα στο δεύτερο μέλος είναι ομαλή, θα είναι

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & (A+BF)B & (A+BF)^2B & \cdots & (A+BF)^{n-1}B \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

και το λήμμα απεδείχθη.

Για την απόδειξη του (Β) ας θεωρηθεί ότι στο σύστημα κλειστού βρόχου εφαρμόζεται η μήτρα

$$F=\begin{bmatrix} 0 & -C_2 \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η μήτρα A+BF θα είναι

$$A+BF=\begin{bmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -C_2 \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Για τη μήτρα ελεγξιμότητος θα ισχύει

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & (A+BF)B & \cdots & (A+BF)^{n-1}B \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_2 & A_2B_2 & \cdots & A_2^{n-1}B_2 \end{bmatrix}$$

Για να είναι το σύστημα κλειστού βρόχου ελέγξιμο πρέπει και αρκεί η τελευταία μήτρα να έχει ανεξάρτητες γραμμές και αυτό είναι δυνατόν εάν και μόνον εάν τα συστήματα Σ_1 και Σ_2 είναι ελέγξιμα.
Η απόδειξη της παρατηρησιμότητας είναι άμεση καθώς η παρατηρησιμότητα του ζεύγους (A,C) είναι ισοδύναμη με την ελεγξιμότητα του ζεύγους (A^T,C^T).
Γ) Η αναγκαιότητα της υπόθεσης είναι προφανής, καθώς κατάργηση της u_2 είναι ισοδύναμη με τη διατήρησή της και μηδενισμό της για κάθε χρονική στιγμή.
Για την ικανότητα, είναι δυνατόν να θεωρηθεί το σύστημα με $A_1=A_2=B_1=B_2=C_2=1$, $C_1=0$. Τότε

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

Αν και τα ζεύγη (A_1,B_1) και (A_2,B_2) είναι ελέγξιμα, το ζεύγος (A,B) δεν είναι ελέγξιμο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Διακριτό σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$
$$y(k)=Cx(k)$$

Α) Να ευρεθεί η συνθήκη ώστε να είναι δυνατή η μετάβαση από το σημείο x(0) σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου κατάστασης με κατάλληλη επιλογή της εισόδου.

Β) Να δειχθεί ότι εάν n είναι η διάσταση του χώρου καταστάσεων για την μετάβαση αυτή, εάν είναι δυνατή, δεν απαιτούνται περισσότερα από n βήματα.

Γ) Να ευρεθεί ο ελάχιστος αριθμός βημάτων για να επιτυγχάνεται πάντα αυτή η μετάβαση.

Δ) Να προσδιοριστεί η u(κ) η οποία μεταφέρει το διάνυσμα καταστάσεως από τη θέση $[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ στη θέση $[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&3&1&1\\0&0&0&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Λύση

Α) Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις καταστάσεως διαδοχικά, προκύπτει

$$\underline{x}(k)=A^k\underline{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}B\underline{u}(i) = A^k\underline{x}(0)+\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u}(k-1)\\\underline{u}(k-2)\\\underline{u}(k-3)\\\vdots\\\underline{u}(0)\end{bmatrix}$$

Για να μπορεί να είναι το x(k) οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου κατάστασης, η εξίσωση

$$\underline{x}(k)-A^k\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u}(k-1)\\\underline{u}(k-2)\\\underline{u}(k-3)\\\vdots\\\underline{u}(0)\end{bmatrix}$$

πρέπει να έχει πάντοτε λύση, δηλαδή

$$\text{rank}\left\{\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B\end{bmatrix}\right\}=n$$

όπου n είναι η διάσταση του χώρου καταστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι σε k βήματα έχει επιτευχθεί το διάνυσμα x(k).

Β) Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα των Cayley-Hamilton, επειδή οι μήτρες A^{n+j}, j=0,1,… μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των μητρών I,A, ..., A^{n-1}, δεν απαιτείται να θεωρηθεί k μεγαλύτερο του n και η συνθήκη για την επίτευξη οιουδήποτε σημείου του χώρου κατάστασης είναι

$$\text{rank}\left\{\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\right\}=n$$

Γ) Έστω λ ο ελάχιστος ακέραιος ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\mathrm{rank}\left\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{\lambda-1}B \end{bmatrix}\right\}=n$$

Ο αριθμός αυτός μπορεί να ευρεθεί προσδιορίζοντας διαδοχικά τους βαθμούς των μητρών [B], [B AB], [B AB A^2B] κλπ μέχρις ότου ευρεθεί μήτρα πλήρους βαθμού. Είναι προφανές ότι σε λ βήματα είναι δυνατόν να επιτευχθεί οιοδήποτε σημείο του χώρου κατάστασης.

Δ) Είναι

$$\mathrm{Rank}\{[B]\}=2$$

$$\mathrm{rank}\left\{\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}\right\}=\mathrm{rank}\left\{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&2\\0&0\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&2\\3&7\\0&1\\2&4\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right\}=4$$

Συνεπώς λ=2 και το σημείο $[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$ μπορεί να επιτευχθεί σε δύο βήματα. Θα είναι

$$\underline{x}(k)\text{-}A^k\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&2\\0&0\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&2\\3&7\\0&1\\2&4\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(1)\\u_2(1)\\u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτει

$$\begin{bmatrix}u_1(1)\\u_2(1)\\u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\1&2&3&7\\0&0&0&1\\0&1&2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1&-2\\-2&0&0&1\\1&0&-2&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα δύο δοχείων είναι οι εξής:

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=A\underline{x}+Bu(t)=\begin{bmatrix}-0.0197&0\\0.0178&-0.0129\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0263\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=x_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Α) Να γραφούν οι εξισώσεις του διακριτού συστήματος που προκύπτει από τη δειγματοληψία του με περίοδο Τ=12 και χρήση διατηρητή μηδενικής τάξεως.

Β) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς του διακριτού συστήματος.

Γ) Να εξεταστεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα του διακριτού συστήματος συναρτήσει του Τ.

Δ) Να ευρεθεί η χρονική απόκριση του συστήματος συνεχούς χρόνου και του συστήματος διακριτού χρόνου σε βηματική διέγερση και να συγκριθούν ως προς το σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

Λύση

Α) Οι εξισώσεις του διακριτοποιημένου συστήματος θα είναι

$$x_d(k+1)=A_d x_d+B_d u(k)=e^{AT}x_d+(e^{AT}-I)A^{-1}Bu(k)$$

όπου T είναι η περίοδος της δειγματοληψίας.

Για την εύρεση της e^{At} χρησιμοποιείται το θεώρημα των Caley-Hamilton. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι

$$\psi(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix} s+0.0197 & 0 \\ -0.0178 & s+0.0129 \end{bmatrix}=(s+0.0197)(s+0.0129)$$

Από την

$$e^{st}=a_0+a_1 s$$

για s=-0.0197 και s=-0.0129 λαμβάνεται το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} e^{-0.0197t} \\ e^{-0.0129t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -0.0197 \\ 1 & -0.0129 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

από το οποίο προκύπτει

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{0.0197e^{-0.0129t}-0.0129e^{-0.0197t}}{0.0068} \\ \dfrac{e^{-0.0129t}-e^{-0.0197t}}{0.0068} \end{bmatrix}$$

και

$$e^{At}=a_0 I+a_1 A=\begin{bmatrix} e^{-0.0197t} & 0 \\ 2.62(e^{-0.0129t}-e^{-0.0197t}) & e^{-0.0129t} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$A_d=e^{AT}=\begin{bmatrix} e^{-0.0197x12} & 0 \\ 2.62(e^{-0.0129x12}-e^{-0.0197x12}) & e^{-0.0129x12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.79 & 0 \\ 0.18 & 0.86 \end{bmatrix}$$

$$B_d=\left(e^{AT}-I\right)A^{-1}B==\begin{bmatrix} -0.21 & 0 \\ 0.18 & -0.14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.0197 & 0 \\ 0.0178 & -0.0129 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.282 \\ 0.0297 \end{bmatrix}$$

Β) Η συνάρτηση μεταφοράς του διακριτοποιημένου συστήματος θα είναι

$$G_d(z)=C[zI-A_d]^{-1}B_d=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-0.79 & 0\\ -0.18 & z-0.86\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.282\\ 0.0297\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z-0.79} & 0\\ \dfrac{0.18}{(z-0.79)(z-0.86)} & \dfrac{1}{z-0.86}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.282\\ 0.0297\end{bmatrix}=\frac{0.03z+0.026}{(z-0.79)(z-0.86)}$$

Γ) Για την ελεγξιμότητα του διακριτοποιημένου συστήματος εξετάζεται ο βαθμός της μήτρας

$$P_c=\begin{bmatrix}B_d & A_dB_d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(e^{AT}-I\right)A^{-1}B & e^{AT}\left(e^{AT}-I\right)A^{-1}B\end{bmatrix}$$

Καθώς οι μήτρες e^{At} και $(e^{At}-I)A^{-1}$ αντιμετατίθενται, η μήτρα ελεγξιμότητας γράφεται.

$$P_c=\left(e^{AT}-I\right)A^{-1}\begin{bmatrix}B & e^{AT}B\end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές της μήτρας e^{At} είναι $e^{-0.0197t}$ και $e^{-0.0129t}$. Καθώς για κάθε $t>0$, $e^{-0.0197t}<1$ και $e^{-0.0129t}<1$, οι ιδιοτιμές της $e^{At}-I$, οι οποίες είναι $e^{-0.0197t}-1$ και $e^{-0.0129t}-1$ δεν μηδενίζονται και συνεπώς η μήτρα $e^{At}-I$ είναι ομαλή και θα έχει βαθμό ίσο με δύο. Επομένως το σύστημα θα είναι ελέγξιμο εάν και μόνο εάν

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & e^{AT}B\end{bmatrix}=2$$

Για να χάνει βαθμό η τελευταία μήτρα πρέπει

$$e^{At}B=\lambda B$$

δηλαδή το B πρέπει να είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας e^{At}. Καθώς τα ιδιοδιανύσματα της e^{At} ταυτίζονται με τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A, το διακριτοποιημένο σύστημα θα είναι ελέγξιμο εάν και μόνο εάν

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=2\,.$$

Η τελευταία είναι η συνθήκη ελεγξιμότητας του συστήματος συνεχούς χρόνου και το διακριτοποιημένο σύστημα θα είναι ελέγξιμο για κάθε T.
Αξίζει να τονιστεί ότι στη γενική περίπτωση ελεγξιμότητα του συστήματος συνεχούς χρόνου δεν συνεπάγεται την ελεγξιμότητα του διακριτοποιημένου συστήματος.

Δ) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος συνεχούς χρόνου θα είναι

$$G(s)=C[sI-A]^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+0.0197 & 0\\ -0.0178 & s+0.0129\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.0263\\ 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+0.0197} & 0\\ \dfrac{0.0178}{(s+0.0197)(s+0.0129)} & \dfrac{1}{s+0.0129}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0263\\ 0\end{bmatrix}=\frac{4.68\times10^{-4}}{(s+0.0197)(s+0.0129)}$$

Για την τελική τιμή της εξόδου σε βηματική διέγερση, εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνεται

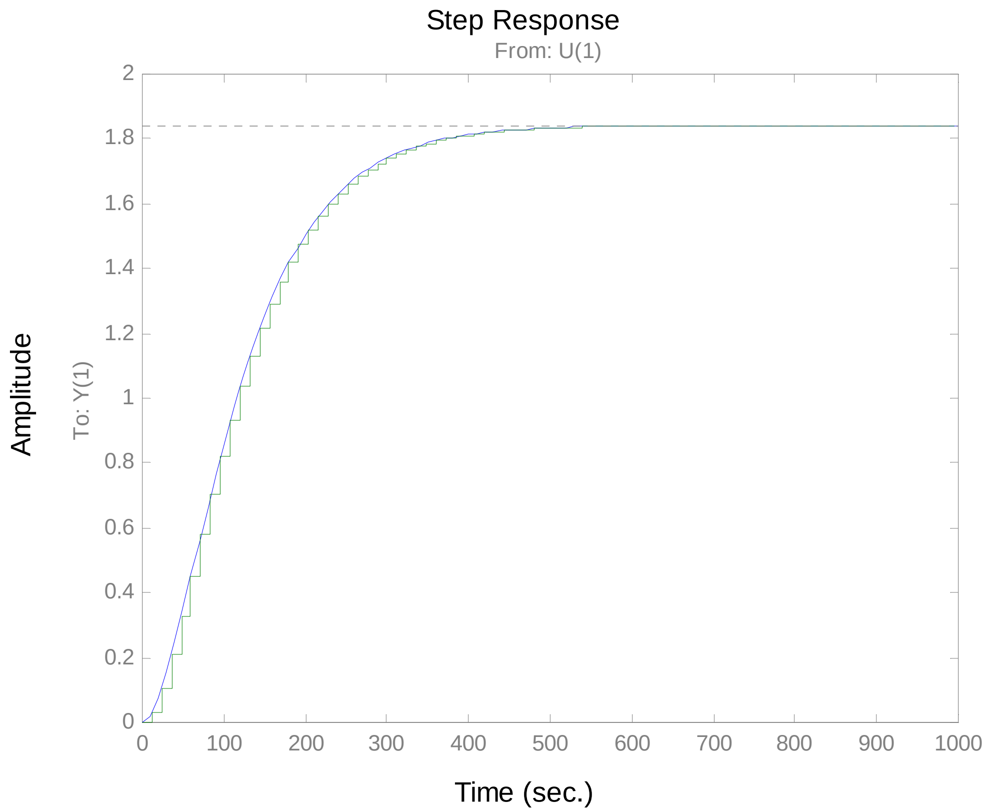
$$y_{ss}(\beta\eta\mu)=\lim_{t\to\infty}\left\{y(t)\right\}\Big|_{u(t)=U(t)}=\lim_{s\to 0}\left\{sY(s)\right\}=\lim_{s\to 0}\left\{sG(s)\frac{1}{s}\right\}=G(0)=\frac{4.68\mathrm{x}10^{-4}}{(0.0197)(0.0129)}=1.8415$$

Για την τελική τιμή της εξόδου του διακριτοποιημένου συστήματος σε βηματική διέγερση,εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής του μετασχηματισμού *Z*, λαμβάνεται

$$\lim_{k\to\infty}\left\{y_d(kT)\right\}\Big|_{u(kT)=U(kT)}=\lim_{z\to 1}\left\{(1\text{-}z^{-1})Y_d(z)\right\}=\lim_{z\to 1}\left\{(1\text{-}z^{-1})G_d(z)\frac{z}{z\text{-}1}\right\}=$$

$$=G_d(1)=\frac{0.056}{(0.21)(0.14)}=1.904$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται οι βηματικές αποκρίσεις του συστήματος συνεχούς χρόνου και του διακριτοποιημένου συστήματος. Οι τελικές τιμές προκύπτουν ίσες. Η διαφορά που εμφανίστηκε οφείλεται στις στρογγυλεύσεις κατά τη διακριτοποίηση του συστήματος.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίδεται η περιγραφή ενός συστήματος συνεχούς ή διακριτού χρόνου:

$$\left\{\begin{array}{c}\underline{\dot{x}}(t)=A\underline{x}(t)+B\underline{u}(t)\\ \underline{y}(t)=C\underline{x}(t)\end{array}\right\} \quad \acute{\eta} \quad \left\{\begin{array}{c}\underline{x}(k+1)=A\underline{x}(k)+B\underline{u}(k)\\ \underline{y}(k)=C\underline{x}(k)\end{array}\right\}$$

α) Να γραφεί η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς

$$G(\lambda)=C[\lambda I-A]^{-1}B=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{G_i}{\lambda^i} \quad \text{για} \quad \lambda=s \text{ ή } z$$

και να προσδιοριστούν οι συντελεστές G_i.

β) Σχηματίζεται η μήτρα με άπειρο αριθμό γραμμών και στηλών

$$H=\begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots & G_\nu & \cdots \\ G_2 & G_3 & G_4 & \cdots & G_{\nu+1} & \cdots \\ G_3 & G_4 & G_5 & \cdots & G_{\nu+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ G_\nu & G_{\nu+1} & G_{\nu+2} & \cdots & G_{2\nu-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Να δειχθεί ότι ο βαθμός της H είναι πεπερασμένος και να ευρεθεί η τιμή του.

Λύση

α) Θα είναι

$$G(\lambda)=C\left[\lambda(I-\frac{A}{\lambda})\right]^{-1}B=\frac{1}{\lambda}C\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{i}B=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{CA^{i-1}B}{\lambda^i} \tag{1}$$

Η σύγκλιση της σειράς εξασφαλίζεται όταν το μέτρο του λ είναι μεγαλύτερο από το μέτρο οποιασδήποτε ιδιοτιμής της μήτρας A, η σειρά δηλαδή συγκλίνει στο εξωτερικό ενός κύκλου με κέντρο την αρχή. Η σειρά αυτή καλείται σειρά Laurent στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων και θα είναι

$$G_i=CA^{i-1}B \tag{2}$$

β) Η μήτρα H μπορεί να γραφεί

$$H=\begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \cdots & CA^{\nu-1}B & \cdots \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \cdots & CA^{\nu}B & \cdots \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \cdots & CA^{\nu+1}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ CA^{\nu-1}B & CA^{\nu}B & CA^{\nu+1}B & \cdots & CA^{2\nu-2}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \\ \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{\nu-1}B & \cdots \end{bmatrix}=\Gamma_o\Gamma_c \tag{3}$$

Η μήτρα H καλείται μήτρα Hankel και είναι ίση με το γινόμενο της μήτρας παρατηρησιμότητας επί τη μήτρα ελεγξιμότητας.
Εάν το σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, θα είναι

$$\mathrm{rank}(\Gamma_o)=\mathrm{rank}(\Gamma_c) = n \qquad (4)$$

όπου n είναι η τάξη της περιγραφής. Για το βαθμό του γινομένου δύο μητρών X,Y ισχύει η ακόλουθη σχέση του Sylvester.

$$\mathrm{rank}(X) + \mathrm{rank}(Y) - r \le \mathrm{rank}(XY) \le \mathrm{Min}\left\{\mathrm{rank}(X),\mathrm{rank}(Y)\right\} \qquad (5)$$

όπου r είναι ο αριθμός στηλών της X ο οποίος είναι ίσος με τον αριθμό γραμμών της Y. Εφαρμόζοντας τη σχέση (5) στην H και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4) λαμβάνεται

$$\mathrm{rank}(\Gamma_o)+\mathrm{rank}(\Gamma_c) - n=n \le \mathrm{rank}(\Gamma_o\Gamma_c)=\mathrm{rank}(H) \le \mathrm{Min}\left\{\mathrm{rank}(\Gamma_o),\mathrm{rank}(\Gamma_c)\right\} = n \qquad (6)$$

Επομένως

$$\mathrm{rank}(H) = n \qquad (7)$$

δηλαδή είναι ίσος με την τάξη της περιγραφής του ελέγξιμου και παρατηρήσιμου συστήματος το οποίο πραγματοποιεί την G(s).
Εάν το αρχικό σύστημα δεν είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, στην G(s) συμβάλλει μόνο το ελέγξιμο και παρατηρήσιμο υποσύστημά του και συνεπώς ο βαθμός της μήτρας H θα είναι ίσος με την τάξη του ελέγξιμου και παρατηρήσιμου υποσυστήματος, δηλαδή

$$\mathrm{rank}(H) = n_2=n_{co} \qquad (8)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Υποβρύχιο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα όταν αντιλαμβάνεται την ύπαρξη πλοίου στόχου με το παθητικό σόναρ του με το οποίο μπορεί να μετράται η διόπτευση του στόχου αλλά όχι η απόστασή του. Γίνεται δεκτό ότι και το πλοίο στόχος κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα.

1. Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως οι οποίες περιγράφουν τις κινήσεις του υποβρυχίου και του πλοίου στόχου.
2. Να γραμμικοποιηθούν οι εξισώσεις του ερωτήματος 1.
3. Να δειχθεί ότι δεν μπορεί να παρατηρηθεί η θέση και η ταχύτητα του πλοίου στόχου με τη μέτρηση της γωνίας διόπτευσης, της θέσης και της ταχύτητας του υποβρυχίου.
4. Να δειχθεί ότι για να συγκρουστούν δύο σώματα τα οποία κινούνται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα πρέπει και αρκεί η διόπτευση του ενός ως προς το άλλο να παραμένει σταθερή κατά την κίνηση.
5. Εάν κατά την κίνηση του υποβρυχίου η διόπτευση παρέμενε σταθερή θα εκτοξεύατε τορπίλη εάν
   α) το βεληνεκές της ήταν απεριόριστο; Εάν η απάντηση είναι καταφατική να προσδιορίσετε τη γωνία εκτόξευσης ως προς τη γραμμή κίνησης του υποβρυχίου.
   β) το βεληνεκές της είναι 10 χιλιόμετρα.

Λύση

1. Ας θεωρηθεί ως άξονας των τετμημένων x η ευθεία επάνω στην οποία κινείται το υποβρύχιο και έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 το υποβρύχιο ευρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Έστωσαν

x_1 : η θέση του υποβρυχίου
x_2 : η ταχύτητα του υποβρυχίου
x_3 : η τετμημένη της θέσης του πλοίου στόχου
x_4 : η ταχύτητα της τετμημένης της θέσης του πλοίου στόχου
x_5 : η τεταγμένη της θέσης του πλοίου στόχου
x_6 : η ταχύτητα της τεταγμένης της θέσης του πλοίου στόχου

Καθώς στο σύστημα δεν επενεργούν είσοδοι, θα είναι

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Από το υποβρύχιο μετράται η θέση και η ταχύτητά του καθώς και η διόπτευση του στόχου. Συνεπώς θα είναι

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \text{τοξεφ}\left(\dfrac{x_5}{x_3\text{-}x_1}\right) \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Για τη γραμμικοποίηση του συστήματος το σημείο ισορροπίας είναι

$$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} x_{10} & 0 & x_{20} & 0 & x_{30} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \delta y_3 &= \frac{\partial \text{τοξεφ}\left(\dfrac{x_5}{x_3\text{-}x_1}\right)}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \text{τοξεφ}\left(\dfrac{x_5}{x_3\text{-}x_1}\right)}{\partial x_3}\delta x_3 + \frac{\partial \text{τοξεφ}\left(\dfrac{x_5}{x_3\text{-}x_1}\right)}{\partial x_5}\delta x_5 = \\ &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{x_5}{x_3\text{-}x_1}\right)^2}\left\{\frac{x_5}{(x_3\text{-}x_1)^2}\delta x_1 + \frac{\text{-}x_5}{(x_3\text{-}x_1)^2}\delta x_3 + \frac{1}{x_3\text{-}x_1}\delta x_5\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

x_{10}=0 και $x_{30}^2 + x_{50}^2 = D_0^2$, η σχέση (4) γράφεται

$$\delta y_3 = \frac{x_{50}}{D_0^2}\delta x_1 - \frac{x_{50}}{D_0^2}\delta x_3 + \frac{x_{30}}{D_0^2}\delta x_5 = \frac{\text{ημ}^2\varphi}{x_{50}}\delta x_1 - \frac{\text{ημ}^2\varphi}{x_{50}}\delta x_3 + \frac{\text{ημφσυνφ}}{x_{50}}\delta x_5 \tag{5}$$

όπου φ η διόπτευση του πλοίου στόχου. Οι εξισώσεις του γραμμικοποιημένου συστήματος θα είναι

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \\ \delta x_5 \\ \delta x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \\ \delta x_5 \\ \delta x_6 \end{bmatrix} \tag{6α}$$

$$\underline{\hat{y}} = \begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \delta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta\mu^2\varphi}{x_{50}} & 0 & -\frac{\eta\mu^2\varphi}{x_{50}} & 0 & \frac{\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_{50}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \\ \delta x_5 \\ \delta x_6 \end{bmatrix} \tag{6β}$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η μήτρα C έχει σαν παράμετρο την αρχική τεταγμένη του στόχου.

3. Η μήτρα παρατηρησιμότητας του συστήματος είναι

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta\mu^2\varphi}{x_{50}} & 0 & -\frac{\eta\mu^2\varphi}{x_{50}} & 0 & \frac{\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_{50}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta\mu^2\varphi}{x_{50}} & 0 & -\frac{\eta\mu^2\varphi}{x_{50}} & & \frac{\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_{50}} \\ & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Επειδή η μήτρα Γ_o δεν έχει πλήρη βαθμό, το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο και συνεπώς το διάνυσμα καταστάσεως δεν μπορεί να εξαχθεί από τις παρατηρήσεις της εξόδου, αφού η είσοδος είναι μηδενική.

Η αδυναμία παρατήρησης του διανύσματος καταστάσεως φαίνεται και από το ακόλουθο Σχήμα που δίνει τη γεωμετρία του προβλήματος. Οι συντεταγμένες του υποβρυχίου και του πλοίου στόχου θα είναι.

$$(x_\upsilon, y_\upsilon) = (x_{10} + x_{20}t, 0) = (x_{20}t, 0) \quad (8\alpha)$$

$$(x_\Sigma, y_\Sigma) = (x_{30} + x_{40}t, x_{50} + x_{60}t) \quad (8\beta)$$

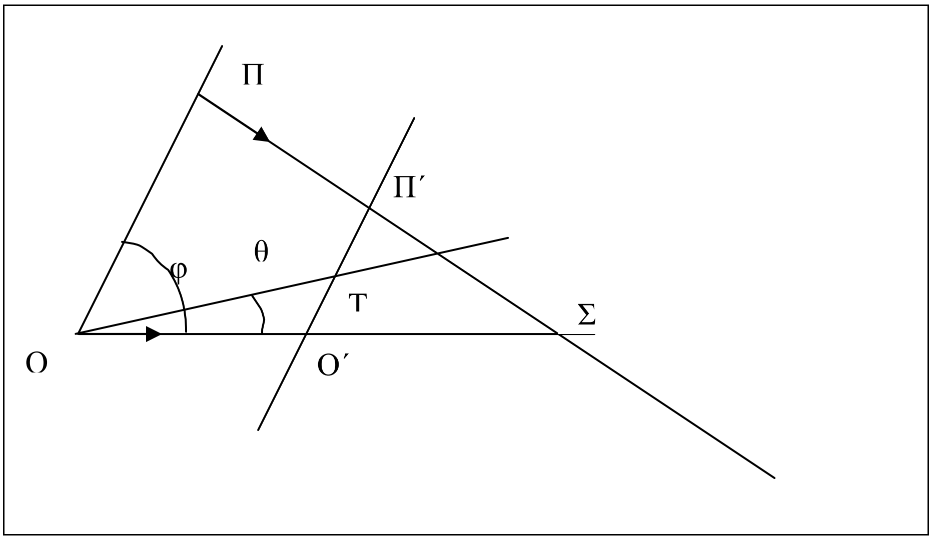
και η διόπτευση του στόχου είναι

$$\varphi = \text{τοξεφ}\left(\frac{x_{50} + x_{60}t}{x_{30} + x_{40}t - x_{20}t}\right) \quad (9)$$

Είναι προφανές ότι εάν ληφθούν

$$(\tilde{x}_{30}, \tilde{x}_{40}, \tilde{x}_{50}, \tilde{x}_{60}) = (2x_{30}, 2x_{40} - x_{20}, 2x_{50}, 2x_{60}) \quad (10)$$

η διόπτευση παραμένει αναλλοίωτη και συνεπώς οι δύο περιπτώσεις δεν μπορούν να διακριθούν.



4. Για να συγκρουστούν δύο σώματα δεν αρκεί να τέμνονται οι τροχιές τους αλλά χρειάζεται να φθάσουν στο σημείο τομής ταυτόχρονα. Έστω ότι τα σώματα Ο και Π, όπως στο Σχήμα θα συγκρουστούν στο σημείο Σ στο οποίο τέμνονται οι τροχιές τους τη χρονική στιγμή t_σ, t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία βρίσκονται στις θέσεις Ο και Π και t_1 η χρονική στιγμή κατά υην οποία βρίσκονται στις θέσεις Ο΄ και Π΄ αντίστοιχα. Επειδή

$$\frac{\Sigma\Pi'}{\Sigma\Pi} = \frac{v_\Sigma(t_\sigma - t_1)}{v_\Sigma(t_\sigma - t_0)} = \frac{\Sigma O'}{\Sigma O} = \frac{v_O(t_\sigma - t_1)}{v_O(t_\sigma - t_0)} = \frac{t_\sigma - t_1}{t_\sigma - t_0} \quad (11)$$

και η γωνία στο Σ είναι κοινή, τα τρίγωνα ΣΟΠ και ΣΟ΄Π΄ είναι όμοια και συνεπώς

$$\text{γωνια}(O\Sigma'\Pi') = \text{γωνια}(\Sigma O\Pi) \quad (12)$$

δηλαδή η διόπτευση του Π από το Ο είναι σταθερή. Το ίδιο συμβαίνει και με τη διόπτευση του Ο από το Π.

5.α Για να συγκρουστεί η τορπίλη με το πλοίο στόχο πρέπει η διόπτευση του στόχου να παραμένει σταθερή, δηλαδή πάντοτε παράλληλη προς την αρχική διόπτευση. Δεδομένου ότι κατά τη στιγμή της εκτόξευσης υποβρύχιο, τορπίλη και στόχος είναι επί της ευθείας ΟΠ, ανά πάσα χρονική στιγμή το υποβρύχιο, η τορπίλη και ο στόχος θα είναι σε μία ευθεία παράλληλη προς την ΟΠ. Εφαρμόζοντας τον κανόνα των ημιτόνων στο τρίγωνο ΟΤΟ΄, λαμβάνεται

$$\frac{\mathrm{OT}}{\eta\mu\varphi}=\frac{v_T(t_1\text{-}t_0)}{\eta\mu\varphi}=\frac{\mathrm{OO'}}{\eta\mu(\varphi\text{-}\theta)}=\frac{v_Y(t_1\text{-}t_0)}{\eta\mu(\varphi\text{-}\theta)} \tag{13}$$

Επομένως υπάρχει τρόπος να εξασφαλιστεί η σύγκρουση τορπίλης πλοίου στόχου και η γωνία θ θα επιλεγεί ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$\eta\mu(\varphi\text{-}\theta)=\eta\mu\varphi\,\frac{v_Y}{v_T} \tag{14}$$

όπου v_Y, v_T είναι αντίστοιχα οι ταχύτητες του υποβρυχίου και της τορπίλης.

5.β Είναι προφανές ότι δεν εξασφαλίζεται ότι η απόσταση απο το σημείο εκτόξευσης μέχρι το σημείο σύγκρουσης με το πλοίο στόχο θα είναι μικρότερη από το βεληνεκές της τορπίλης και συνεπώς δεν είναι φρόνιμο να εκτοξευθεί η τορπίλη μόνο με τη μέτρηση της διόπτευσης όταν το υποβρύχιο κινείται σε ευθεία γραμμή.