ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Διευθυντής Γ.Π. Παπαβασιλόπουλος

Άσκηση για το μάθημα: «Προχωρημένες Τεχνικές Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου»

Τίτλος Άσκησης: "Βέλτιστος Έλεγχος Ηλεκτρικού Τρένου"

Επιμέλεια: Ι. Κορδώνης Α. Χαραλαμίδης

Ακαδημαϊκό έτος 2009-2010

Η άσκηση αυτή αφορά στο βέλτιστο έλεγχο ενός ηλεκτρικού τρένου σε ανοικτό και κλειστό βρόχο. Στο πρώτο μέρος της εργασίας θα ασχοληθούμε με κάποια απλά προβλήματα βέλτιστου ελέγχου για εξοικείωση.

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ: ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ (Προαιρετικό)

1. Για το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

με $b = 1$, να βρεθεί το $-1 \le u(t) \le 1$ το οποίο λύνει το πρόβλημα ελάχιστου χρόνου με $x(0) = [-1 \quad 0]^T$ και $x(T) = [0 \quad 0]^T$. Στη συνέχεια, να βρεθεί αντίστοιχος νόμος ελέγχου: $u = \gamma(x)$ ο οποίος λύνει το ίδιο πρόβλημα. Να προσομοιωθούν τα συστήματα ανοικτού και κλειστού βρόχου. Να συγκριθούν οι αποκρίσεις των συστημάτων ανοικτού και κλειστού βρόχου όταν $b = 1{,}02$.

2. Για το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

με αρχικές συνθήκες: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$ να βρεθεί το $u(t)$ που ελαχιστοποιεί το κριτήριο:

$$J = 5(x_1(10) - 10)^2 + 8x_2^2(10) + \int_0^{10} u^2 dt .$$

3: Για το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \omega t \\ \sin \omega t & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

να βρεθεί ελεγκτής στη μορφή $u = f(x,t)$ που να ελαχιστοποιεί το κριτήριο:

$$J = x(T)^T Q_f x(T) + \int_0^T x^T Q x + R u^2 dt$$

όπου: $Q_f = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 1$,$T = 100$ και $\omega = 2\pi$ (δηλαδή να βρεθεί η συνάρτηση f).

Στη συνέχεια, να προσομοιωθεί το σύστημα κλειστού βρόχου. Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα στην περίπτωση που $\omega = 0$ και $T = \infty$.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ: ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΤΡΕΝΟΥ

Περιγραφή

Στην άσκηση αυτή, ασχολούμαστε με τον έλεγχο ελάχιστης ενέργειας ενός ηλεκτρικού τρένου. Θεωρούμε ότι το τρένο κινείται από μια μηχανή συνεχούς ρεύματος με σταθερή διέγερση και ελεγχόμενο ρεύμα τυμπάνου. Η μηχανή ασκεί ροπή στους τροχούς μέσω ενός συστήματος μετάδοσης κίνησης. Επίσης θεωρούμε ότι υπάρχει δυνατότητα αναγεννητικής πέδησης (δηλαδή η ηλεκτρική μηχανή μπορεί να "φρενάρει" το τρένο, κερδίζοντας ενέργεια).

Μοντελοποίηση

Οι ηλεκτρικές εξισώσεις (μόνιμης κατάστασης) της μηχανής είναι:

$$V_a = RI_a + \omega\left(M_{af} I_f\right)$$

όπου V_a η τάση τυμπάνου, R η αντίσταση του τυλίγματος τυμπάνου, ω η γωνιακή ταχύτητα της μηχανής και M_{af} , I_f μπορούν να θεωρηθούν σταθερές για το συγκριμένο πρόβλημα (αμοιβαία επαγωγή στάτη – δρομέα και ρεύμα του στάτη αντίστοιχα). Η ροπή της μηχανής δίνεται από:

$$T = \left(M_{af} I_f\right) I_a .$$

Στο τρένο ασκείται τριβή ανάλογη της ταχύτητας και αντίσταση του αέρα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας.

Με βάση τα παραπάνω, ανάγοντας όλες τις ροπές αδράνειας και τις δυνάμεις, στον άξονα μιας ρόδας μπορούμε να γράψουμε το μοντέλο του τρένου σε μορφή εξισώσεων κατάστασης:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2 x_2^2 + k_3 u$$

όπου x_1 είναι η θέση του τρένου, x_2 η ταχύτητα και u το ρεύμα τυμπάνου της μηχανής.

Βέλτιστος έλεγχος

4. Για το κριτήριο κόστους:

$$J = c_1\left(x_1(T) - x_{1f}\right)^2 + c_2 x_2^2(T) + \int_0^T k_4 x_2 u + Ru^2 dt,$$

να γραφούν οι αναγκαίες συνθήκες για την ελαχιστοποιησή του και να διατυπωθεί το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών υπό την προϋπόθεση ότι $I_{\min} \le u \le I_{\max}$. Αρχικά θεωρούμε ότι $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

5. Να λυθεί αριθμητικά με χρήση του Matlab το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών και να προσομοιωθεί το σύστημα. Οι τιμές των σταθερών είναι:

$k_1 = 0{,}5$, $k_2 = 0{,}1$, $k_3 = 1$, $c_1 = c_2 = 1000$, $x_{1f} = 10$, $R = 0{,}3$, $k_4 = 10$ $I_{\min} = -2$, $I_{\max} = 2$ και $T = 10$

6. Να προσομοιώσετε το σύστημα με την είσοδο που προέκυψε στο προηγούμενο ερώτημα αλλά έχοντας αρχικές τιμές στα x_1 και x_2 ελαφρώς διαφορετικές από πριν.

Στη συνέχεια θα γραμμικοποιήσουμε το σύστημα γύρω από τη βέλτιστη τροχιά. Γενικά, αν το σύστημα $\dot{x} = f(x,u)$ ικανοποιείται από τα $x(t)$, $u(t)$ και θεωρήσουμε μια μικρή απόκλιση $y(t)$ από την τροχιά και μια μικρή απόκλιση $v(t)$ στην είσοδο θα έχουμε:

$$\frac{d(x(t)+y)}{dt} = f(x(t)+y, u(t)+v) \Rightarrow$$

$$\dot{x} + \dot{y} \approx f(x(t), u(t)) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} y + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} v \Rightarrow$$

$$\dot{y} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} y + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} v$$

Το τελευταίο σύστημα είναι γραμμικό και συμβολίζοντας $A(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))}$ και $B(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))}$ παίρνουμε: $\dot{y} = A(t)y + B(t)v$

Στη συνέχεια, με στόχο το σύστημα να μείνει κοντά στη βέλτιστη τροχιά, θα προσδιορίσουμε το $v(y)$ που ελαχιστοποιεί ένα τετραγωνικό κριτήριο.

7. Να βρεθεί το $v(y)$ το οποίο ελαχιστοποιεί το κριτήριο:

$$J_2 = 20y_1^2(T) + 20y_2^2(T) + \int_0^T 2y_1^2 + 2y_2^2 + v^2 dt$$

8. Να προσομοιωθεί το σύστημα με είσοδο έλεγχου $u(t) + v(y)$ στην περίπτωση που οι αρχικές τιμές είναι ελαφρά διαφορετικές. Να συγκρίνετε την απόκριση αυτή, με την απόκριση με χρήση ελέγχου ανοικτού βρόχου (ερώτημα 6).

9. (**Προαιρετικό**) Να λυθεί το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου 4,5 με χρήση δυναμικού προγραμματισμού και να συγκριθεί με τη λύση που προέκυψε στο 8 αν οι αρχικές τιμές των x_1 και x_2 είναι ελαφρώς διαφορετικές. Για την εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού μπορείτε να διακριτοποιήσετε το χρόνο και τις μεταβλητές κατάστασης.

Βιβλιογραφία:

Για τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου και ειδικά για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων:

Bryson and Ho “Applied Optimal Control” Ch. 7 στο site του μαθήματος

Για την εφαρμογή κάποιων άλλων μεθόδων σε προβλήματα βέλτιστου ελέγχου τρένου δείτε:

P. Howlett, P. Pudney and X. Vu "Local energy minimization in optimal train control" Automatica 2009