ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
Διευθυντής Γ.Π. Παπαβασιλόπουλος

Τίτλος Άσκησης:

Sampling, Quantization, Jitter noise, Chaos

Επιμέλεια: Ι. Κορδώνης Υ.Δ., Dr Ε. Σαρρή

Ερωτήσεις για το μάθημα Προχωρημένες Τεχνικές ΣΑΕ: 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 16

Ερωτήσεις για το μάθημα Μη Γραμμικά ΣΑΕ και Εφαρμογές: 10, 11, 15, 16, 17,18

Ακαδημαϊκό έτος: 2010-2011

Μέρος 1

Στο πρώτο μέρος θα μελετήσουμε χαοτικά φαινόμενα στο πολύ απλό δυναμικό σύστημα:

$$x_{k+1} = f\left(x_k\right) \tag{1}$$

όπου:

$$f\left(z\right)=\begin{cases}2z & \text{αν } 0\leq z\leq 1/2\\ 2-2z & \text{αν } 1/2<z\leq 1\end{cases} \tag{2}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η f απεικονίζει το διάστημα $\left[0,1\right]$ στο διάστημα $\left[0,1\right]$.

Ερώτηση 1: Να γίνει γραφική παράσταση των $f, f^2 = f\circ f, f^3 = f\circ f\circ f$ και $f^4 = f\circ f\circ f\circ f$.

Ερώτηση 2: Να βρεθούν όλα τα σταθερά σημεία των f, f^2, f^3, f^4 (σταθερό σημείο της f^i είναι κάποιο $x\in\left[0,1\right]$ τέτοιο ώστε $f^i\left(x\right)=x$). Να σχεδιαστούν κάποιες περιοδικές τροχιές στη γραφική παράσταση της f.

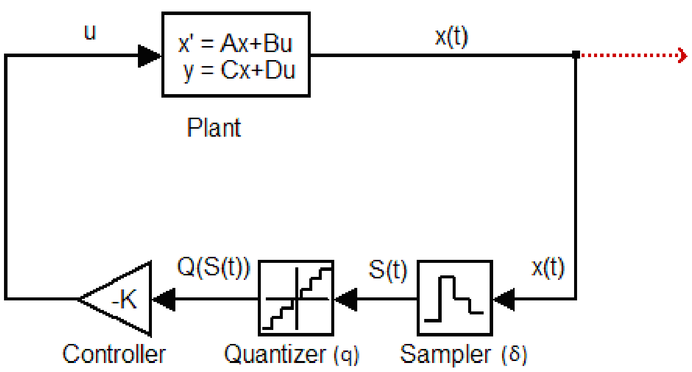
Ερώτηση 3: Να βρεθούν σημεία τα οποία σε πεπερασμένα βήματα εισέρχονται σε κάποια περιοδική τροχιά (eventually periodic). Ποιο είναι το πλήθος των σημείων που είναι περιοδικά και eventually periodic;

Ερώτηση 4: Σχεδιάστε τροχιές που προκύπτουν από επαναλήψεις της f για διάφορες αρχικές συνθήκες. Σχολιάστε.

Μέρος 2

Περιγραφή

Στην παρούσα άσκηση θα ασχοληθούμε με την επίδραση της διακριτοποίησης και της κβάντισης στα συστήματα ελέγχου. Για το σκοπό αυτό θα μελετήσουμε το σύστημα ελέγχου του παρακάτω σχήματος:



Εικόνα 1: Υπό μελέτη σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου με δειγματολήπτη και κβαντιστή

Για απλότητα και ευκολία στη θεωρητική ανάλυση, θα μελετήσουμε τα φαινόμενα που παρουσιάζονται θεωρώντας ότι το υπό έλεγχο σύστημα (plant) έχει την απλούστερη δυνατή μορφή:

$$\dot{x} = ax + u, \quad y = x \tag{3}$$

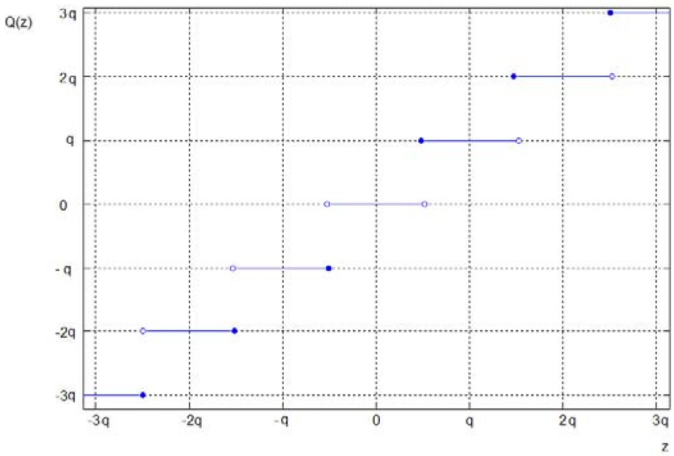
Αναφορικά με τα υπόλοιπα στοιχεία του συστήματος ελέγχου, ο ελεγκτής είναι γραμμικός και έχει τη μορφή:

$$u(z) = -kz, \tag{4}$$

ο δειγματολήπτης έχει τη μορφή:

$$S\left(x(t)\right) = x(n\delta) \quad \text{για } n\delta \le t < (n+1)\delta \text{ με } n \in N = \{1,2,3,...\}$$
(5)

και ο κβαντιστής έχει τη μορφή: $Q_q(z) = q \arg\min_{n \in Z} \left(|z - nq|\right)$. (6)



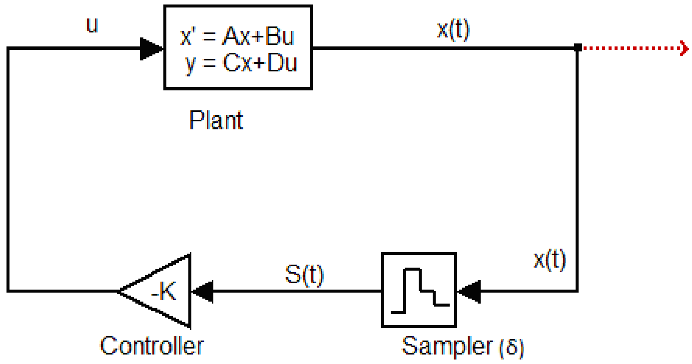
Για παράδειγμα:
$Q_1(2,4) = 2, \quad Q_1(1,6) = 2,$
$Q_1(-1,2) = -1, \; Q_1(-1.6) = -2$
$Q_1(0,5) = 1, \; Q_1(-0,5) = -1$.

Δηλαδή το 0,5q στρογγυλοποιείτε προς την τιμή με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Οι τιμές των δ και q είναι στα περισσότερα συστήματα ελέγχου πολύ μικρές. Σε συστήματα στα οποία έχουμε περιορισμένη δυνατότητα μεταφοράς της πληροφορίας της μέτρησης στον ελεγκτή, πιθανόν τα δ και q να έχουν μεγάλες τιμές. Θα μελετήσουμε φαινόμενα τα οποία συμβαίνουν όταν τα δ και q έχουν τιμές μη αμελητέες.

Θεωρητικό μέρος

Αρχικά θεωρούμε το σύστημα χωρίς κβάντιση:



Εικόνα 2: Υπό μελέτη σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου με δειγματολήπτη, χωρίς κβαντιστή

Ερώτηση 5: Να βρεθεί μια διακριτή περιγραφή του παραπάνω συστήματος κλειστού βρόχου στη μορφή:

$$x\left(\left(n+1\right)\delta\right)=f\left(x\left(n\delta\right)\right). \tag{7}$$

Ερώτηση 6: Να βρεθούν οι τιμές του k που καθιστούν το σύστημα διακριτού χρόνου (7) ασυμπτωτικά ευσταθές. Για μια τέτοια τιμή του k είναι το σύστημα κλειστού βρόχου της Εικόνας 2 ασυμπτωτικά ευσταθές; Για ποιες τιμές του k το $x(t)\to 0$ μονότονα;

Στη συνέχεια εισάγουμε ξανά τον κβαντιστή και επιστρέφουμε στο σύστημα της Εικόνας 1 .

Ερώτηση 7: Να βρεθεί μια διακριτή περιγραφή του συστήματος κλειστού βρόχου της Εικόνας 1 στη μορφή:

$$x_q\left(\left(n+1\right)\delta\right)=f_q\left(x_q\left(n\delta\right)\right) \tag{8}$$

και στη συνέχεια να βρεθεί αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό του $x_q(t)$.

Ερώτηση 8: Να βρεθούν όλα τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (8) για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων.

Ερώτηση 9: Είναι το 0 ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (8); Η ανάλυση μπορεί να γίνει ξεχωριστά για $a>0$ και $a\le 0$.

Ερώτηση 10: Να βρεθούν συνθήκες για τα $\delta, q, x(0)$ έτσι ώστε $x_q(t)\to 0$. Η ανάλυση μπορεί να γίνει ξεχωριστά για $a\ge 0$ και $a<0$ (Υπόδειξη: στην περίπτωση που $a\ge 0$ παρατηρήστε ότι αν $x_q(t)\to 0$ τότε $x_q(n\delta)\to 0$ σε πεπερασμένα βήματα).

Ερώτηση 11: Υποθέτουμε ότι $a>0$. Δείξτε ότι για $\delta, q>0$ και k τέτοιο ώστε να είναι το (7) ασυμπτωτικά ευσταθές, υπάρχει ένα $\mathrm{M}>0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $x_q(0)$

να υπάρχει ένα $\mathrm{T}>0$ έτσι ώστε $\left|x_q\left(t\right)\right| \leq M$ για κάθε $t \geq T$. Δείξτε επίσης ότι για δεδομένο δ και k που καθιστά το (7) ασυμπτωτικά ευσταθές και $\mathrm{M}>0$ οσοδήποτε μικρό υπάρχει ένα $q>0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $x_q\left(0\right)$ να υπάρχει ένα $\mathrm{T}>0$ έτσι ώστε $\left|x_q\left(t\right)\right| \leq M$ για κάθε $t \geq T$ (δηλαδή για $q \to 0$ ανακτούμε τη συμπεριφορά του συστήματος (5)).

Υπολογιστικό μέρος

Ερώτηση 12: Για $a=5$ και $\delta=1$ βρείτε k που να καθιστά το (7) ευσταθές. Για το k που βρήκατε και με q της επιλογής σας προσομοιώστε το σύστημα της Εικόνας 1.

Ερώτηση 13: Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα κρατώντας το a σταθερό και αναζητήστε ουσιωδώς διαφορετικές συμπεριφορές που οφείλονται στην κβάντιση και τη διακριτοποίηση (μπορείτε να συμπεριλάβετε μικρές τιμές για το δ ή το q για να δείτε την επίδραση του καθενός ξεχωριστά).

Ερώτηση 14: Σχολιάστε τα αποτελέσματα που πήρατε στο προηγούμενο ερώτημα. Δώστε ένα εμπειρικό κανόνα που να περιγράφει στις διάφορες περιπτώσεις, την επίδραση των παραμέτρων k, δ, q στα φαινόμενα που παρατηρήσατε. Τι θα προτείνατε σε κάποιον που θέλει να μειώσει το jitter noise;

Ένας τρόπος για να γίνει η ανάλυση της ευστάθειας ενός διακριτού συστήματος της μορφής $z_{k+1}=g\left(z_k\right)$ είναι μέσω της γραφικής παράστασης της g. Τα σταθερά σημεία της g είναι αυτά στα οποία η γραφική της παράσταση τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$. Ένα σταθερό σημείο είναι ευσταθές αν στο σημείο στο οποίο τέμνει τη διχοτόμο η κλίση της g είναι σε απόλυτη τιμή μικρότερη του 1.

Ερώτηση 15: Για τις τιμές της Ερώτησης 12 να γίνει η γραφική παράσταση της g και να βρεθούν όλα τα σταθερά σημεία. Με τη μέθοδο που περιγράφηκε παραπάνω να εξεταστεί αν είναι κάποιο από αυτά ευσταθές. Να εξηγηθεί η μέθοδος.

Ερώτηση 16: Για τις τιμές της Ερώτησης 12 κάντε φασματική ανάλυση (διακριτό μετασχηματισμό Fourier) στο $x_q(n\delta)-x\left(n\delta\right)$ για να δείτε το φασματικό περιεχόμενο του σήματος που πήρατε. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με το φασματικό περιεχόμενο λευκού θορύβου. Επαναλάβετε για διαφορετικά (τέσσερα τουλάχιστον) δ και q.

Ερώτηση 17: α) Εξετάστε αν συμβαίνουν αντίστοιχα φαινόμενα όταν το υπό έλεγχο σύστημα (1) είναι ευσταθές για $u=0$ (δηλαδή $a \leq 0$). Δοκιμάστε διάφορα k, δ, q.
β) Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο το οποίο μπορεί να παρατηρηθεί είναι η ύπαρξη οριακών κύκλων. Ένας οριακός κύκλος με περίοδο 2 μπορεί να προκύψει όταν για κάποιο

$z \in R$ ισχύει: $f_q\left(f_q(z)\right) = z$. Να προσομοιωθεί το σύστημα για με παραμέτρους $(a = 5, \delta = 0.01, k = 6, q = 10)$ και $(a = -0.1, \delta = 1, k = 1.9, q = 10)$ και διάφορες αρχικές συνθήκες.

γ) Να εξεταστεί η ευστάθεια των οριακών κύκλων με τη μέθοδο της Ερώτησης 15.

δ) Για τη δεύτερη οικογένεια παραμέτρων να βρεθούν με χρήση προσομοίωσης αρχικές συνθήκες που να οδηγούν σε κάθε οριακό κύκλο που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Ερώτηση 18: Σχεδίαση: Έστω ότι $a = 5$. Να σχεδιαστεί ελεγκτής κβαντιστής και δειγματολήπτης με δεδομένο ότι $\delta q = 0{,}1$ ο οποίος να ελαχιστοποιεί το φράγμα M της ερώτησης 12. Το $\frac{1}{\delta q}$ είναι ανάλογο με την ποσότητα της πληροφορίας που μεταδίδεται προς τον ελεγκτή ανά sec.

Βιβλιογραφία:

1. P.L. Phillips and H.T. Nagle "Digital Control System Analysis and Design", Prentice Hall 1984. Κεφ 14

2. T.Y. Li and J.A. Yorke: "Period three implies chaos" AMS 1975

3. K.T. Alligood, T.D. Sauer and J.A. Yorke: "Chaos: An Introduction to Dynamical Systems", Springer 1996