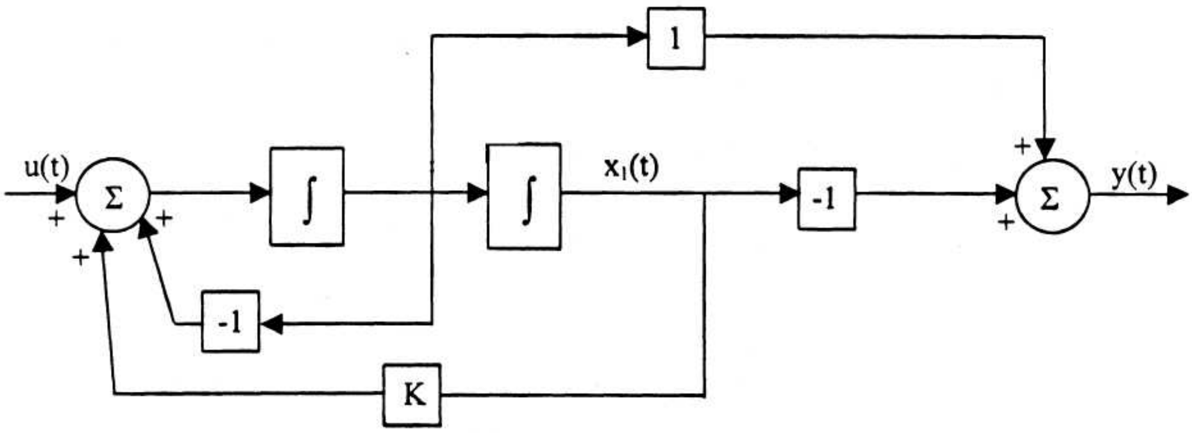
**Άσκηση:** Ένα σύστημα με είσοδο u(t), έξοδο y(t) και διάνυσμα κατάστασης $x(t) = (x_1(t) \quad x_2(t))^T$ περιγράφεται από το ακόλουθο διάγραμμα:



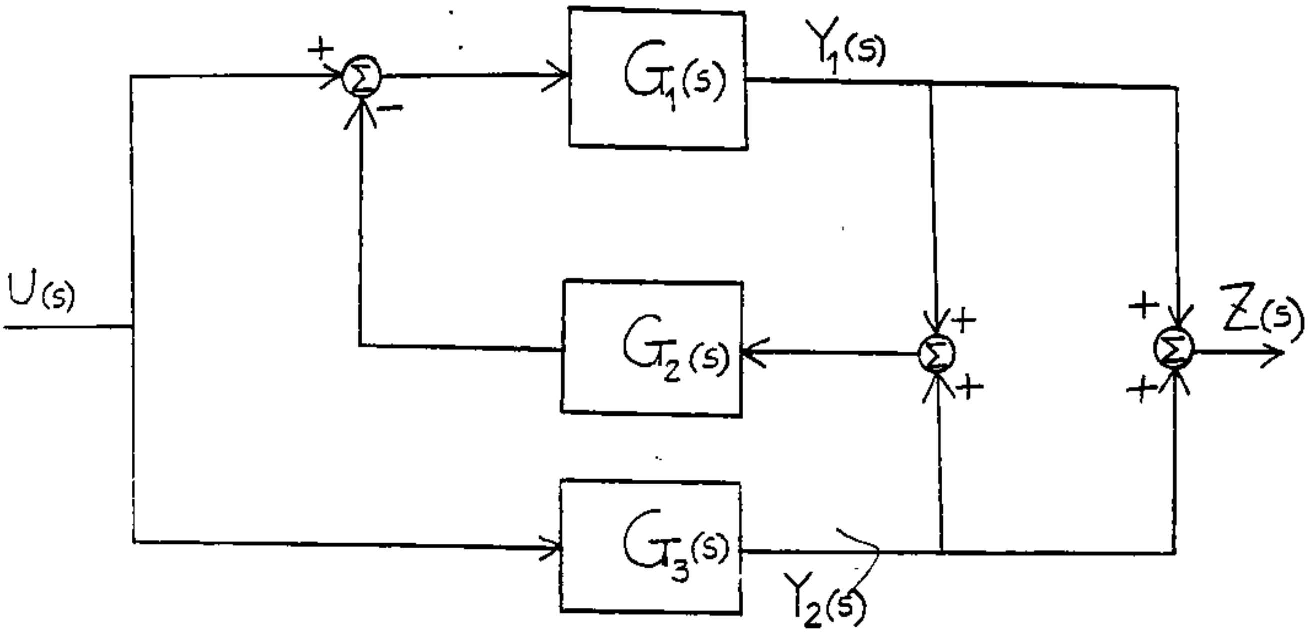

Όπου K∈R

α) Να βρεθεί η περιγραφή στο χώρο κατάστασης και η συνάρτηση μεταφοράς.

(β) Προσδιορίστε τις τιμές της παραμέτρου K για τις οποίες το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι παρατηρήσιμο.

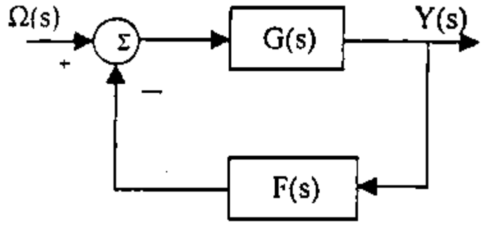
(γ) Συσχετίστε τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β) με τη συνάρτηση μεταφοράς του ερωτήματος (α). Σχολιάστε τις παρατηρήσεις σας.

**Άσκηση:** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων:




όπου $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$, $G_3(s) = \frac{1}{s+1}$ και u(t) είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση. Να υπολογισθεί το $\lim_{t\to\infty} z(t)$.

**<u>Άσκηση:</u>** Θεωρήστε το ακόλουθο σύστημα:




όπου $G(s) = \dfrac{0.2s + K}{0.5}$ , $F(s) = \dfrac{0.5}{2s^2 + K}$ **και K ένας πραγματικός αριθμός.**

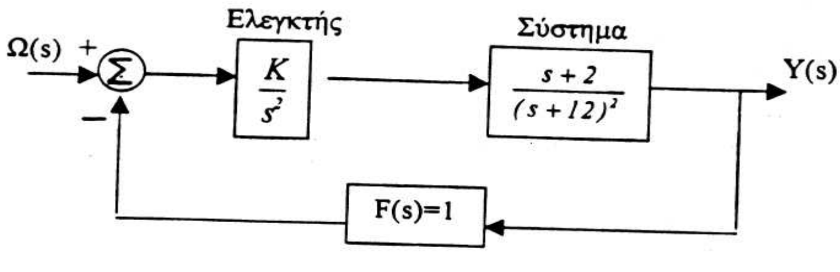
α. Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών για όλες τις τιμές του K.
β. Με τη βοήθεια του γ.τ.ρ. να βρεθούν οι τιμές του K που καθιστούν το κλειστό σύστημα ευσταθές.
γ. Να υπολογισθεί από τον γ.τ.ρ. η ελάχιστη τιμή του K για την οποία η απόκριση του κλειστού συστήματος εκτελεί ταλάντωση στη μοναδιαία βηματική είσοδο.

**<u>Άσκηση:</u>** Η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$s^3-(l + k)s^2 +2s + 7-k^2 =0$$

Να βρεθούν οι τιμές του *k* που καθιστούν το σύστημα ευσταθές.

**<u>Άσκηση:</u>** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων




όπου K>0.
α) Να βρεθούν τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των ριζών. Υπολογίστε τις γωνίες των ασύμπτωτων και το σημείο τομής τους.
Να βρεθούν τα σημεία θλάσης του γ.τ.ρ.
(Σημείωση: Υπάρχει μια προφανής ρίζα)

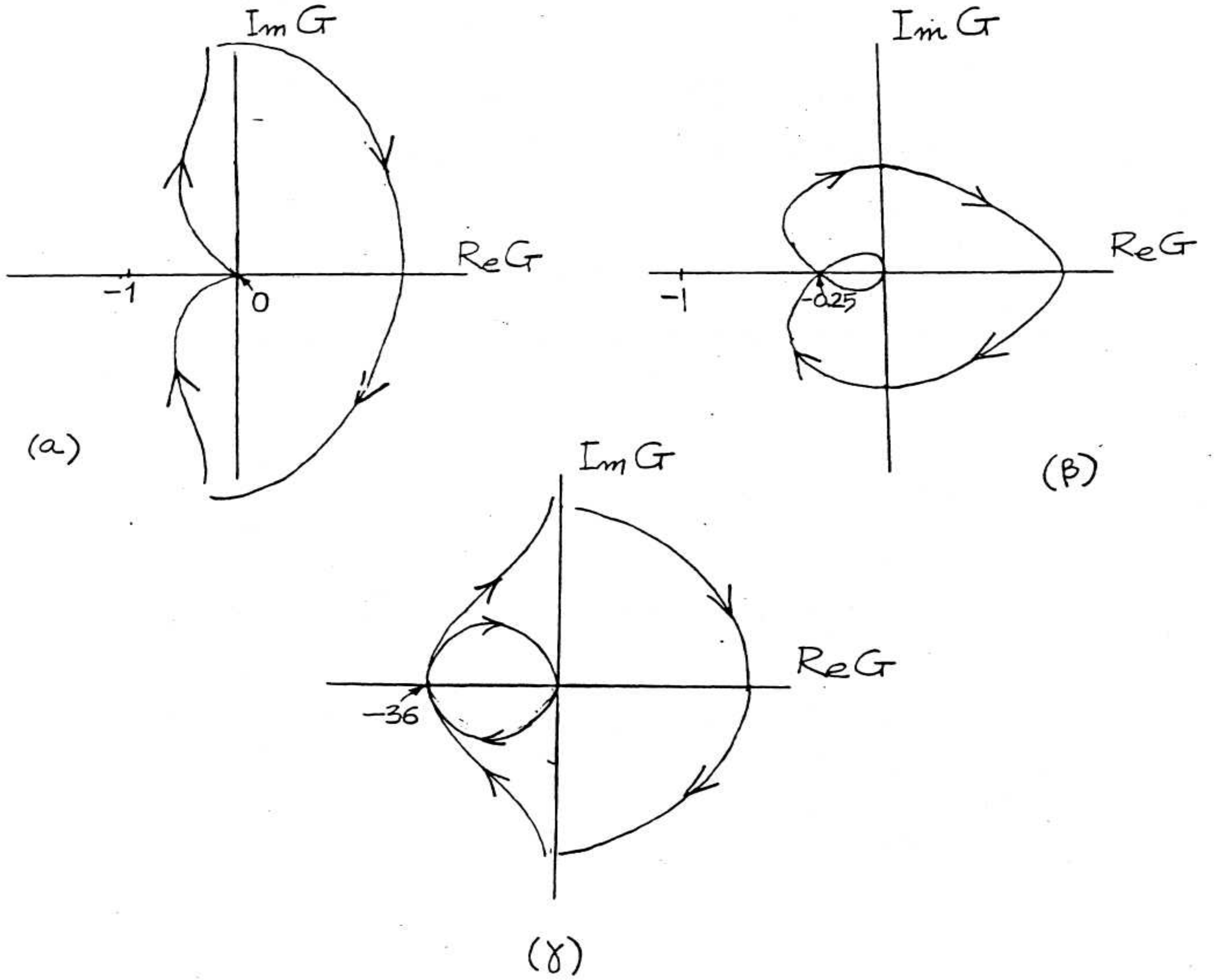
β) Να βρεθεί η οριακή τιμή του K για την ευστάθεια του κλειστού συστήματος και οι τομές του γ.τ.ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών.

γ) Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών.

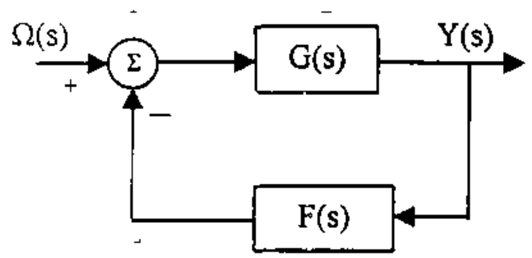
**Άσκηση:** Η συνάρτηση ανοιχτού βρόχου ενός κλειστού συστήματος με μοναδιαία ανάδραση είναι

$$G(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$$

Να βρεθεί αν αντιστοιχεί κάποιο από τα πιο κάτω διαγράμματα Nyquist στο δοθέν σύστημα και γιατί.



__Άσκηση:__ Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων:



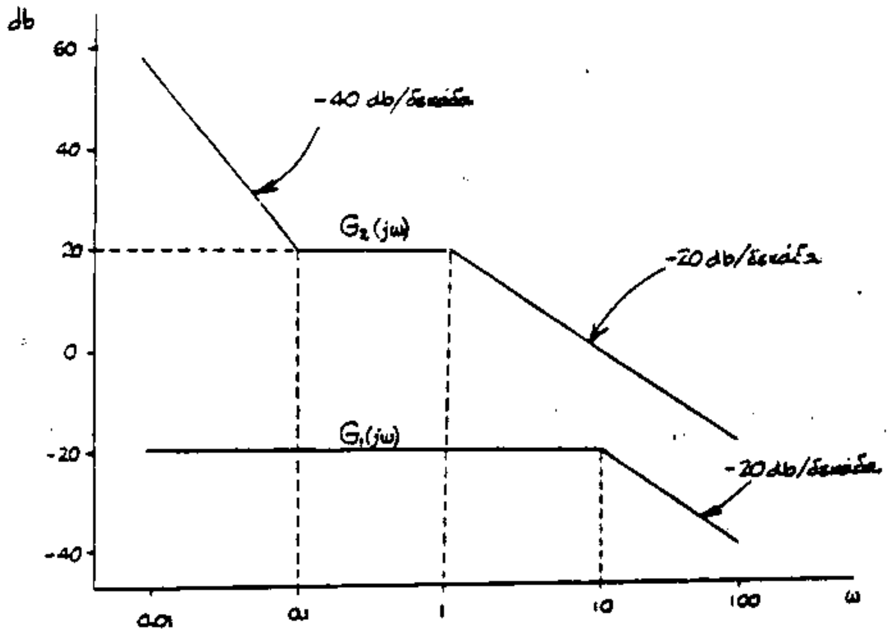

όπου $G(s) = \dfrac{K}{s^2(s+2)(s+4)}$ με K>0 και F(s) = 1+2s.

α) Να βρεθούν τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των ριζών. Υπολογίστε τις γωνίες των ασυμπτώτων και το σημείο τομής τους.

β) Να βρεθεί η οριακή τιμή του K για την ευστάθεια του κλειστού συστήματος και οι τομές του γ.τ.ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών.

γ) Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών.

__Άσκηση:__ Στο Σχήμα 1 δίνονται οι καμπύλες πλάτους (ασυμπτωτικές προσεγγίσεις) δύο συναρτήσεων μεταφοράς, $G_1(s)$ και $G_2$ (s). Οι συναρτήσεις αυτές είναι ελάχιστης φάσης

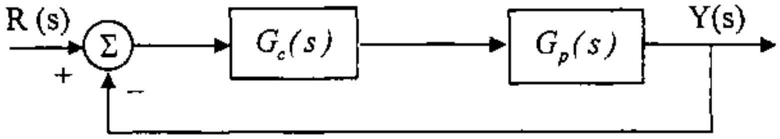



Σχήμα 1. Καμπύλες πλάτους (Bode) των συναρτήσεων G1(jω) και G2 (jω).

α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση (ασυμπτωτικές προσεγγίσεις) του πλάτους για τη συνάρτηση G(s) = $G_1(s)\, G_2(s)$

β) Με βάση αυτή τη γραφική παράσταση της G(s), προσδιορίστε την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς G(s). Εάν βρεθεί όρος δεύτερης τάξης, πάρτε σταθερά απόσβεσης ζ=0.5

**Άσκηση:** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων:




όπου $G_p(s) = \frac{1}{s(s-1)}$ και $G_c(s) = k_0 s + k_1 + \frac{k_2}{s}$. Να βρεθεί για ποιές τιμές των $k_0$, $k_1$ και $k_2$ οι πόλοι του κλειστού συστήματος έχουν άθροισμα $-1$, γινόμενο $-1$ και καθιστούν το κλειστό σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές (Δηλ. είναι Re(πόλος) < 0 ).

**Άσκηση:** Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος είναι:

$$G(s) = \frac{s}{(s^2 + 3s + 2)}$$

Στα ερωτήματα που ακολουθούν να δειχθούν αναλυτικά όλα τα στάδια υπολογισμού
(εξισώσεις κλπ.).

i) Να γραφτεί το σύστημα στην κανονική μορφή φάσης. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και ο μετασχηματισμός ομοιότητας που μετατρέπει την κανονική μορφή φάσης στη διαγώνια μορφή.

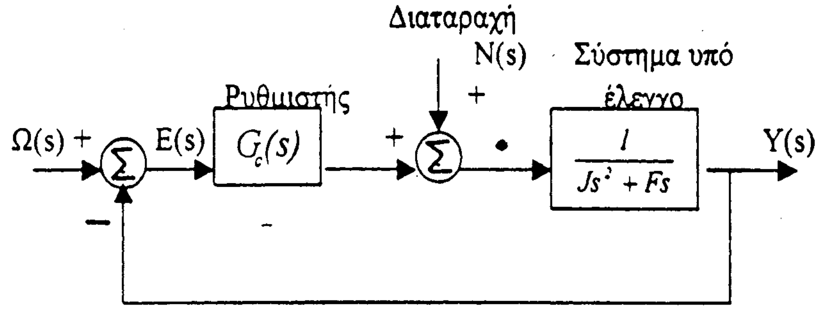
ii) Με βάση τη διαγωνοποίηση του ερωτήματος (i) να βρεθεί ο μεταβατικός πίνακας κατάστασης (της περιγραφής στην κανονική μορφή φάσης). Να υπολογιστεί η ελεύθερη απόκριση για τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες στις μεταβλητές φάσης:

$$X(0)=(2 \quad -2)^T$$

Σχολιάστε τη σημασία των αποτελεσμάτων.

iii) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος (ii) να βρεθεί η μοναδιαία βηματική απόκριση γιά μηδενικές αρχικές συνθήκες.

**Άσκηση:** Θεωρήσατε το κλειστό σύστημα με διάγραμμα βαθμίδων




όπου τα J και F είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Δίνεται ότι $G_c(s)=K_p>0$, Ω(s)=0 και η διαταραχή είναι μια βηματική συνάρτηση πλάτους A. Να υπολογιστεί το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση.

β) Έστω ότι $G_c(s)=K_p[1+\frac{1}{T_i s}]$, $T_i \neq 0$, $K_p>0$, $\Omega(s)=0$ και η διαταραχή είναι μία βηματική συνάρτηση πλάτους A. Να υπολογιστεί το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση εάν το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές. Σχολιάστε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων α) και β) σε σχέση με τη μορφή του ρυθμιστή και το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση.

γ) Έστω $G_c(s)=K_p[1+\frac{1}{T_i s}]$, $T_i \neq 0$, $N(s)=1$ και $\Omega(s)=\frac{1}{s}$ Να βρεθούν οι περιοχές τιμών των $K_p$ και $T_i$ έτσι ώστε η επίδραση της διαταραχής στην έξοδο να εξουδετερώνεται στη μόνιμη κατάσταση (δηλ. $\lim_{t\to\infty} y_N(t)=0$) και ταυτόχρονα η έξοδος να ακολουθεί το σήμα εισόδου $\Omega(s)=\frac{1}{s}$ στη μόνιμη κατάσταση (δηλ. $\lim_{t\to\infty}\{y(t)-\omega(t)\}=0$).

**Άσκηση:** Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s)=\frac{1}{s^2(s^2+\gamma s)},\quad \gamma>0$$

Να σχεδιαστούν ο δρόμος Nyquist και το διάγραμμα Nyquist. Με τη βοήθεια του διαγράμματος Nyquist να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος.

**Άσκηση:** Η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος είναι

$$s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma = 0$$

όπου τα α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθούν τα πεδία τιμών των α, β και γ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να ικανοποιούν την ανισότητα: Re(ρίζα) > 1.

**Άσκηση:** Δίνεται ότι για $K = 3$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός συστήματος κλειστού βρόχου είναι

$$s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 + K(s+2)$$

και έχει ρίζες τους αριθμούς -5,-4,-3,-1. Επιθυμούμε όλες οι ρίζες, $s_i$ να ικανοποιούν την αυστηρή ανισότητα: $Re(s_i) < -1$. Πρέπει να αυξήσουμε λίγο ή να μειώσουμε λίγο το $K$ για να πετύχουμε $\mathrm{Re}(s_i) < -1$.

**Άσκηση:** Για K μεταβαλλόμενο: - oo < K < +co , ο γεωμετρικός τόπος των ριζών της

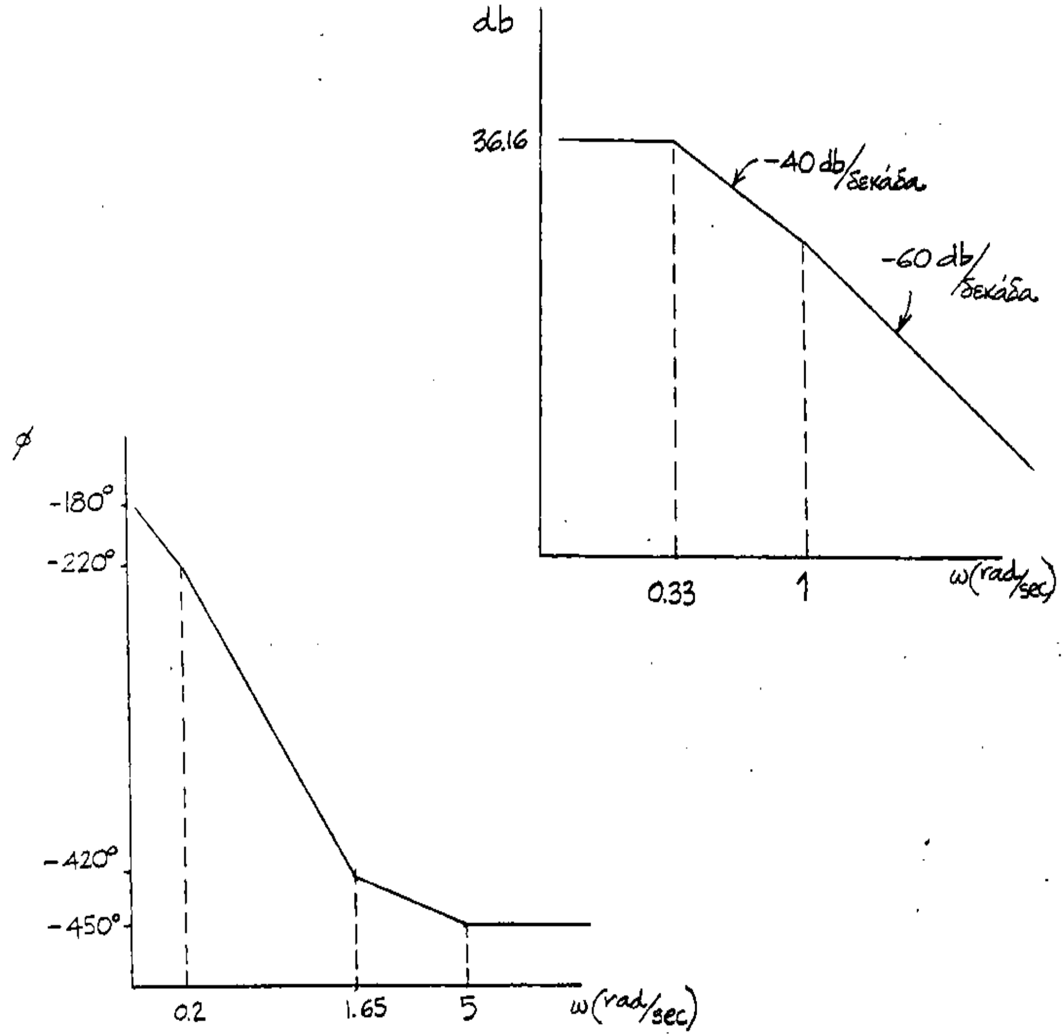
$$s^4 + \delta \cdot s^3 + 7 \cdot s^2 + 2 \cdot \delta \cdot s + 7 + K \cdot (2 \cdot \delta \cdot s^2 - 7 \cdot s + 105) = 0$$

έχει σημείο τομής των ασυμπτώτων το $\sigma_c$=-5. Να βρεθεί το δ.

**Άσκηση:** Στο Σχήμα 1, δίνονται οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις των διαγραμμάτων Bode της συνάρτησης μεταφοράς ανοιχτού βρόχου

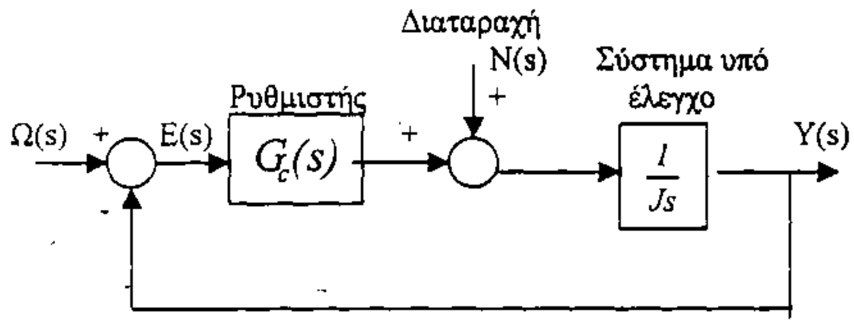
$$GF(s) = \frac{A}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

όπου το A είναι πραγματικός αριθμός και οι πόλοι είναι ευσταθείς και πραγματικοί Να υπολογισθούν τα pi, p2, p3 και το A.




Σχήμα 1. Διαγράμματα πλάτους και φάσης.

**Άσκηση:** Το σύστημα πλοήγησης του διαστημοπλοίου σας θα τεθεί σε λειτουργία σε είκοσι λεπτά με κύριο στόχο την εξομάλυνση της τροχιάς πριν την προσεδάφιση στον Άρη. Το σύστημα παρουσιάζεται απλοποιημένα από το διάγραμμα βαθμίδων στο Σχήμα 1.




Σχήμα 1: Σύστημα πλοήγησης διαστημοπλοίου.

Η αδρανειακή σταθερά J > 0. Έστω ότι η είσοδος, Ω(s), είναι μηδέν και η διαταραχή, $N(s)=A/s$ , είναι μία βηματική συνάρτηση πλάτους $A$. Εσείς, ως μηχανικός, θέλετε:

(α) μηδενικό σφάλμα, E(s), στη μόνιμη κατάσταση, και
(β) το κλειστό σύστημα να είναι ευσταθές.

Αξιολογήστε, σε σχέση με τα ζητούμενα, τους ακόλουθους τρεις πιθανούς ρυθμιστές:

1) $G_c(s) = K$, $\quad K > 0$

2) $G_c(s) = \dfrac{K}{s}$, $\quad K > 0$

3) $G_c(s) = K_p + \dfrac{K}{s}$, $\quad K > 0\ ,\ K_p > 0$

Ποια λύση προτιμάτε και γιατί;

**Άσκηση:** Θεωρείστε σύστημα διακριτού χρόνου:

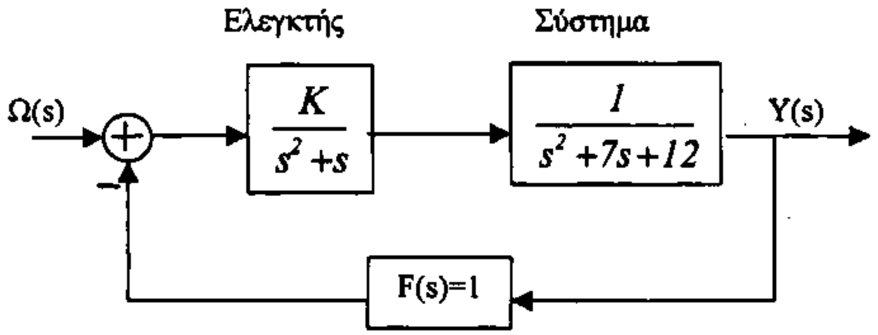
$x(k+1) = a \cdot x(k) + x^4(k)$

α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας

β) Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση Liapunov $V(x)=x^4$ για να βρείτε περιοχές της αρχικής συνθήκης x(0) και του α, για τις οποίες ισχύει ότι $x(k) \longrightarrow 0$ καθώς $k \longrightarrow +\infty$

**<u>Άσκηση:</u>**

Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων




α) Βρείτε τον αριθμό των διακεκριμένων τόπων και τα σημεία του γεωμετρικού τόπου των ριζών για K = 0,K→±oo.

β) Υπολογίστε τις γωνίες των ασύμπτωτων για K→±oo και το σημείο τομής τους.

γ) Υπολογίστε τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των ριζών για $K>0$, $K<0$. Καθορίστε τα πιθανά σημεία θλάσης. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι μία ρίζα της εξίσωσης $2s^3 + 12s^2 + 19s + 6 = 0$ είναι

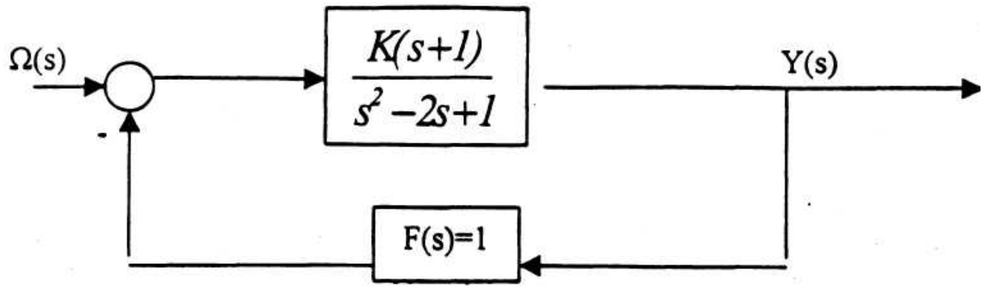
s = -2.

δ) Υπολογίστε τα σημεία τομής με το φανταστικό άξονα

ε) Σχεδιάστε το γεωμετρικό τόπο των ριζών για $K>0$

στ) Σχεδιάστε το γεωμετρικό τόπο των ριζών για $K<0$

**Άσκηση:** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων:

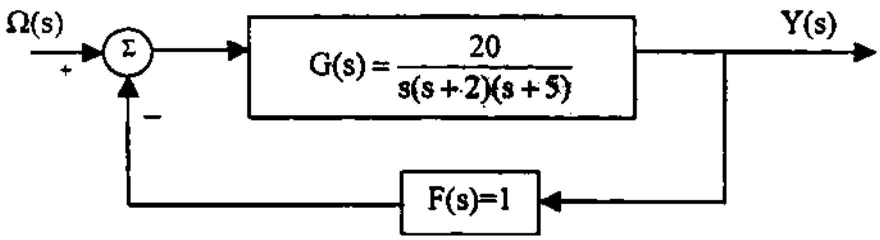



όπου $G(s) = \dfrac{K}{s^2(s \cdot 2)(s \cdot 4)}$ με K>0 και F(s)=1+2s

α) Να σχεδιαστούν ο δρόμος του Nyquist και το διάγραμμα Nyquist για *K=L* Ενδεικτικά, υπολογίστε τα σημεία του διαγράμματος Nyquist για ω=0, ω=1, ω=1. *72, ω* → ∞

β) Με τη βοήθεια του διαγράμματος Nyquist να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος για K > 0.

**Άσκηση:** Θεωρήστε το σύστημα με διάγραμμα βαθμίδων:

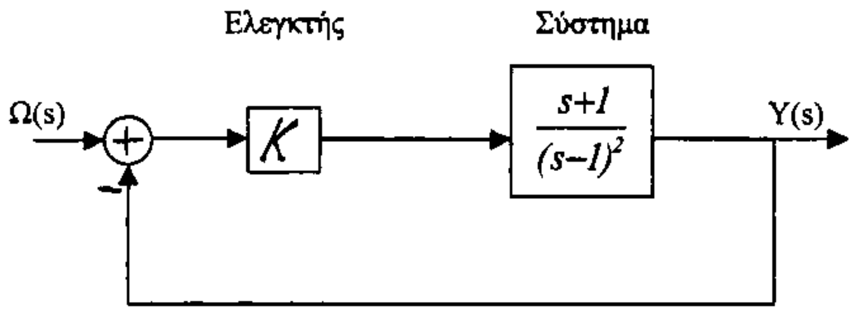



α) Να χαραχτούν τα διαγράμματα πλάτους και φάσης, της G(s)F(s) στους επισυναπτόμενους δύο ημιλογαριθμικούς χάρτες (ασυμπτωτικές προσεγγίσεις αρκούν).

β) Με βάση το ερώτημα (α), είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές; Αν ναι, να βρεθούν τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης του κλειστού συστήματος.

γ) Να ελεγχθεί αν το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές με κάποιο αλγεβρικό κριτήριο.

**Άσκηση:** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων




όπου το $K > 0$.

α) Να σχεδιαστούν ο δρόμος του Nyquist και το διάγραμμα Nyquist για K=1. Ενδεικτικά, υπολογίστε τα σημεία στο διάγραμμα Nyquist για ω=0, ω=1, ω=1.72, ω→±oo.

β) Με τη βοήθεια του διαγράμματος Nyquist να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος για όλες τις τιμές του *K*.

**Άσκηση:** Θεωρήστε το σύστημα διακριτού χρόνου,

$$x(k+1) = Ax(k), \qquad x(0) = x_0$$

και

$$y(k) = Cx(k)$$

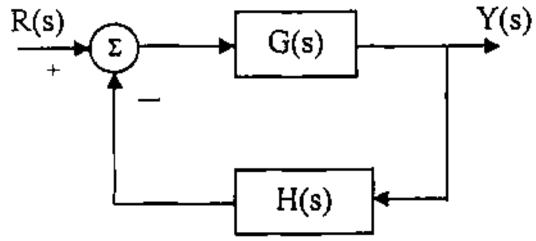
όπου,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθεί αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

β) Να προσδιορισθεί αν μπορεί να βρεθεί το $x_0$ όταν $y_0 = 3$, $y_1 = -1$, $y_2 = -5$ και $x_0 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix}^T$

**Άσκηση:** Θεωρήστε το κλειστό σύστημα με διάγραμμα βαθμίδων



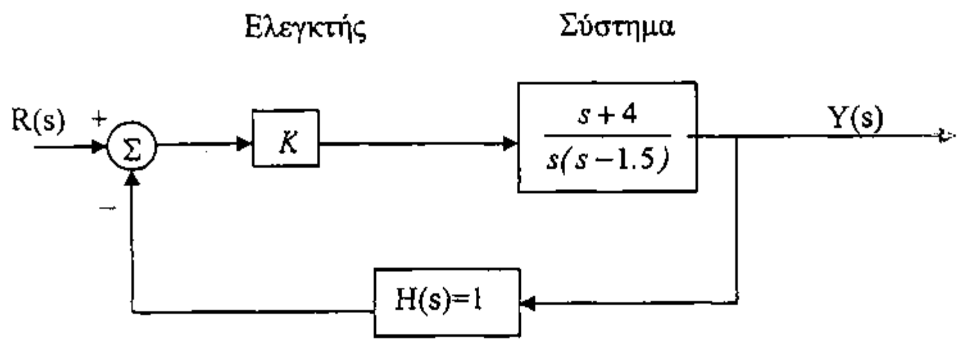

όπου $G(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$ και $H(s)=\alpha+\beta s$. Να βρεθούν οι περιοχές τιμών του $(\alpha\,,\beta)$ για τις οποίες το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές και η κρουστική απόκριση είναι μια αποσβεννύμενη ταλάντωση.

**Άσκηση:** Θεωρήστε ένα κλειστό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου,

$$GH(s)=\frac{K}{s(s+5)^2}$$

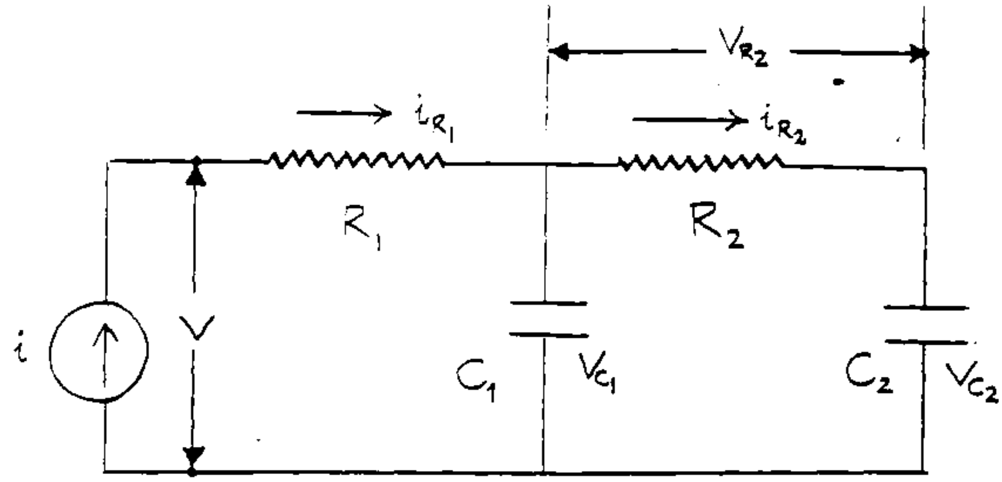
Να βρεθούν οι τιμές του $K$ για τις οποίες η κρουστική απόκριση του κλειστού συστήματος τείνει στο μηδέν γρηγορότερα από το $e^{-0.5t}$.

**Άσκηση:** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων



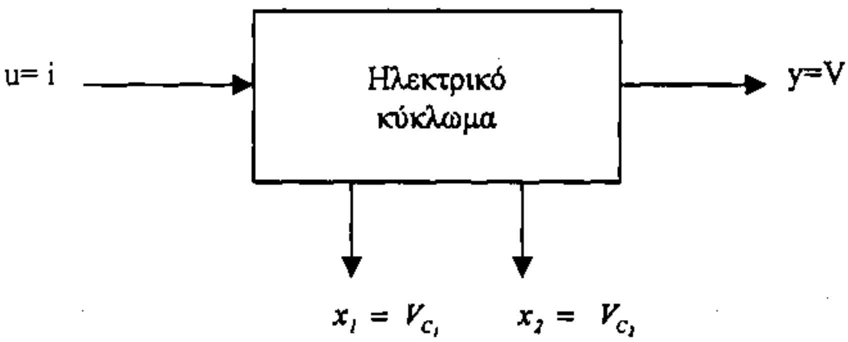

Να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος για $K\in(-\infty,\infty)$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Nyquist. Στην περίπτωση αστάθειας, να βρεθεί ο αριθμός των ασταθών πόλων του κλειστού συστήματος.

**Άσκηση:** Θεωρήστε το ακόλουθο ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχήμα 1.




Σχήμα 1: Ηλεκτρικό κύκλωμα

α) Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος με βάση τον ορισμό των εισόδων, των μεταβλητών κατάστασης και των εξόδων που δίνονται στο Σχήμα 2.




Σχήμα 2: Ορισμός μεταβλητών εισόδου, καταστάσεων και εξόδου.

β) Για ποιες τιμές των παραμέτρων $R_1$, $R_2$, $C_1$, $C_2$ είναι το διάνυσμα κατάστασης ελέγξιμο ή/και παρατηρήσιμο;

γ) Έστω ότι παίρνουμε σαν έξοδο του συστήματος την τάση $V_{R_2}$ στα άκρα της αντίστασης $R_2$. Θεωρούμε $C_1 = C_2 = 2$ και $R_2 = 1$. Είναι το διάνυσμα κατάστασης ελέγξιμο ή/και παρατηρήσιμο;

δ) Για την περίπτωση του ερωτήματος γ) να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς. Τι παρατηρείτε; Σχολιάστε.

**Άσκηση:** Δίνεται το σύστημα συνεχούς χρόνου,

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ b\end{bmatrix}u(t), \qquad x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί η θετική τιμή του $b$ για την οποία το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

(β) Για την τιμή του $b$ που βρέθηκε στο ερώτημα (α), να δειχθεί ότι $y(t)=\sqrt{2}\,x_1(t)-x_2(t)$ πηγαίνει στό 0 όπως το $e^{-\sqrt{2}t}$ ανεξάρτητα από το $u(t)$ και τις αρχικές συνθήκες $x_1(0)$ και $x_2(0)$.

**Άσκηση:** Θεωρήστε το σύστημα διακριτού χρόνου,

$$x(k+1)=\alpha x^3(k)+x^5(k) \quad , \qquad \alpha>0$$

α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.

β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov,

$$V(x(k))=x^2(k)$$

να βρεθούν οι περιοχές των αρχικών συνθηκών, $x(0)$, για τις οποίες ισχύει ότι $x(k)\to 0$ καθώς το $k\to\infty$.

**Άσκηση:** α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας ενός μη γραμμικού δυναμικού συστήματος διακριτού χρόνου, που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x(k+1)=x(k)^2-x(k)+y(k)^2$$
$$y(k+1)=x(k)^2-4x(k)+y(k)+8y(k)^2$$

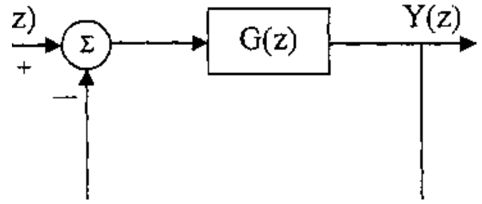
με $k=0,1,2,\ldots$ και $x(k)\in R,\ y(k)\in R$.

β) Δίνεται το συστημα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\dot{x}(t)=-x(t)-2x(t)^3$$

όπου $x(t)\in R$. Να δειχθεί ότι το σημείο ισορροπίας $x^e=0$ είναι ευσταθές.

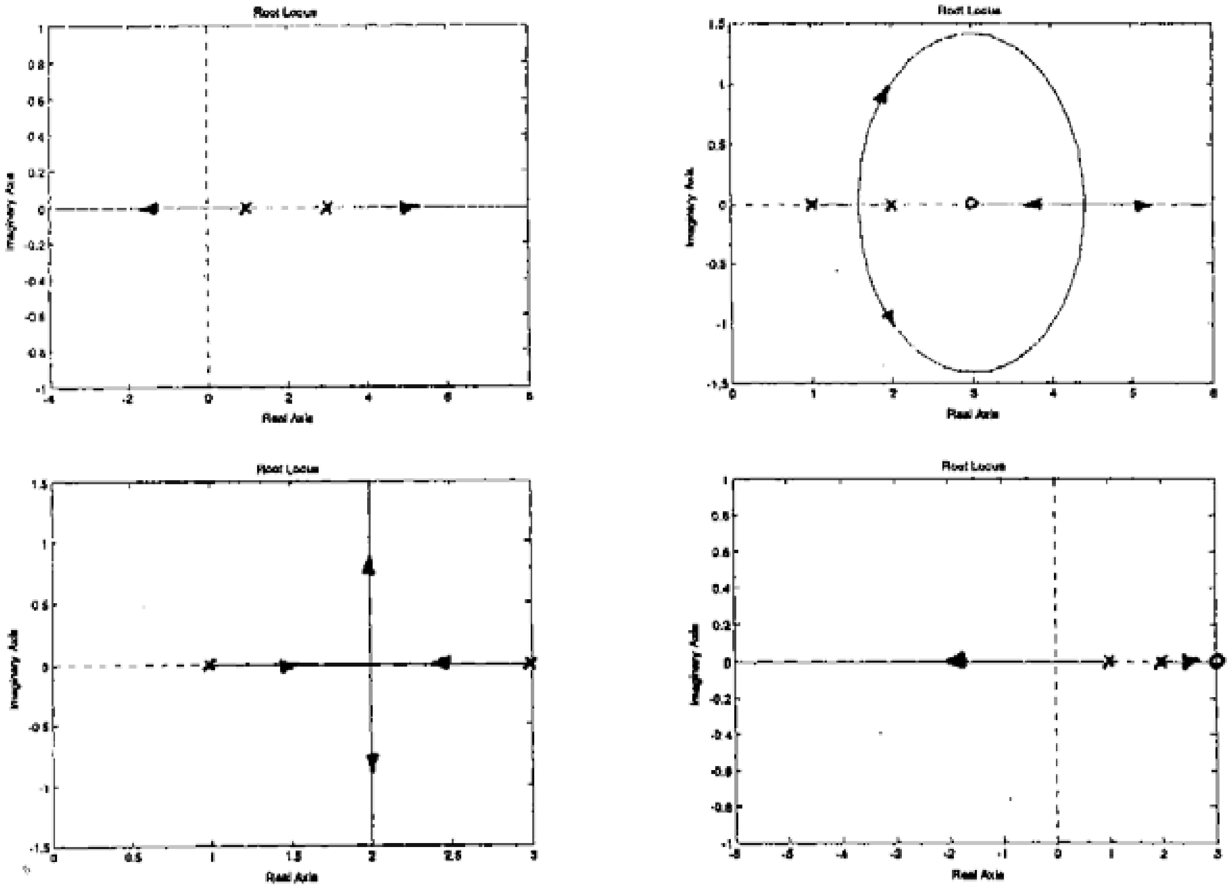
**<u>Άσκηση:</u>** Δίνεται το πιο κάτω διάγραμμα,




όπου διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

1. $G(z)=\dfrac{K(z^{-1}-3z^{-2})}{3z^{-1}-1-2z^{-2}}$ και 2. $G(z)=\dfrac{z^{-1}-3z^{-2}}{3z^{-1}-1-2Kz^{-2}}$

με $K>0$. Αντιστοιχίστε κάθε μια συνάρτηση με τον σωστό γεωμετρικό τόπο των ριζών (άν υπάρχει). Εξηγήστε την απάντησή σας.



**<u>Άσκηση:</u>** Θεωρούμε τις ακόλουθες συναρτήσεις ανοιχτού βρόχου δυο

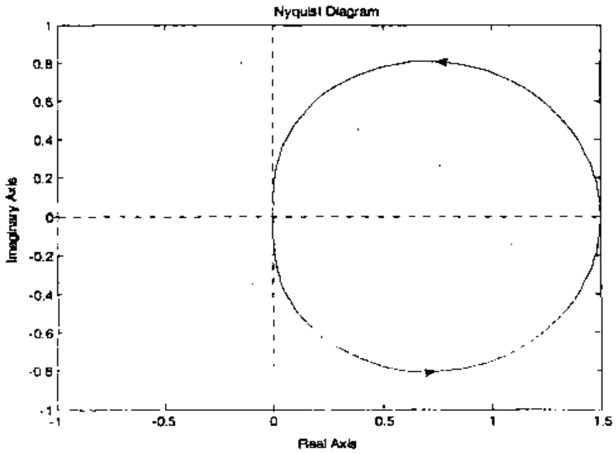
$$G_1(s)=\frac{-(s-3)}{(s-1)(s-2)},\quad G_2(s)=\frac{-(s-3)}{(s-1)(s+2)}$$

Τα υποψήφια διαγράμματα Nyquist παρουσιάζονται στα ακόλουθα σχήματα.

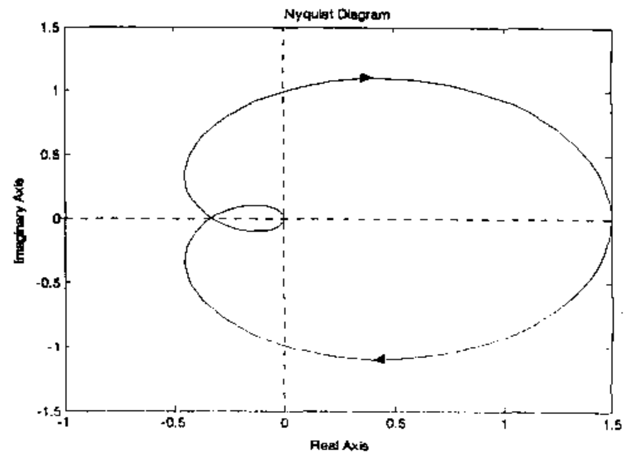
α) Αντιστοιχίστε τις συναρτήσεις ανοιχτού βρόχου με το σωστό διάγραμμα Nyquist και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

β) Με βάση το θεώρημα του Nyquist να βρεθεί αν τα συστήματα κλειστού βρόχου είναι ευσταθή και στην περίπτωση αστάθειας, πόσοι είναι οι ασταθείς πόλοι.

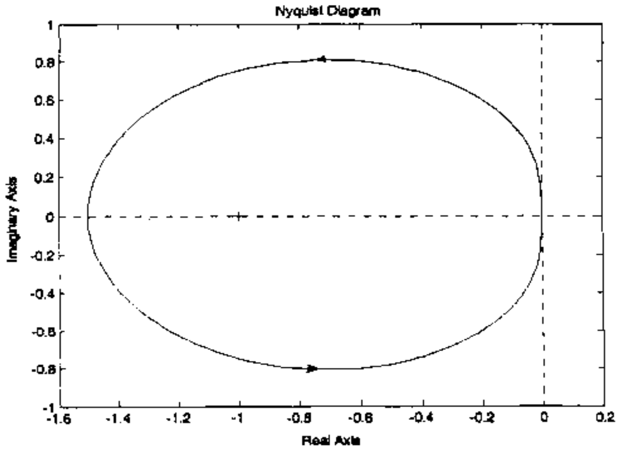
(A)



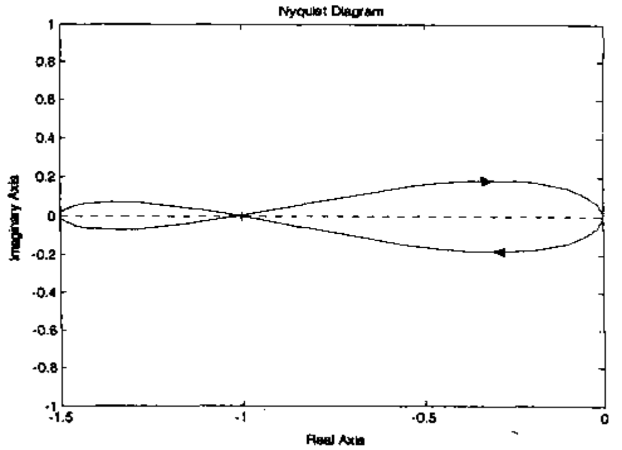

(B)



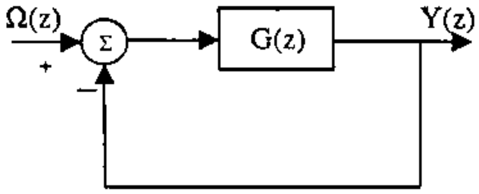

(Γ)




(Δ)



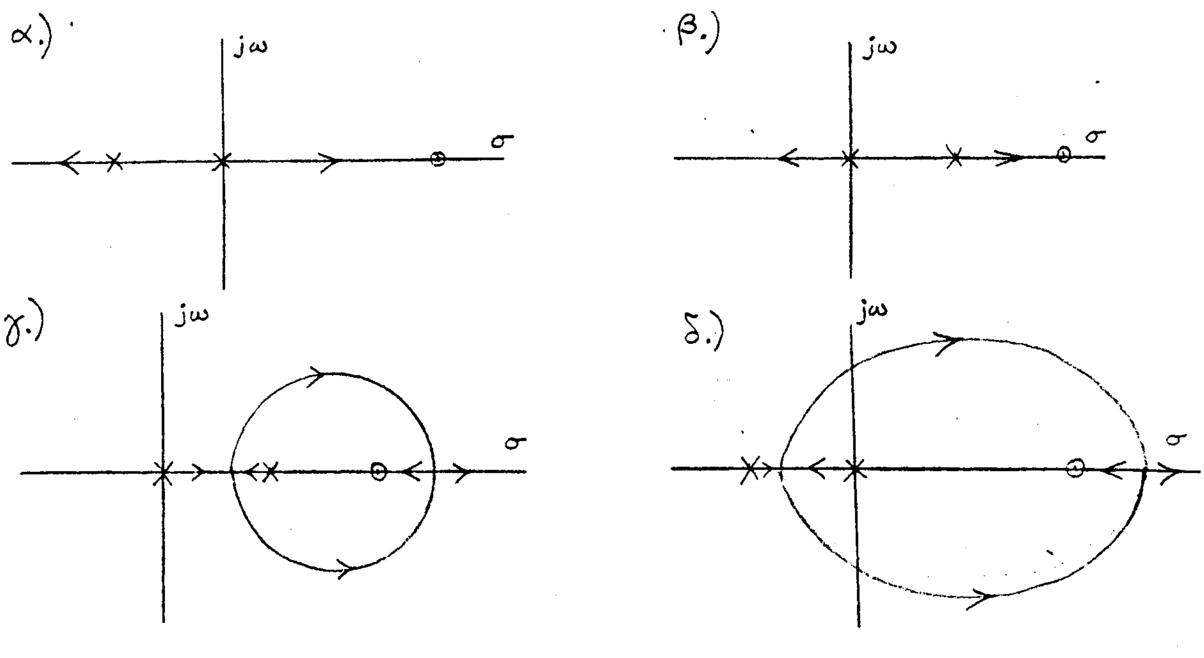
**<u>Άσκηση:</u>** Δίνεται το πιο κάτω διάγραμμα,



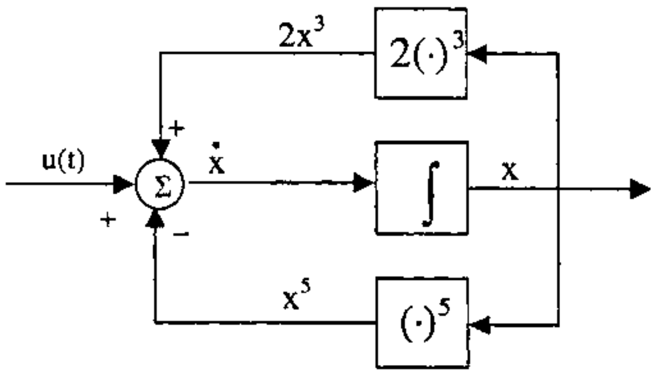

όπου διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

1. $G(z) = K\dfrac{z^{-1} - 2z^{-2}}{z^{-1} - 1}$ , $K > 0$ και 2. $G(z) = K\dfrac{2z^{-2} - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ , $K > 0$

Αντιστοιχίστε κάθε μια συνάρτηση με τον σωστό γ.τ.ρ. (άν υπάρχει). Εξηγήστε την απάντηση σας.




**<u>Άσκηση:</u>** Δίνεται το ακόλουθο διάγραμμα:



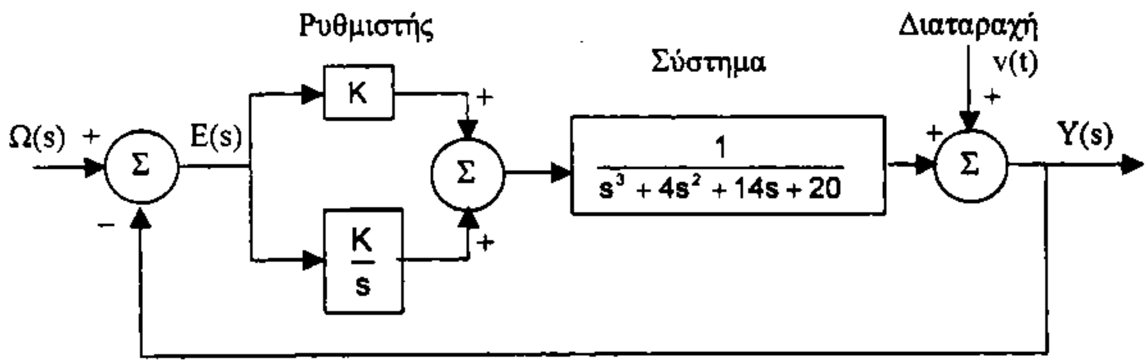
Έστω $u = kx^3$. Να βρεθεί με χρήση της δεύτερης μεθόδου του Lyapunov ποια είναι τα κατάλληλα $k$ ώστε $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ , δηλ. το $x = 0$ να είναι σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας. Χρησιμοποιήστε σαν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την $V(x) = \frac{1}{2}x^2$.

**<u>Άσκηση:</u>** Η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος είναι:

$$s^3 + \alpha \cdot s^2 + \beta \cdot s + \gamma = 0 ,$$

όπου τα α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθούν όλες οι τιμές του (α, β, γ) για τις οποίες όλες οι ρίζες της εξίσωσης ικανοποιούν την ανισότητα $|\mathrm{Re}(\rho i\zeta\alpha)| < 1$

**<u>Άσκηση:</u>** Θεωρήσατε το κλειστό σύστημα με διάγραμμα βαθμίδων




όπου K είναι πραγματικός αριθμός και η διαταραχή v(t) = $e^{-2t}$. Να προσδιοριστούν οι τιμές του K, αν υπάρχουν, για τις οποίες το κλειστό σύστημα αποκόπτει τις διαταραχές στην έξοδο (στη μόνιμη κατάσταση) και ταυτόχρονα ακολουθεί στη μόνιμη κατάσταση τη βηματική είσοδο, ω(t)=1, δηλ. $\underset{t\to\infty}{\mathrm{op}}\{y(t)-\omega(t)\} = 0$.

(i) Ποιος από τους πιο κάτω τρεις πίνακες είναι αποδεκτός ως μεταβατικός πίνακας κατάστασης ενός σταθερού πίνακα Α. Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

$$(\alpha)\begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2te^{-t} - 2 & -2e^{2t} + 2e^{-t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-t} & -2e^{-t} + 3e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (\beta)\begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2e^{-t} & -2e^{2t} + 2e^{-t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-t} & -2e^{2t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$(\gamma)\begin{bmatrix} e^{2t} & t^2e^{2t} \\ t^2e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

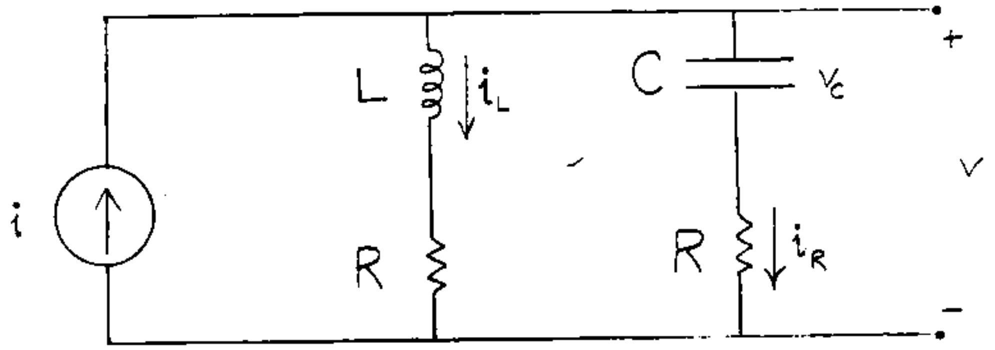
(ii) Βρείτε τον πίνακα Α που αντιστοιχεί στην επιλογή σας στο ερώτημα (i). (iii)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} x$$

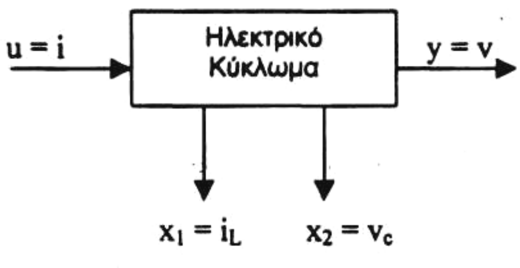
Για ποιες τιμές του $b_1$ το σύστημα είναι μη ελέγξιμο.

ιv) Για τις τιμές αυτές του $b_1$ βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

**<u>Άσκηση:</u>** Θεωρήστε το ακόλουθο ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχήμα 1




α) Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος με βάση τον ορισμό των εισόδων, των μεταβλητών κατάστασης και των εξόδων που δίνονται στο Σχήμα 2.




Σχήμα 2: Ορισμός μεταβλητών εισόδου, κατάστασης και εξόδου.

β) Προσδιορίστε τις τιμές του R για τις οποίες το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι ελέγξιμο και τις τιμές του R για τις οποίες δεν είναι παρατηρήσιμο.

γ) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και να αντικατασταθούν οι τιμές του R του ερωτήματος (β) για τις οποίες το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο και δεν είναι παρατηρήσιμο. Τι παρατηρείτε;

**Άσκηση:** Δίνεται το σύστημα διακριτού χρόνου,

$$x_1(k+1) = (1 + x_2(k)^2 + |x_2(k)|)^{-1} x_2(k) \ , \qquad x_2(k+1) = (1 + x_2(k)^2 + |x_1(k)|)^{-1} x_1(k)$$

Να βρεθούν τα σημεία που το σύστημα ισορροπεί και να μελετηθεί η ευστάθειά τους.

**Άσκηση:** Θεωρήστε ένα σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από τις

$$x(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

με $\omega$ μια θετική σταθερά. Για τα ερωτήματα που ακολουθούν να δειχθούν αναλυτικά όλα τα στάδια υπολογισμού (εξισώσεις, κ.λ.π.).

α) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός ομοιότητας που διαγωνοποιεί τον πίνακα $A$.

(0.5 μονάδα)

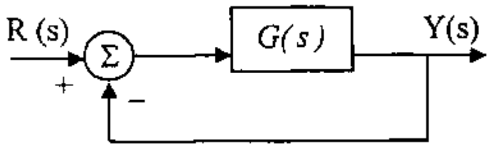
β) Με βάση αυτή τη διαγωνοποίηση, να υπολογιστεί ο μεταβατικός πίνακας κατάστασης του συστήματος (1) και αν $x_0 = (-1 \ \ 0)^T$, να βρεθεί το x(t) για t>0. (1 μονάδα)

**Άσκηση:** Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου,

$$GH(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p)(s+2)(s+3)}$$

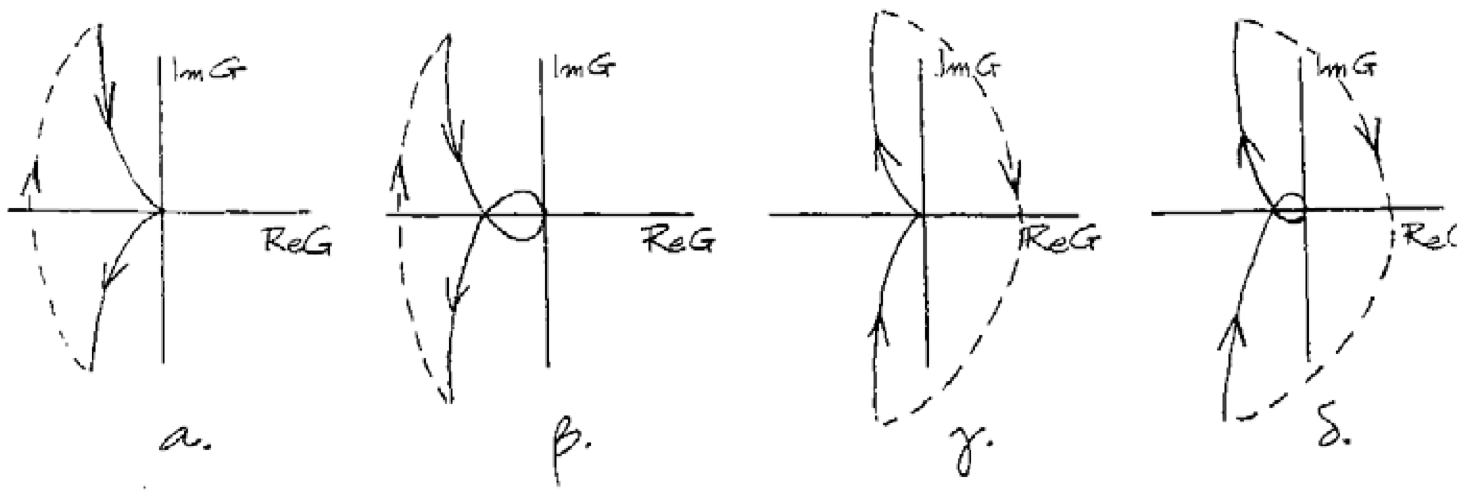
όπου το $K$ είναι πραγματικός αριθμός και το $p > 0$. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών έχει σημείο θλάσης, $\sigma_b$, την αρχή των αξόνων. Να βρεθούν οι περιοχές του άξονα των πραγματικών αριθμών στις οποίες μπορεί να βρίσκεται το κέντρο των ασύμπτωτων, $\sigma_c$, του γεωμετρικού τόπου των ριζών.

**Άσκηση:** Θεωρήστε το κλειστό σύστημα με διάγραμμα βαθμίδων




με $G(s)=\dfrac{K(s+a)}{s(s-1)}$ , $a>0$

(α) Να βρεθεί για $K\in[0,\infty)$ ποιό από τα πιο κάτω διαγράμματα Nyquist αντιστοιχεί στο δοθέν σύστημα και γιατί.




(β) Να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος για $K\in[0,\infty)$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Nyquist. Σε περίπτωση αστάθειας, να βρεθεί ο αριθμός των ασταθών πόλων του κλειστού συστήματος.

**Άσκηση:** Για $K$ μεταβαλλόμενο, $-\infty< K <+\infty$, ο γεωμετρικός τόπος των ριζών της εξίσωσης

$$s^4+\delta s^3+as^2+\beta s+\gamma+K(2s+4)=0$$

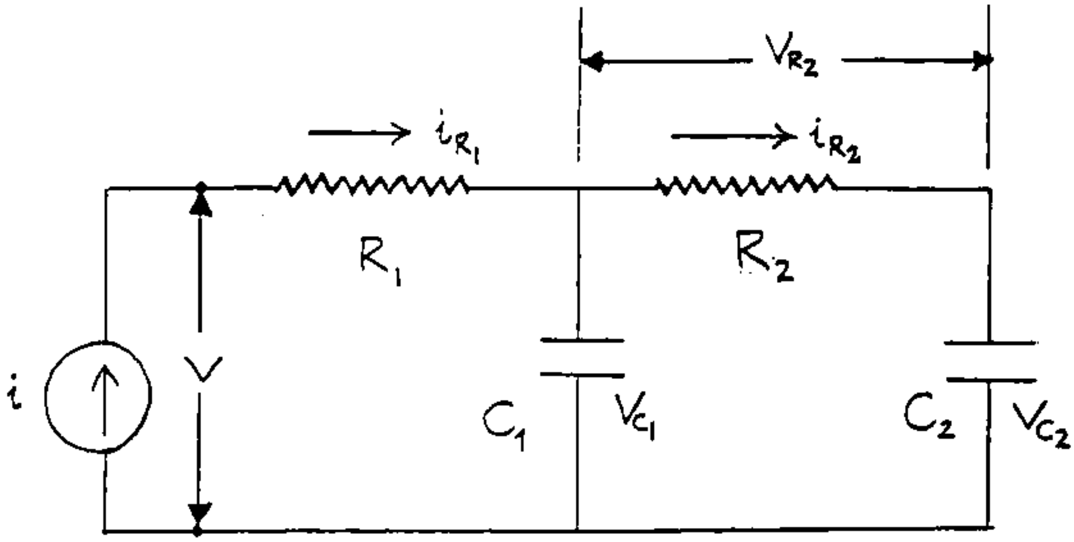
έχει σημείο τομής των ασύμπτωτων το $\sigma_c$ = -5. Να βρεθεί το $\delta$.

**Άσκηση:** Θεωρήστε ένα κλειστό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου,

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+4)^2}$$

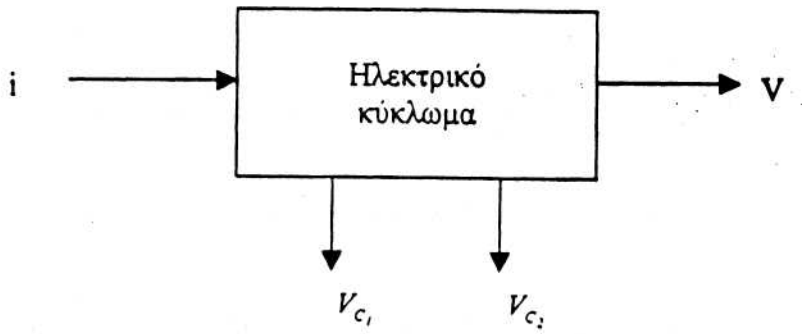
Να βρεθούν οι τιμές του $K$ για τις οποίες η κρουστική απόκριση του κλειστού συστήματος τείνει στο μηδέν γρηγορότερα από το $e^{-t}$

**Άσκηση:** Θεωρήσατε το ακόλουθο ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχήμα 1.




Σχήμα 1: Ηλεκτρικό κύκλωμα

α) Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος με βάση τον ορισμό των εισόδων, των μεταβλητών κατάστασης και των εξόδων που δίνονται στο Σχήμα 2.



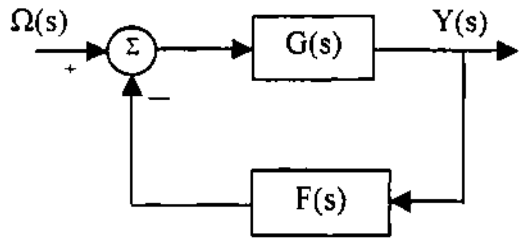

Σχήμα 2: Ορισμός μεταβλητών εισόδου, κατάστασης και εξόδου.

β) Για ποιες τιμές των παραμέτρων $R_1$, $R_2$, $C_1$, $C_2$ είναι το διάνυσμα κατάστασης ελέγξιμο ή/και παρατηρήσιμο;

γ) Έστω ότι παίρνουμε σαν έξοδο του συστήματος την τάση $V_{R2}$ στα άκρα της αντίστασης $R_2$. Θεωρούμε $C_1 = C_2 = 2$ και $R_2 = 1$. Είναι το διάνυσμα κατάστασης ελέγξιμο ή/και παρατηρήσιμο;

δ) Για την περίπτωση του ερωτήματος γ) να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς. Τι παρατηρείτε; Σχολιάστε.

**Άσκηση:** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων:



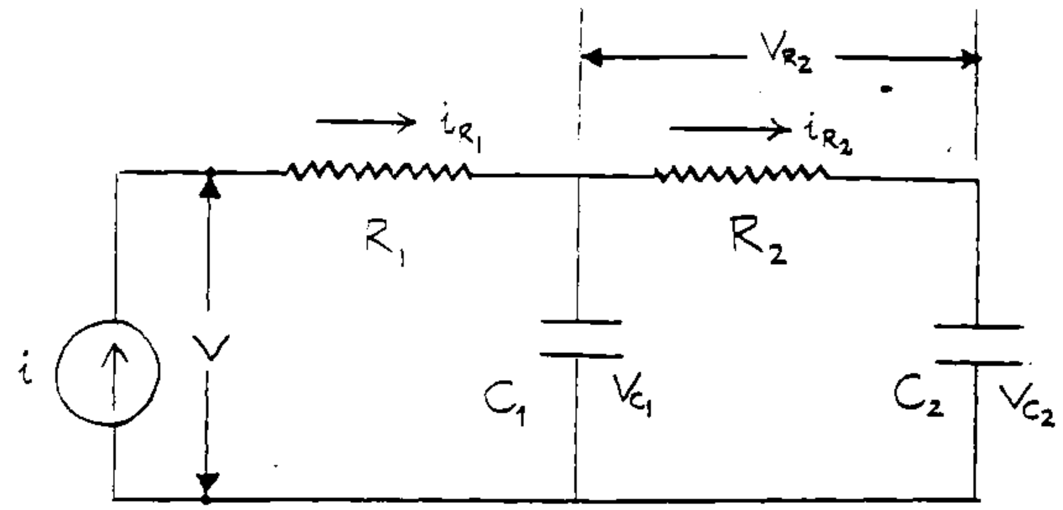

όπου $G(s) = \dfrac{K}{s^2(s+2)(s+4)}$ με K>0 και F(s) = 1+2s.

α) Να βρεθούν τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο των ριζών. Υπολογίστε τις γωνίες των ασύμπτωτων και το σημείο τομής τους.

β) Να βρεθεί η οριακή τιμή του K για την ευστάθεια του κλειστού συστήματος και οι τομές του γ.τ.ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών.

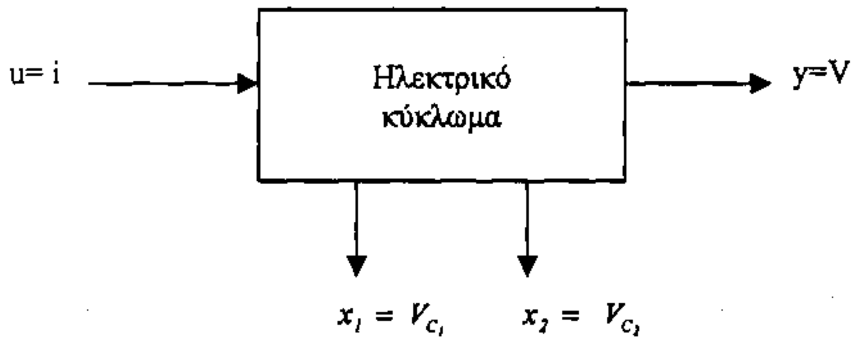
γ) Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών.

**Άσκηση:** Θεωρήστε το ακόλουθο ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχήμα 1.




Σχήμα 1: Ηλεκτρικό κύκλωμα

α) Να καταστρωθούν οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος με βάση τον ορισμό των εισόδων, των μεταβλητών κατάστασης και των εξόδων που δίνονται στο Σχήμα 2.




Σχήμα 2: Ορισμός μεταβλητών εισόδου, καταστάσεων και εξόδου.

β) Για ποιες τιμές των παραμέτρων $R_1$, $R_2$, $C_1$, $C_2$ είναι το διάνυσμα κατάστασης ελέγξιμο ή/και παρατηρήσιμο;

γ) Έστω ότι παίρνουμε σαν έξοδο του συστήματος την τάση $V_{R_2}$ στα άκρα της αντίστασης $R_2$. Θεωρούμε $C_1 = C_2 = 2$ και $R_2 = 1$. Είναι το διάνυσμα κατάστασης ελέγξιμο ή/και παρατηρήσιμο;

δ) Για την περίπτωση του ερωτήματος γ) να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς. Τι παρατηρείτε; Σχολιάστε.

**<u>Άσκηση:</u>** Δίνεται η ακόλουθη περιγραφή ενός συστήματος:

$$20\dot{x}_1+10\dot{x}_3=20x_1+5x_3+20u$$
$$19\dot{x}_1+18\dot{x}_2+17\dot{x}_3=19x_2+16x_3+bu$$
$$20\dot{x}_1+15\dot{x}_3=-40x_1-30x_3$$

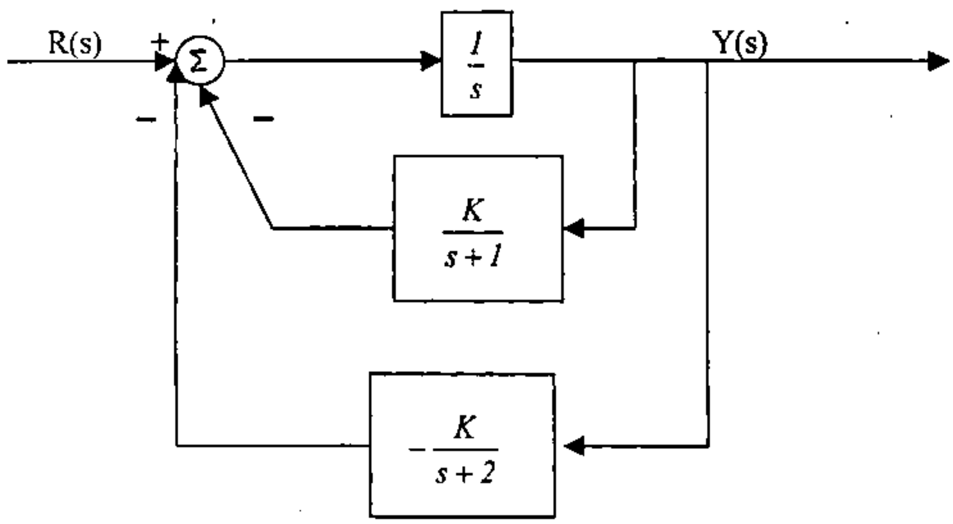
όπου $x_1$, $x_2$, $x_3$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης και $u$ η είσοδος. Το $b$ είναι πραγματικός αριθμός. Να βρεθούν οι τιμές του $b$ για τις οποίες το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

**<u>Άσκηση:</u>** Η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος είναι:

$$s^3+2s^2+4s+6=0$$

Να βρεθεί αν οι ρίζες (πόλοι του συστήματος) είναι στο αριστερό ανοιχτό μιγαδικό ημιεπίπεδο. (Δηλ. είναι Re(ρίζα) < 0 ;)

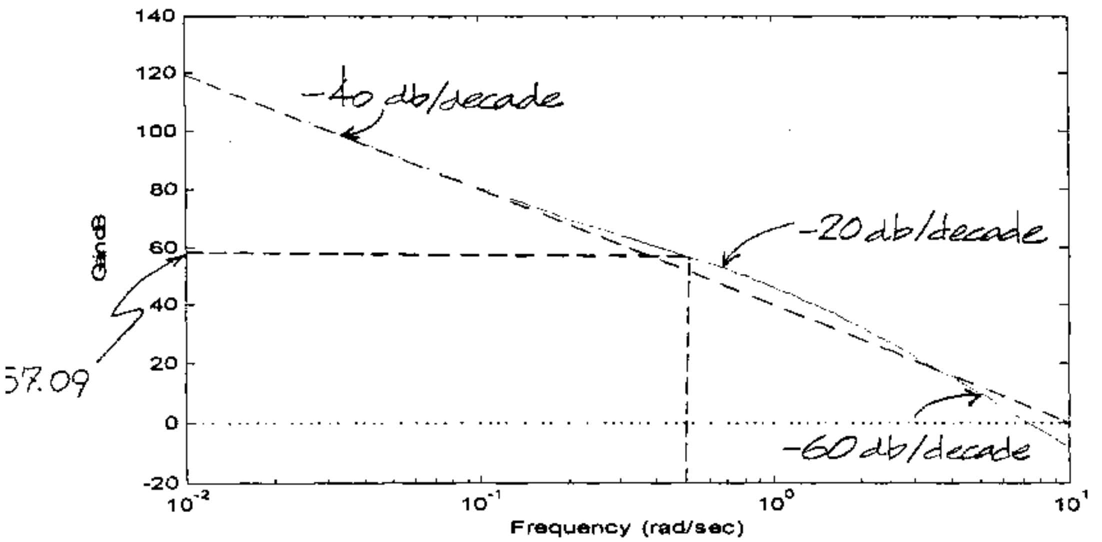
**<u>Άσκηση:</u>** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων:




Να βρεθούν οι τιμές του $K > 0$ για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές, χρησιμοποιώντας το κριτήριο Nyquist.

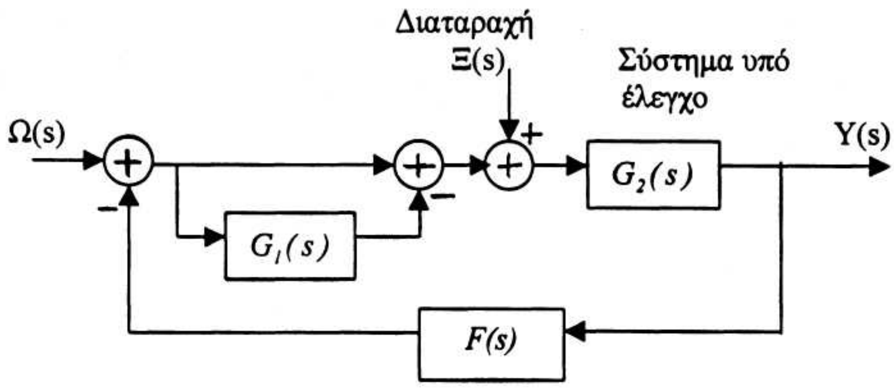
**Άσκηση:** Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου $G(s)=\dfrac{K(1+sT_1)^{\alpha}}{s^{\beta}(1+s)^{\gamma}}$

όπου τα $K, T_1, \alpha, \beta, \gamma$ είναι όλα θετικά, και το αντίστοιχο διάγραμμα Bode του μέτρου,




Να βρεθούν με ακρίβεια οι τιμές των $K, T_1, \alpha, \beta, \gamma$ χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες του διαγράμματος.

**Άσκηση:** Το διάγραμμα βαθμίδων ενός συστήματος δίνεται στο πιο κάτω σχήμα.




Όπου

$$G_1(s)=\frac{1}{s+2},\qquad G_2(s)=\frac{1}{(s+2-j)(s+2+j)}$$

Να βρεθεί ρυθμιστής F(s) του κλάδου ανατροφοδότησης ώστε η επίδραση του θορύβου ξ(t) = δ(t) (μοναδιαία κρουστική) να εξουδετερώνεται στην έξοδο y(t) καθώς t → οο. Ταυτόχρονα το σήμα εξόδου y(t) να ακολουθεί το σήμα εισόδου ω(t) του κλειστού συστήματος, δηλαδή $\underset{t\to\infty}{op}[y(t)-\omega(t)]=0$ για κάθε είσοδο ω(t) στη μόνιμη κατάσταση.

**<u>Άσκηση:</u>** Δίνεται το σύστημα διακριτού χρόνου,

$$x(k+1)=Ax(k),\quad x(0)=x_0$$
$$y(k)=Cx(k)$$

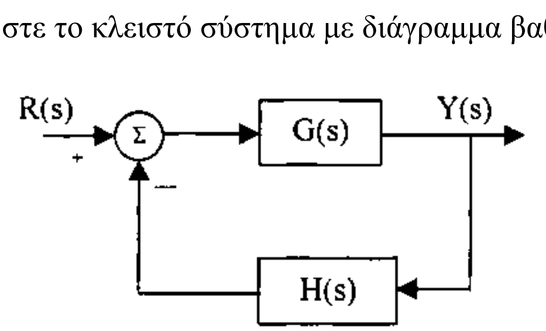
όπου, $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$ , $C=\{0 \quad 1 \quad -2\}$. Έστω ότι γνωρίζουμε την έξοδο $y(k)$, $k=0,1,2$. Μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική κατάσταση $x_0=[\alpha \quad 0 \quad 0]^T$ για $\alpha$ πραγματικό αριθμό;

**<u>Άσκηση:</u>** Θεωρούμε σύστημα διακριτού χρόνου με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(z)=\frac{z-0.5}{\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z+\delta}$$

Να βρεθούν οι συνθήκες για τα $\alpha, \beta, \gamma$ και $\delta$ ούτως ώστε, εάν το σύστημα έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες και είσοδο $u(0)=1$, $u(k)=0$, $k\geq 1$, η απόκριση να τείνει στό μηδέν γρηγορότερα απο το $0.5^k$.

**<u>Άσκηση:</u>** Θεωρήστε το κλειστό σύστημα με διάγραμμα βαθμίδων



όπου

$$G(s) = \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} \quad \text{και} \quad H(s) = K_0 + \frac{K_1}{s} + K_2 s,$$

με $p_1$, $p_2$. $K_0$, $K_1$ και $K_2$ -πραγματικούς αριθμούς. Αποδείξτε ότι με κατάλληλη επιλογή των $K_0$, $K_1$ και $K_2$ μπορούμε να τοποθετήσουμε τους πόλους του κλειστού συστήματος όπου θέλουμε.

**<u>Άσκηση:</u>** Η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος είναι

$$s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma = 0$$

όπου τα α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθούν τα πεδία τιμών των α, β και γ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να ικανοποιούν την ανισότητα: Re(ρίζα) > 1.

**<u>Άσκηση:</u>** θεωρήσατε ένα σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

όπου

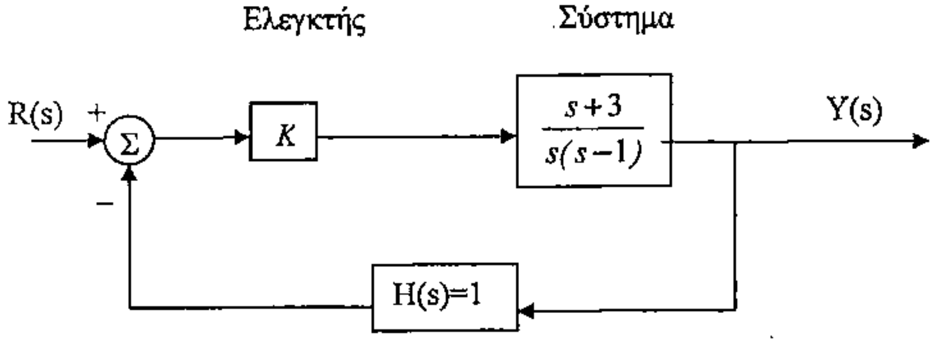
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για τα ερωτήματα που ακολουθούν να δειχθούν αναλυτικά όλα τα στάδια υπολογισμού (εξισώσεις, κ.λ.π.)

α) Να διαγωνοποιηθεί το σύστημα και να βρεθεί ο μεταβατικός πίνακας κατάστασης του συστήματος των εξισώσεων (1).

β) Αν $\chi_0 = (-1 \quad 0)^T$ και u(t)=1 για t>0, να βρεθεί το x(t) για t>0 χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος α).

**Άσκηση:** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων



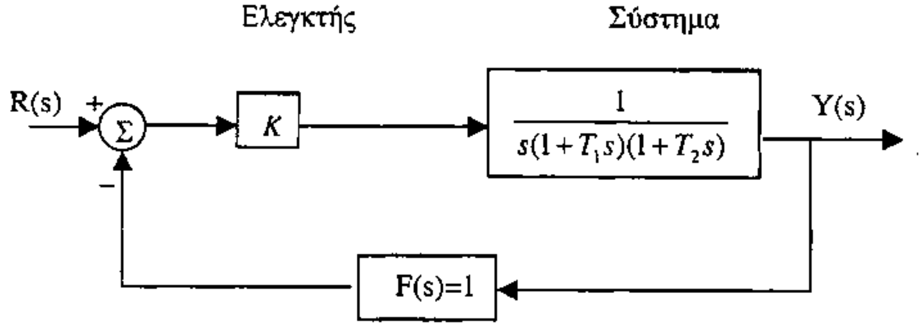

Να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος για $K \in (-\infty, \infty)$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Nyquist. Στην περίπτωση αστάθειας, να βρεθεί ο αριθμός των ασταθών πόλων του κλειστού συστήματος.

**Άσκηση:** Δίνεται το σύστημα διακριτού χρόνου,

$$x_1(k+1) = \frac{x_2(k)}{1 + x_2(k)^2}, \qquad x_2(k+1) = \frac{x_1(k)}{1 + x_2(k)^2}$$

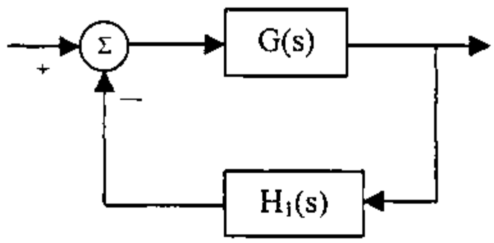
Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος και να μελετηθεί η ευστάθειά τους.

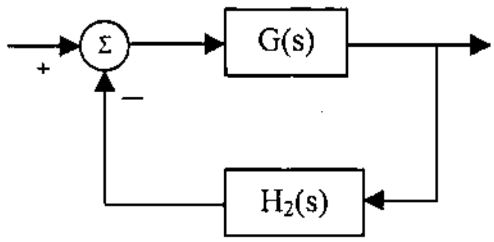
**Άσκηση:** Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων




όπου $T_1 > T_2 > 0$. Να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος για $K \in (-\infty, \infty)$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Nyquist. Στην περίπτωση αστάθειας, να βρεθεί ο αριθμός των ασταθών πόλων του κλειστού συστήματος.

**Άσκηση:** Θεωρήστε δύο συστήματα κλειστού βρόχου με διαγράμματα βαθμίδων




όπου τα $H_1(s)$ και $H_2(s)$ καθιστούν τα συστήματα ευσταθή. Εξετάστε αν το σύστημα που δίνεται από το ακόλουθο διάγραμμα βαθμίδων είναι ευσταθές. Δικαιολογήστε την απάντηση σας.