ΕΜΠ–ΣΗΜΜΥ 09-02-2011

Εξέταση στις Προχωρημένες Τεχνικές ΣΑΕ

Ονοματεπώνυμο Σπουδαστή:

Αριθμός Μητρώου:

Θέμα 1ο(Μονάδες 1.2). Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} x,$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Να δείξετε ότι η έξοδος y συγκλίνει στο 0 τουλάχιστον όσο γρήγορα συγκλίνει το e^{-2t}.

Θέμα 2ο(Μονάδες 1.2). Για το σύστημα

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

να βρεθεί ο ελεγκτής που ελαχιστοποιεί την τιμή του κριτηρίου

$$J = \int_0^\infty [4x_1^2(t) + 12x_2^2(t) + u^2(t)]dt.$$

Θέμα 3ο(Μονάδες 2.6). Έστω το σύστημα

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.69 & 0.31 & 1 \\ 0.62 & 1.38 & 1 \\ 0.25 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k,$$

για το οποίο θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες x_0 είναι μηδενικές. Να βρεθεί για $N = 0, 1, 2, \ldots$ η τιμή του ακόλουθου ελαχίστου:

$$\min_{u_0, u_1, \ldots, u_N} ||x_{N+1} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}||_2.$$

Θέμα 4ο(Μονάδες 3.2). Υποθέτουμε ότι για το σύστημα

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k,\ y_k = x_k,\ u_k \in \mathbb{R},\ x_k \in \mathbb{R}^n, n > 1$$

ισχύει $Ab = \lambda b,\ b \neq 0$.

I. Να δείξετε ότι το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

II. Να μελετηθεί το σύστημα ως προς την ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου και την ευστάθεια κατά Lyapunov του ελεύθερου συστήματος για τις διάφορες τιμές του λ.

III. Να βρεθεί σε ποια σημεία του χώρου κατάστασης μπορεί να μεταβεί το σύστημα από μηδενικές αρχικές συνθήκες για τις ακόλουθες περιπτώσεις και για τις διάφορες τιμές του λ:

α) $u_k \in \mathbb{R}$.

β) $u_k \in [0,1]$.

γ) $u_k \in \{0,1\}$ (η περίπτωση αυτή να μελετηθεί για $\lambda = 2$ και $\lambda = \frac{1}{2}$).

IV. Έστω τώρα ότι $\lambda = 10$ και $u_k \in \{0,1,\ldots,9\}$. Να βρεθούν κατάλληλες ακολουθίες ελέγχου που οδηγούν το σύστημα από μηδενικές αρχικές συνθήκες στις ακόλουθες καταστάσεις: $1453b,\ 1821b,\ 1940b$ (μία ακολουθία ελέγχου για κάθε μία από τις καταστάσεις αυτές).

Θέμα 5ο(Μονάδες 3). Έστω ότι επιθυμούμε να μεταβεί το σύστημα

$$\dot{x_1} = 1 - u^2$$
$$\dot{x_2} = u + \lambda x_2$$

από το $(0,0)$ στην ευθεία $x_1 + x_2 = 1$ στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

I. Για $\lambda = 0$ και $u(t) \in \mathbb{R}$ να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός χρόνος και η αντίστοιχη είσοδος $u^*(t)$.

II. Για $u(t) \in [0,1]$ να δειχτεί ότι την τελική χρονική στιγμή T ισχύει $u^*(T) = \frac{1}{2}$ ανεξάρτητα από την τιμή του λ, και να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η βέλτιστη είσοδος $u^*(t)$ να είναι ίση με 1 κατά το διάστημα $[0, \frac{T}{2}]$ και μόνο για αυτό το διάστημα.

Διάρκεια εξέτασης: 3:00′
Μπορείτε να απαντήσετε μόνο σε ένα εκ των θεμάτων 1 και 2.
Όλες οι απαντήσεις πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες.
Καλή Επιτυχία.