

Εξέταση στις Προχωρημένες Τεχνικές Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Όνοματεπώνυμο Σπουδαστή:

Αριθμός Μητρώου:

Θέμα 1^ο (Μονάδες: 2): Θεωρήστε ένα σύστημα στη μορφή $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ με χώρο κατάστασης $x_k \in \{1, 2, 3, 4\}$ και $u_k \in \{0, 1\}$ και το κριτήριο κόστους $J = \sum_{k=1}^2 g(x_k, u_k)$. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πίνακα τιμών:

x_k	u_k	$f(x_k, u_k)$	$g(x_k, u_k)$
1	1	2	1
2	1	3	2
3	1	1	1
4	1	3	2
1	2	4	3
2	2	4	1
3	2	1	1
4	2	4	1

Με χρήση του δυναμικού προγραμματισμού, να υπολογιστεί ο ελεγκτής κλειστού βρόχου $u_k = \gamma(x_k, k)$, που ελαχιστοποιεί το κριτήριο κόστους, υπό την προϋπόθεση ότι $x_3 = 4$.

Θέμα 2^ο (Μονάδες: 2): Για το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 23 & -57 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 8 & 9 & 12 & -4 & 2 \\ -23 & 57 & 61 & 4 & -7 & 8 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -61 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 3 \ 0 \ 0 \ 2 \ 6 \ 0 \ 0]x,$$

να βρεθεί η τάξη της συνάρτησης μεταφοράς στην απλούστερη δυνατή (ανάγωγη) μορφή της. Σχολιάστε.

Θέμα 3^ο (Μονάδες: 2,5): Θεωρήστε το σύστημα $\dot{x} = \frac{x}{4} - x^3 + u$, και το κριτήριο

$J = \int_0^{\infty} (x^4 + u^2) dt$. Με χρήση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi-Bellman, να δείξετε ότι ο ελεγκτής $u = -x/2$, ελαχιστοποιεί το κριτήριο. Να βρεθεί το ελάχιστο κόστος συναρτήσει του $x(0)$.

Θέμα 4^ο (Μονάδες: 2,5 = 1,25 + 1,25): Έστω το ακόλουθο υπό έλεγχο σύστημα:

$$\dot{x} = ax + u,$$

με $u(t) \geq 0$ και το κριτήριο κόστους:

$$J = \frac{1}{2}x^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (qx^2 + ru^2) dt, \quad q \geq 0, r > 0$$

(i) Να διατυπωθούν οι αναγκαίες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση του J , με βάση την αρχή του Pontryagin.

(ii) Για $a = q = 0$, $T = r = 1$ και $x(0) = -1$, να βρεθεί το $u(t)$ που ελαχιστοποιεί το J .

Θέμα 5^ο (Προαιρετικό. Μονάδες: 2) : Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με διακεκριμένες, πραγματικές ιδιοτιμές, με μη μηδενικό πραγματικό μέρος. Να βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το παρακάτω σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

ώστε για οποιοδήποτε $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ να υπάρχει ένα σήμα ελέγχου $u(t)$ με $|u(t)| \leq 1$ και ένα

$T > 0$ ώστε αν $x(0) = 0$ να ισχύει $x(T) = \bar{x}$.

(Υπόδειξη. Βρείτε συνθήκες σε συστήματα με διάσταση 1. Στη συνέχεια θεωρήστε τη διαγώνια (Jordan) μορφή του πίνακα A . Σε αυτές τις συντεταγμένες, βρείτε τις ζητούμενες συνθήκες. Πώς τροποποιούνται οι συνθήκες αυτές στις αρχικές συντεταγμένες;).

Διάρκεια εξέτασης: 3:00'

Όλες οι απαντήσεις πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες.

Καλή Επιτυχία.