

Εξέταση στα Προχωρημένα ΣΑΕ

Όνοματεπώνυμο Σπουδαστή:

Αριθμός Μητρώου:

Θέμα 1^ο (Μονάδες 2.3). Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(t) \in \mathbb{R}^5, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \\ y &= Cx + Du, \quad y(t) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ισούται με

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

και για το οποίο είναι γνωστό ότι

$$\text{rank}[B|AB|\dots|A^4B] = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^4 \end{bmatrix} + 3.$$

Να ευρεθεί το

$$\text{rank}[B|AB|\dots|A^4B].$$

Θέμα 2^ο (Μονάδες 2.3). Αν η μήτρα διέλευσης κατάστασης (state transition matrix) $\Phi(t, 0)$ του συστήματος $\dot{x} = Ax$, είναι ίση με

$$\Phi(t, 0) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3,$$

όπου A, A_0, A_1, A_2, A_3 σταθεροί πίνακες διαστάσεων $n \times n$, $n \leq 6$ και ο A_3 είναι μη μηδενικός, να βρεθούν οι διαστάσεις και οι μορφές Jordan που μπορεί να έχει ο A .

Θέμα 3^ο (Μονάδες 2.3). Έστω πως γνωρίζουμε ότι τα συστήματα

$$\dot{x} = Ax + B_1 u, \quad x(t) \in \mathbb{R}^3, \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad (\Sigma 1)$$

$$\dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(t) \in \mathbb{R}^3, \quad u(t) \in \mathbb{R}^2, \quad (\Sigma 2)$$

όπου A, B_1, B_2 σταθεροί πίνακες, είναι πλήρως ελέγξιμα. Αληθεύει ότι το σύστημα

$$\dot{x} = Ax + (\lambda B_1 + (1 - \lambda) B_2) u \quad (\Sigma)$$

είναι πλήρως ελέγξιμο για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ σταθερό; Σχολιάστε.

Θέμα 4^ο (Μονάδες 3.6). Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα:

$$\ddot{x} = x + u, \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in [-1, 1].$$

Επιθυμούμε το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση $x(0) = -\frac{1}{2}$, $\dot{x}(0) = 0$ στην κατάσταση $x = 0$, $\dot{x} = 0$ στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

I. Να γραφούν οι εξισώσεις (συμπεριλαμβανομένων των οριακών συνθηκών) που προκύπτουν από την εφαρμογή της αρχής του Pontryagin. (Μονάδες 1.2).

II. Να βρεθεί το βέλτιστο $u(t)$ και τα αντίστοιχα $x(t)$, $\dot{x}(t)$. (Μονάδες 2.4).

Διάρκεια εξέτασης: 3:00'

Όλες οι απαντήσεις πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες.

Καλή Επιτυχία.