ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΑΕ ΚΑΤΑ LYAPUNOV

παραδείγματα & ασκήσεις

Σημειώσεις Σπ. Τζαφέστα

Ευστάθεια ΣΑΕ
(Γενικά – Περίληψη)

- Ένα ΣΑΕ χωρίς εισόδων είναι ΑΠΟΛΥΤΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ εάν η έξοδός του είναι:
  - α) φραγμένη για όλα τα $t \geq t_0$
  - β) Επιστρέφει στη θέση ισορροπίας για $t \to \infty$

Ισοδύναμα εάν η κρουστική απόκριση του $h(t)$:

- α) $|h(t)| < \infty$ για κάθε $t \geq t_0$
- β) $|h(t)| \to 0$ για $t \to \infty$

- Ένα ΣΑΕ με είσοδο είναι ευσταθές ΦΕΦΕ εάν
  έξοδος $|y(t)| \leq y_{max} < +\infty$ για κάθε $t \geq t_0$
  όταν είσοδος $|u(t)| \leq u_{max} < +\infty$ για $t \geq t_0$

Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι

- **Πρακτικά:** Ένα ΣΑΕ είναι απόλυτα ευσταθές όταν οι πόλοι του βρίσκονται αυστηρά στο αριστερό ημιεπίπεδο s.
  Για ψηφιακό ΣΑΕ όταν οι πόλοι βρίσκονται (αυστηρά) μέσα στο μοναδιαίο κύκλο.
  Για ΣΑΕ στο χώρο κατάστασης $\dot{x} = Ax$ όταν οι ιδιοτιμές της $\underline{A}$ κείνται στο αριστ. ημιεπ. s (συνεχές) ή μέσα στο μοναδιαίο κύκλο (ψηφιακό).

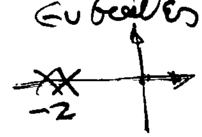
Πρόταση: Ένα ασταθές (γραμμικό) σύστημα μπορεί να γίνει ευσταθές με ανατροφοδότηση κατάστασης.

$\ddot{y} + 4y = 0 \quad (s^2+4=0)$ Περιθ. ευσταθές

$\ddot{y} + 4y = -4\dot{y} \Longrightarrow \ddot{y} + 4\dot{y} + 4 = 0$ ευσταθές

$\Longrightarrow s^2 + 4s + 4 = 0$

$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2$ (διπλή)



ΜΕΘΟΔΟΣ LYAPUNOV (Περίληψη) (1)

* Έστω $\dot{x} = A(t)x$. Η καταστ. ισορρ. $x=0$ είναι ευσταθής κατά Lyapunov (κατά L) εάν για κάθε t_0 και $\varepsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ (όσο μικρό θέλουμε) τέτοιο ώστε
  εάν $\|x_0\| < \delta$ τότε $\|x(t)\| < \varepsilon$ για όλα τα $t \geq t_0$

* Η καταστ. ισορρ. είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής** όταν:
  (α) είναι ευσταθής κατά L
  (β) $\forall\ t_0$ και x_0 αρκετά κοντά στο 0 ισχύει
  $x(t) \to 0$ για $t \to \infty$

* **Συνάρτηση Lyapunov**
  Λέγεται κάθε βαθμωτή συναρτ. $V(x)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες για όλα τα $t \geq t_0$ και x κοντά στην αρχή:
  1. $V(x)$ συνεχής και οι μερ. παραγ. συνεχείς
  2. $V(0)=0$
  3. $V(x)>0$ για $x \neq 0$
  4. $dV(x)/dt = [\partial V/\partial x]^T \frac{dx}{dt} < 0$ για $x \neq 0$

* **Θεώρημα 1**
  Εάν υπάρχει μια συνάρτηση Lyapunov για το x του $\dot{x} = f(x,t)$ όπου $f(0,t)=0$, τότε η κατάσταση $x=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
  (Είναι ολικά ευσταθής εάν η $V(x)$ είναι συναρτ. L για όλα τα x).

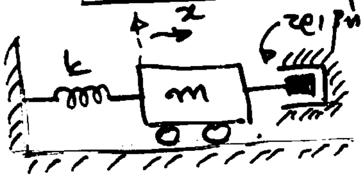
ΣΑΕ Διακριτού Χρόνου
Η $V(x) = V(x(k))$ είναι συνάρτηση Lyapunov εάν:
1. $V(x)$ συνεχής ως προς x
2. $V(0)=0$
3. $V(x)>0$ για $x(k) \neq 0$
4. $\Delta V(x) < 0$ για $x \neq 0$, $\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$

* **Θεώρημα 2**
  Εάν υπάρχει (μπορεί να βρεθεί) μια συν. Lyapunov $V(x(k))$ για το σύστημα $x(k+1) = f(x(k))$ με $f(x(k))=0$ για όλα τα k τότε η κατάσταση $x(k)=0$ (για όλα τα k) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

* **Θεώρημα 3** Το ΣΑΕ $\dot{x} = Ax$ ή $x(k+1) = Ax(k)$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτ. ευσταθές τότε και μόνο τότε εάν η λύση P των $A^TP + PA = -Q$ ή $A^TPA - P = -Q$, αντίστοιχα είναι θετικά ορισμένη για $Q>0$ (θετικά ορισμένο).

Γραμμικό Σύστημα 2ης βαθμού

Ελατήριο – μάζα – τριβή



Δες κύκλωμα RLC
m → L (αυτεπαγωγή)
β → R (τριβή)
k → 1/C (χωρητικότητα)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{dx}{dt} - kx$$

Αρχ. Απομ. x_0

Έχουμε $m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$ Εξισ. Συστήματος

Θέτουμε $x_2 = v = dx/dt$ ταχύτητα

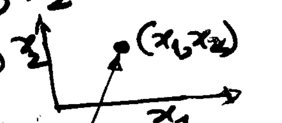
οπότε $m\frac{dv}{dt} + \beta v + kx = 0$ όπου $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

Άρα $mv\frac{dv}{dx} = -(kx + \beta v)$

και $\frac{dv}{dx} = -\left[\frac{kx+\beta v}{mv}\right]$

Μεταβλητές Κατάστασης $x_1 = x$, $x_2 = v$

Ο χώρος κατάστασης ⟹ Επίπεδο (φάσεων)



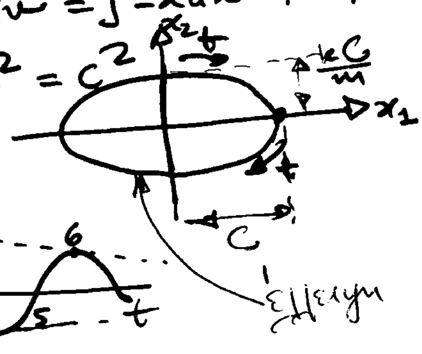
Όταν β=0 (χωρίς τριβή)

$m v\, dv = -kx\, dx \rightarrow \frac{m}{k} v\, dv = -x\, dx$

Ολοκληρώνοντας $\int \frac{m}{k} v\, dv = \int -x\, dx + C^2/2$

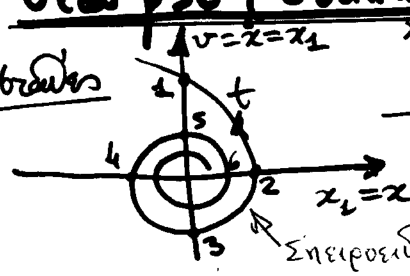
Συνεπώς $\frac{m}{k}v^2 + x^2 = C^2$

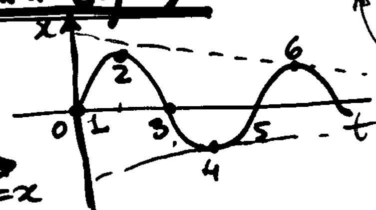
Τροχιά έλλειψη



Όταν β>0 (θετική τριβή)

Ευσταθές

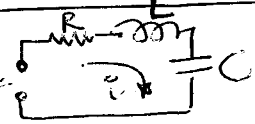




Η ενέργεια συστήματος ως συνάρτηση Lyapunov

Έστω το σύστημα: (R) (1/C)

(L) $m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$ (i ή q)



Θέτουμε

$x_1 = x$ και $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$

$x_2 = v$ = ταχύτητα

Τότε έχουμε το μοντέλο κατάστασης:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2$$

όπου $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, $2\zeta\omega_n = \frac{\beta}{m}$

Η ενέργεια ανά μονάδα μάζας (κινητική) (δυναμική)

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega_n^2 x^2$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}\omega_n^2 x_1^2$$

Δυναμική ενέργεια ελατηρίου
$F = -kx$
E = Εμβαδόν(F, x)
$= \frac{1}{2}$(βάση)(ύψος) $= \frac{1}{2}kx^2$

Ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. $V(\underline{0}) = 0$
2. $V(\underline{x}) > 0$ για $\underline{x} \neq 0$
3. $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ για όλα τα $\underline{x}$ όπου $\frac{dV(\underline{x})}{dt} = \left(\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \frac{d\underline{x}}{dt}$

Πραγματικά: Το σύστημα είναι: $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x}$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}$

και $\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \partial V(\underline{x})/\partial x_1 \\ \partial V(\underline{x})/\partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_n^2 x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Άρα

$$\frac{dV}{dt} = \begin{bmatrix} \omega_n^2 x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \dot{\underline{x}} = [\omega_n^2 x_1 \;\; x_2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [-\omega_n^2 x_2 \;\;\; \omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2\zeta\omega_n x_2^2 < 0$$

συνεπώς για $\zeta > 0$ & $x_2 \neq 0$
(δηλαδή για $\beta > 0$)

Αν $\beta = 0$ τότε $\frac{dV(\underline{x})}{dt} = 0$ για $\underline{x} \neq 0$ και συνεπώς το σύστημα δεν είναι ευσταθές (είναι περιθωριακά ευσταθές)

Για $\beta < 0$ (αρν. τιμή) $\frac{dV}{dt} > 0$ για όλα τα $x \neq 0$. (Σύστημα ασταθές)

Γενίκευση για σύστημα με μη γραμμική τριβή

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^m + kx = 0 \quad \text{όπου}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2^m$$

Εδώ έχουμε

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}\omega_n^2 x_1^2$$

και

$$\dot{V}(\underline{x}) = \begin{bmatrix}\omega_n^2 x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \omega_n^2 x_1 \dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

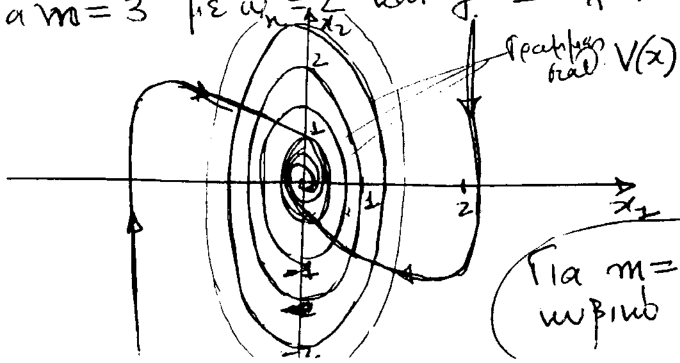
$$= \omega_n^2 x_1 x_2 + x_2(-\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2^m)$$

$$= -2\zeta\omega_n x_2^{m+1}$$

Συνεπώς για $\zeta > 0$ και m περιττό ($m = 1, 3, 5, \dots$) έχουμε $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ και η αρχή συντεταγμένων είναι ευσταθής.

Επιπλέον αφού $\dot{x}_2 \neq 0$ όταν $x_2 = 0$ εκτός από την αρχή συντεταγμένων $(x_1, x_2) = (0,0)$, η $\dot{V}(x)$ δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν σε οποιαδήποτε τροχιά και η ~~ευσταθής~~ αρχή είναι επίσης ασυμπτωτικά ευσταθής.

Για $m = 3$ με $\omega_n = 2$ και $\zeta = 1$ έχουμε τις τροχιές



Για $m = 3$ έχουμε κυβικό [illegible]

Κατασκευή Συναρτήσεων Lyapunov

Έστω $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$

Τότε η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το σημείο (κατάσταση) ισορροπίας $\underline{x}=0$ (αρχή των συντεταγμένων) ευσταθής είναι να υπάρχει μια <u>συνάρτηση Lyapunov</u> της μορφής (τετραγωνική μορφή)

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P}\, \underline{x} \quad , P = \text{συμμ. μήτρα}$$

Έτσι έχουμε

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P}\, \dot{\underline{x}} + \dot{\underline{x}}^T \underline{P}\, \underline{x} = \underline{x}^T [\underline{P}\underline{A} + \underline{A}^T \underline{P}]\underline{x}$$

$$= -\underline{x}^T \underline{Q}\, \underline{x} \qquad \text{για } Q > 0$$

όπου

$$\underline{P}\underline{A} + \underline{A}^T \underline{P} = -\underline{Q} \qquad \text{(Εξίσωση Lyapunov)}$$

<u>Λύση στο Matlab</u>: Εντολή lyap(A^T, Q)

<u>Θεώρημα</u>

Για να είναι η $V(\underline{x})$ συναρτ. Lyapunov, πρέπει η λύση της $\underline{P}\underline{A}+\underline{A}^T\underline{P}=-\underline{Q}$ να είναι θετικά ορισμένη έτσι ώστε $V(\underline{x})>0$ για όλα τα $x\neq 0$, και η μήτρα $\underline{Q}$ πρέπει να είναι τουλάχιστον θετική ημιορισμένη για να έχουμε

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \underline{Q}\, \underline{x} \le 0$$

με την επί πλέον συνθήκη η $\dot{V}(\underline{x})$ να μην είναι εκ ταυτότητος ίση με μηδέν κατά μήκος τροχιάς $\underline{x}\neq 0$.

<u>Λήμμα (Bellman)</u> Η εξίσωση Lyapunov έχει μια μοναδική λύση $\underline{P}$ (όχι γενικά θετικά ορισμένη) για οποιαδήποτε μήτρα Q όταν οι ιδιοτιμές $\{\lambda_j\}$ της $\underline{A}$ ικανοποιούν τη συνθήκη $\lambda_j \neq -\lambda_k$ για όλα τα $j, k = 1, 2, \ldots, n$

<u>Λήμμα Lyapunov</u> Η αρχή $\underline{x}=0$ είναι ασυμπτ. ευσταθής $Re[\lambda_j]<0$ για όλα τα j αν για οποιαδήποτε $Q>0$ υπάρχει θετική ορισμένη συμμετρική P της εξίσωσης Lyapunov.

Εφαρμογή στο γραμμικό ταλαντωτή με απόσβεση

$\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 - 2\zeta\omega_n x_2$

$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x}$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}$

σε RLC

$\omega_n^2 = \dfrac{1}{LC}$

$2\zeta\omega_n = R/L$

Ψάχνουμε για συνάρτ. Lyapunov $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P}\,\underline{x}$

με $\underline{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0$ και $\underline{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \geq 0$

Για να είναι $\underline{P} > 0$ πρέπει (κριτήριο Sylvester):

$p_{11} > 0$

$p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$

(Τρεις άγνωστοι p_{11}, p_{12}, p_{22})
(Εν γένει $n(n+1)/2$ άγνωστοι)

Εδώ έχουμε

$$\underline{A}^T\underline{P} + \underline{P}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n^2 \\ 1 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2p_{12}\omega_n^2 & p_{11} - 2p_{12}\zeta\omega_n - p_{22}\omega_n^2 \\ p_{11} - 2p_{12}\zeta\omega_n - p_{22}\omega_n^2 & 2p_{12} - 4p_{22}\zeta\omega_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε τις τρεις εξισώσεις

$-2\omega_n^2 p_{12} = -q_{11}$

$p_{11} - 2\zeta\omega_n p_{12} - \omega_n^2 p_{22} = 0$

$2p_{12} - 4\zeta\omega_n p_{22} = -q_{22}$

(I) Αν επιλέξουμε $\underline{Q} = \underline{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta\omega_n \end{bmatrix}$ τότε $\underline{P} = \underline{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Άρα

$V_1(x) = \underline{x}^T \underline{P}_1 \underline{x} = \frac{1}{2}\omega_n^2 x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ (Η ενέργεια ανά μονάδα μάζας)

με $\dot{V}_1(x) = -\underline{x}^T \underline{Q}_1 \underline{x} = -2\zeta\omega_n x_2^2$

Για $\omega_n \neq 0$ έχουμε $\underline{P}_1 > 0$. Άρα $V_1(x) > 0$ για όλα τα $\underline{x} \neq 0$ και για $\zeta\omega_n > 0$ έχουμε $Q \geq 0$, όποτε $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ για όλα τα $\underline{x} \neq 0$. Επομένως $\underline{x} = 0$ είναι τουλάχιστον ευσταθές κατά Lyapunov. Επίσης $x_2(t) \neq 0$ εκτός από την αρχή $\underline{x}=0$, οπότε $\dot{V}_1(x(t)) \neq 0$. Συνεπώς η κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}=0$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής εάν $\omega_n \neq 0$ και $\zeta\omega_n > 0$

(II) Τώρα επιλέγουμε $\underline{Q} = \underline{Q}_2 = \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

οπότε αποφεύγουμε πλήρως την περίπτωση $\dot{V}(\underline{x}) = 0$. Στην περίπτωση αυτή η λύση $\underline{A}^T\underline{P} + \underline{P}\underline{A} = -\underline{Q}$ δίνει τη λύση:

$$\underline{P} = \underline{P}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1+4\zeta^2+\omega_n^2}{4\zeta\omega_n} & \dfrac{1}{2\omega_n^2} \\ 1/2\omega_n^2 & \dfrac{1+\omega_n^2}{4\zeta\omega_n^3} \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο Sylvester για να είναι η $\underline{P}$ θετικά ορισμένη θα πρέπει οι ηγούμενες ορίζουσες να είναι

$$\frac{1+4\zeta^2\omega_n^2}{4\zeta\omega_n} > 0 \quad , \det P > 0$$

πράγμα που ισχύει εάν

$\zeta\omega_n > 0$ και $\omega_n \neq 0$

Έτσι έχουμε

$$V_2(x) = \underline{x}^T\underline{P}_2\underline{x} > 0 \quad \text{και} \quad \dot{V}_2(x) = -\underline{x}^T\underline{Q}\underline{x} = -(x_1^2+x_2^2) < 0$$

για όλα τα $\underline{x} \neq 0$, οπότε η αρχή (κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}=0$) είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής εάν $\zeta\omega_n > 0$ και $\omega_n \neq 0$.

Να σχεδιαστούν οι τροχιές και οι γραμμές $V(x)=$σταθ. για περιπτώσεις (I) και (II)

Επαλήθευση με το κριτήριο Routh

$$|\lambda\underline{I} - \underline{A}| = \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2$$

λ^2	1	ω_n^2
λ	$2\zeta\omega_n$	0
λ^0	ω_n^2	

Συνθήκες ευστάθειας

$1 > 0$

$2\zeta\omega_n > 0$

$\omega_n^2 > 0 \Rightarrow \omega_n \neq 0$

ΨΗΦΙΑΚΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΑΕ

$x(k+1) = A\,x(k)$

Θεωρούμε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov της μορφής

$$V(x) = x^T(k)\underline{P}\,x(k) \quad , \underline{P} > 0$$

Τότε έχουμε

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^T(k+1)\underline{P}\,\underline{x}(k+1) - x^T(k)\underline{P}\,\underline{x}(k)$$

$$= (\underline{A}x(k))^T P(\underline{A}x(k)) - \underline{x}^T(k)\underline{P}\,x(k)$$

$$= x^T(k)[A^T P A - P]\underline{x}(k) = -x^T(k)\underline{Q}\,\underline{x}(k)$$

Συνεπώς για να είναι η κατάσταση ισορροπίας $\underline{x}=0$ ασυμπτωτικά ευσταθής θα πρέπει για κάθε $\underline{Q}>0$, η λύση της ψηφιακής εξίσωσης Lyapunov

$$\underline{A}^T\underline{P}\underline{A} - \underline{P} = -\underline{Q}$$

να είναι θετικά ορισμένη. Τότε η $V(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση Lyapunov

<u>Παράδειγμα 1</u>

Έστω ότι $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$

Επιλέγουμε $\underline{Q} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και λύνουμε ως προς $\underline{P}$ την ψηφιακή εξίσωση Lyapunov

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Η λύση είναι: $\underline{P} = \begin{bmatrix} 1.33 & 0 \\ 0 & 1.33 \end{bmatrix} > 0$. Συνεπώς η συνάρτηση $V(x) = x^T(k)P\,x(k)$ είναι συνάρτηση Lyapunov και το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Έστω $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}$. Επιλέγουμε και πάλι $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Τότε έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Σύστημα που έχει τη λύση $p_{11} = 11/5$, $p_{12} = 8/5$ και $p_{22} = 24/5$. Επαληθεύουμε με το κριτήριο Sylvester ότι $\underline{P} > 0$. Άρα η $V(x) = x^T P\underline{x}$ είναι συνάρτ. Lyapunov και το σύστημα είναι ασυμπτ. ευσταθές.

Παράδειγμα 3

Να ελεγχθεί αν ένα σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $s^2+(1-K)s-K$ είναι ευσταθές:

(α) Με το κριτήριο Routh

(β) Με τη μέθοδο Lyapunov

Λύση

(α) Μέθοδος Routh

Ο πίνακας Routh είναι:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & -K \\ s & 1-K & 0 \\ s^0 & -K & \end{array}$$

Επειδή $a_0 = 1>0$ για να είναι ευσταθές το σύστημα θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες

$1-K>0$ και $-K>0$ (ή $K<1$ και $K<0$)

Οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται όταν $\underline{\underline{K<0}}$.

(β) Μέθοδος Lyapunov

Το εξεταζόμενο σύστημα έχει εξίσωση (αντικαθιστούμε το s στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο με τον τελεστή χρονικής παραγώγισης $D=d/dt$):

$$\left(D^2+(1-K)D-K\right)x(t)=0$$

ή

$$\ddot{x}+(1-K)\dot{x}-Kx=0$$

Γράφουμε την εξίσωση αυτή ως:

$$\ddot{x}+\dot{x}-K(\dot{x}+x)=0$$

Συνεπώς, ορίζοντας:

$$x_1=\dot{x}+x \quad \text{και} \quad x_2=x$$

έχουμε:

$$\dot{x}_1=Kx_1$$

$$\dot{x}_2=x_1-x_2$$

Άρα $\underline{A}=\begin{bmatrix} K & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Θα πρέπει να λύσουμε την $\underline{\text{εξίσωση Lyapunov}}$ ως προς $\underline{P}$ με $\underline{Q}=\underline{I}$:

$$\underline{A}^T\underline{P}+\underline{P}\underline{A}=-\underline{Q}$$

και να δούμε κάτω από ποιες συνθήκες η λύση
P είναι θετικά ορισμένη:

Έχουμε

$$\begin{bmatrix} K & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

δηλαδή τις εξισώσεις

$$2Kp_{11}+2p_{12}=-1, \quad Kp_{12}+p_{22}-p_{12}=0, \quad -2p_{22}=-1$$

Η λύση τους είναι

$$p_{11}=\frac{2-K}{2K(K-1)}, \quad p_{12}=\frac{1}{2(1-K)}, \quad p_{22}=\frac{1}{2}$$

Ήτοι:

$$P=\begin{bmatrix} (2-K)/2K(K-1) & 1/2(1-K) \\ 1/2(1-K) & 1/2 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο Sylvester, για να είναι η μήτρα P θετικά ορισμένη, θα πρέπει οι ορίζουσες 1x1, 2x2 να είναι θετικές. Δηλαδή

1x1: $(2-K)/2K(K-1)>0$

2x2: $|P|>0$ ή $\frac{2K}{2K(K-1)}-\frac{1}{2(1-K)}>0$

Ήτοι θα πρέπει

$K(K-1)(2-K)>0$ και $K(K-1)(2-K)>K$

ή $K<0$.

Η πρώτη ανισότητα ισχύει για $1<K<2$ και η δεύτερη δεδομένου ότι $K<0$ τότε επαληθεύεται σαν περιοχή συνθήκη. Εάν το K βρίσκεται στην δεύτερη συνθήκη δίνει $1<K<2$ τότε η δεύτερη συνθήκη δίνει

$$(K-1)(2-K)>1,$$

δηλαδή $-K^2+3K-2>1$ ή $K^2-3K+3<0$,
η οποία δεν ισχύει. Άρα η P είναι θετικά ορισμένη μόνον όταν $K<0$ όπως βρήκαμε (πολύ ευκολότερα) με το κριτήριο Routh. Σημείωση: Στην πράξη για γραμμικά συστήματα το κριτήριο Routh δίνει πολύ ευκολότερα τις συνθήκες ευστάθειας.
Το κριτήριο Routh όμως δεν μπορεί να εφαρμοσθεί στα επόμενα παραδείγματα που το σύστημα είναι μη γραμμικό.

<u>Παράδειγμα 4</u> Να εξεταστεί αν το σύστημα

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2 , \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 x_2 - x_2^3$$

είναι ευσταθές με τη μέθοδο Lyapunov. Δοκιμάστε ως συνάρτηση Lyapunov την

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + k x_2^2 , \quad k>0$$

<u>Λύση</u>

Θα δούμε αν η συνάρτηση $V(\underline{x})$ ικανοποιεί τις συνθήκες για να είναι συνάρτηση Lyapunov.

Η συνθήκη 1 ικανοποιείται (η $V(\underline{x})$ και οι παράγωγοί της είναι συνεχείς ως προς $\underline{x}$)

Η συνθήκη 2 ικανοποιείται: $V(\underline{0}) = 0$

Η συνθήκη 3 ικανοποιείται: $V(\underline{x}) > 0$ για $\underline{x} \neq 0$

Θα εξετάσουμε αν ισχύει η συνθήκη 4. Έχουμε

$$\dot{V}(\underline{x}) = \left(\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \dot{\underline{x}} = 2[x_1, kx_2] \begin{bmatrix} x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ -x_1 - x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$= -2\left[(k-1)x_1x_2 + x_1^4 + (k+1)x_1^2x_2^2 + kx_2^4\right]$$

Επιλέγοντας $k=1$ παίρνουμε

$$\dot{V}(\underline{x}) = -2(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

Βλέπουμε ότι προφανώς ισχύει (με $k=1$):

$$\dot{V}(\underline{x}) < 0 \quad \text{για} \quad \underline{x} = [x_1, x_2]^T \neq 0$$

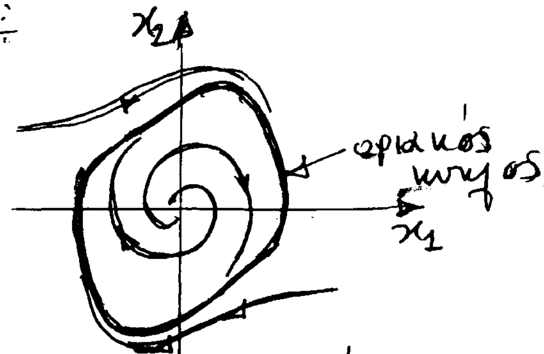
Άρα η συνθήκη 4 ικανοποιείται και η $V(\underline{x})$ με $k=1$ είναι πράγματι μια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα που μας δόθηκε. Συνεπώς η κατάσταση ισορροπίας $\underline{x} = \underline{0}$ (αφού $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$ με $f(\underline{0}) = \underline{0}$) είναι ευσταθής (ή διαφορετικά λέμε το σύστημα είναι ευσταθές στο σημείο ισορροπίας $\underline{x} = \underline{0}$).

<u>Σημ.</u> Αν η $V(\underline{x})$ δεν ήταν συνάρτηση Lyapunov αυτό δεν θα σήμαινε απαραίτητα ότι το σύστημα δεν είναι ευσταθές στο $\underline{x} = \underline{0}$ γιατί μπορεί κάλλιστα να βρούμε μια άλλη συνάρτηση $V(\underline{x})$ για να είναι συνάρτηση Lyapunov. Αν δεν μπορούμε να βρούμε καμία συνάρτηση Lyapunov τότε μόνο το σύστημα είναι <u>ασταθές</u>.

Παρ. 5: Σύστημα (Εξίσωση) Van der Pol

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\(1-x_1^2)x_2-x_1\end{bmatrix}, \quad x(0)=x_0$$

Τροχιές:



- Τροχιές που ξεκινάνε εκτός του οριακού κύκλου συγκλίνουν προς αυτόν. Όμοιως τροχιές που ξεκινάνε μέσα σ' αυτόν απολήγουν στον οριακό κύκλο.
- Η κατάσταση $\underline{x}=[x_1,x_2]^T=\underline{0}$ (η αρχή) είναι ασταθής αλλά όλες οι τροχιές είναι φραγμένες.

Παράδ. 6: Αρμονικός ταλαντωτής

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \quad \underline{\Phi}(t,0)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\-\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

= Ιδιοτιμές της A: $\pm j$

= Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2

$$\|\underline{x}(t)\|_2 \le \|\underline{\Phi}(t,t_0)\|_2\,\|\underline{x}_0\|_2 < \varepsilon = \delta$$

γιατί $\|\underline{\Phi}(t,t_0)\|_2 = 1$. (Δηλαδή εάν $\|x_0\|_2 < \varepsilon$ τότε $\|\underline{x}(t)\|_2 < \delta = \varepsilon$). Άρα το σύστημα ευσταθές κατά Lyapunov (ΟΧΙ ΟΜΩΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ!)

Παραδ. 7 : Σύστημα $dx/dt = -x/t$.
$\phi(t,t_0) = t_0/t$ • Για αρχ. χρόνο $t_0 > 0$ το σύστημα είναι ασυμπτ. ευσταθές. Η απόκριση όμως δεν τείνει στο μηδέν εκθετικά. Τώρα για $t_0 \leq 0$, το σύστημα είναι ασταθές και η ασυμπτωτική ευστάθεια δεν είναι ομοιόμορφη.

Παραδ. 8: Σύστημα $dy/dt = u$
Κρουστική απόκριση: $h(t,\tau) = U(t-\tau)$ (βηματ. συνάρτηση εφαρμόζεται στο χρόνο τ)
Τότε
$$\int_{t_0}^{t} |U(t-\tau)|\, d\tau = t - t_0 \to \infty$$
για $t \to \infty$ (μη φραγμένο)
Άρα το σύστημα δεν είναι εξωτερικά ευσταθές, μολονότι το γειτονικό εισόδου σύστημα είναι ευσταθές κατά Lyapunov.

Παραδ. 9 : Σύστημα $dx/dt = -x$
- Η συνάρτηση $V(x) = x^2$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 7. Ήτοι
((1)) $V(x) = x^2$, $\partial V/\partial x = 2x$ είναι συνεχείς
((2)) $V(0) = 0 = 0$
((3)) $V(x) = x^2 > 0$ για όλα τα $x \neq 0$
((4)) $\dfrac{dV}{dt} = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^T \dfrac{dx}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt} = -2x^2 < 0$ για όλα τα $x \neq 0$

Άρα η $V(x) = x^2$ είναι μια συναρτ. Lyapunov.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ένα σύστημα $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x}$ με:

(α) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ και $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(β) $\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ και $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(γ) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ και $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ζητείται να λυθεί η αντίστοιχη εξίσωση Lyapunov $\underline{A}^T\underline{P} + \underline{P}\,\underline{A} = -\underline{Q}$ σε κάθε περίπτωση και να βρεθούν τα εξής:

- Αν η λύση είναι μοναδική
- Αν υπάρχει θετική ορισμένη λύση και να υπολογισθεί
- Αν η αρχή $\underline{x} = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής ή όχι
- Να επαληθευτούν τα αποτελέσματα της τελευταίας ερώτησης με το κριτήριο Routh.

2. (α) Δίνεται σύστημα διακριτού χρόνου $x(k+1) = Ax(k)$ με:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Προσδιορίστε μια συνάρτηση Lyapunov και μελετήστε την ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας $x(k) = 0$.

(β) Ομοίως για το σύστημα με $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Να βρεθούν οι γενικές συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές του συστήματος:

(α) $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t)$, $\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

(β) $\underline{x}(k+1) = \underline{A}'\underline{x}(k)$, $\underline{A}' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$

για να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές με τις εξής δύο μεθόδους: (i) Τη μέθοδο Lyapunov και (ii) με αλγεβρικό κριτήριο της επιλογής σας.