Άσκηση: Ποιος από τους παρακάτω τέσσερις πίνακες είναι αποδεκτός ως

e^{At}, ενός σταθερού 2x2 πίνακα A και γιατί. Να ευρεθεί ο A.

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & t\cdot e^{-2\cdot t} \\ t\cdot e^{-2\cdot t} & e^{-t} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2\cdot t} - e^{-3\cdot t} \\ e^{-2\cdot t} - e^{-3\cdot t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} e^{-2\cdot t} + 2\cdot e^{-3\cdot t} & -2\cdot e^{-2\cdot t} + 2\cdot e^{-3\cdot t} \\ e^{-3\cdot t} - e^{-2\cdot t} & 2\cdot e^{-2\cdot t} + e^{-3\cdot t} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ e^{-t} & e^{-t} + 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση: Δίνεται το διακριτό σύστημα

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad k = 0,1,2$$

και το κριτήριο κόστους

$$J = x^2(3) + x^2(2) + x^2(1) + u^2(2) + u^2(1) + u^2(0) + \rho x(2)u(2) - \rho x(1)u(1) + \rho x(0)u(0)$$

1.Χρησιμοποιήστε Δυναμικό Προγραμματισμό για να βρεθούν τα $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ που ελαχιστοποιούν το J και επίσης να βρεθεί για ποιες τιμές του ρ το ελάχιστο είναι πεπερασμένο,

2. Χρησιμοποιείστε την αρχή του ελαχίστου (Pontryagin) για να χαρακτηρίσετε το ελάχιστο για το ίδιο πρόβλημα με x(0)=1

Άσκηση: Δίνεται το σύστημα,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + 3u$$

με

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1+2t, & t \geq 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί το $y(t)$, $t \geq 0$.

Άσκηση: Δίνεται η περιγραφή στο χώρο κατάστασης,

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

Να βρεθούν τα k_1,k_2,k_3,k_4 έτσι ώστε για $u=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4\end{pmatrix}x$, το $\|x(t)\|$ να πηγαίνει στο μηδέν όπως το e^{-t}, για οποιοδήποτε $x(0)$.

Άσκηση: Η περιγραφή ενός συστήματος στο χώρο κατάστασης δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad y(t)=Cx(t)$$

όπου, $A\in R^{5\times 5}$ και τάξη$\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^4B\end{bmatrix}=4$. Η συνάρτηση μεταφοράς του ίδιου συστήματος είναι:

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+s-6}$$

Να βρεθεί ποιές είναι οι δυνατές τιμές της τάξης του πίνακα $\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T & \cdots & (A^T)^4C^T\end{bmatrix}^T$.

Άσκηση: Δίνεται σύστημα μάζας - ελατηρίου με απόσβεση που περιγράφεται στο συνεχή χρόνο από

$$M\ddot{y}(t)=Mg-ky(t)-c_1\dot{y}(t)-c_2\dot{y}(t)\left|\dot{y}(t)\right|$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και $k,M,c_1,c_2>0$. Να δειχθεί ότι το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας που είναι καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Υπόδειξη: Γράψτε την πιο πάνω εξίσωση μεταφέροντας την αρχή των αξόνων στο σημείο ισορροπίας. Περιγράψτε την καινούργια εξίσωση στο χώρο κατάστασης με μεταβλητές $x_1(t)$, $x_2(t)$ και πάρτε σαν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την $\alpha_1x_1^2(t)+\alpha_2x_2^2(t)$ με $\alpha_1,\alpha_2>0$ της επιλογής σας.

Άσκηση: Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+(x_2(y)+3)(x_1(t)+4)$$
$$\dot{x}_2(t)=-x_1(t)(x_1(t)+3)$$

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να μελετηθεί η ευστάθειά τους.

Άσκηση: Θεωρήστε το σύστημα,

$$\dot{x} = v \sin\theta$$

$$\dot{y} = v \cos\theta + V x(1-x)$$

όπου τα v και V είναι δεδομένα και θετικά. Το $x(0) = y(0) = 0$.
Να μελετηθεί το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου $\theta(t)$ έτσι ώστε το $x(T) = 1$, $y(T) = 5$ και ο χρόνος T να είναι ελάχιστος.

Άσκηση: Εκκρεμές με damping:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta + k\dot{\theta} = 0.$$

με k>0, L=1 το μήκος, $g=9.81\,{}^{m}/_{sec^2}$

Να μελετηθεί η ευστάθεια του θ=0, με χρήση της: $V(\theta,\dot{\theta}) = \frac{g}{L}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$

Άσκηση: Θεωρήστε το σύστημα,

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 + f(x_1)$$

όπου

$$f(x_1) = \begin{cases} 0, & |x_1| > |\alpha|^{-1} \\ \alpha x_1, & |x_1| \le |\alpha|^{-1} \end{cases}$$

με $\alpha \neq 0$. Να βρεθούν τα σημεία ισορρπίας και να μελετηθεί η ευστάθειά τους.

Άσκηση: Δίνεται

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad C^T = \begin{bmatrix} 10^3 \\ 10^{-3} \\ 10^3 \\ 10^{-3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Είναι το $\dot{x} = Ax$, $y=Cx$ παρατηρήσιμο;

Άσκηση: Δίνεται η περιγραφή:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t),$$

όπου, $x(t) \in R,\ u(t) \in R,\ a \in R$ και το κριτήριο κόστους,

$$J = q_0(x(0)-1)^2 + q_1(x(1)+1)^2 + \int_0^1 (qx(t)^2 + u(t)^2)\, dt$$

α) Να εφαρμοσθούν οι συνθήκες Pontryagin για $min\ J$.

β) Για $a = q = 0$ και $q_0 = q_1 = 3$ να βρεθεί το βέλτιστο $u(t)$ και η ελάχιστη τιμή του J.

Άσκηση: Έστω:

$$\dot{x} = a \cdot x + u^2 \cdot x, \qquad x(0)=1, \qquad J = \int_0^{t_f} (u^4 + x^4) \cdot dt, \qquad t_f = 1.$$

Προς επιλογή είναι το u έτσι ώστε να λύνει το: min(J).

Να εφαρμοστεί η αρχή του Pontryagin.

Άσκηση: Δίνεται

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Να ευρεθεί $k = \lfloor k_1 \quad k_2 \quad k_3 \rfloor$, ώστε με u=kx, το $\|x(t)\| \to 0$ ταχύτερο του e^{-2t}.

Άσκηση: Δίνεται ένα σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \quad x(0) = x_0$$
$$y(k) = cx(k)$$

όπου,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -g \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g \in R$$

α) Να καθορισθούν οι περιοχές τιμών του g ώστε το σύστημα να είναι ελέγξιμο, παρατηρήσιμο, ευσταθές (η κάθε μια ιδιότητα ξεχωριστά).

β) Να μετατοπισθούν οι ιδιοτιμές του συστήματος μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης έτσι ώστε η κατάσταση να πάει στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο.

γ) Να βρεθεί νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής $u(k) = -K\tilde{x}(k)$, όπου $\tilde{x}(k)$ είναι η εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης που παράγεται από ένα παρατηρητή πλήρους τάξης έτσι ώστε η κατάσταση του συστήματος και το σφάλμα εκτίμησης να μηδενίζονται σε πεπερασμένο χρόνο. Να σχεδιαστεί ο παρατηρητής.

Άσκηση: Δίνεται ότι:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + 3x_1 - f(x_1), \quad \text{με} \quad f(x_1) = \begin{Bmatrix} 4 & x_1 \geq 1 \\ 4x_1 & -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -4 & x_1 \leq -1 \end{Bmatrix}$$

Να ευρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να μελετηθεί η ευστάθειά τους με χρήση της $1^{ης}$ μεθόδου Liapunov.

Άσκηση: Δίνεται το σύστημα,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -h_1(x_1) - x_2 - h_2(x_3)$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - x_3$$

όπου οι συναρτήσεις h_i είναι συνεχείς με $h_i(0) = 0$ και $yh_i(y) > 0$ για $y \neq 0$.

α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $V(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} h_1(y)\, dy + \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_3} h_2(y)\, dy$ είναι θετικά ορισμένη για κάθε $(x_1\ x_2\ x_3)^T \in R^3$.

γ) Υπάρχει σημείο ισορροπίας του συστήματος που είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ;

Άσκηση: Έστω

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

Μπορεί να ευρεθεί κατάλληλη ανάδραση:

$$u_k = l^T x_k \qquad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε $\|x_k\| \to 0$ όπως το $\left|\frac{1}{2}\right|^k$

Άσκηση: Έστω

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 4u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{Bmatrix} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 1 \end{Bmatrix}$$

Να ευρεθεί το y(t).

Άσκηση: Θεωρήστε το σύστημα,

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 x(t), & t \in [2k, 2k+1) \\ A_2 x(t), & t \in [2k+1, 2k+2) \end{cases}$$

όπου

$$k = 0,1,2\cdots, \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{και} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad \rho, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί πότε είναι το $(0,0)$ ασυμπτοτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Άσκηση: Ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από την διαφορική εξίσωση,

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (x(t) \in R)$$

όπου η αρχική συνθήκη x_0 είναι δεδομένη και $|u(t)| \le 1$. Είναι επιθυμητό να βρεθεί $u(t)$ τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται το ακόλουθο κριτήριο κόστους:

$$J = \frac{1}{2} q_f x_{\theta}^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{1}{2} q x^2(\tau) + r u(\tau) \right) d\tau$$

με t_0, x_0, t_f, r, q_f, q γνωστά.

1. Χρησιμοποιήστε την αρχή του ελαχίστου (Pontryagin),για να χαρακτηρίσετε το ελάχιστο.
2. Έστω ότι $|q| < |a^2 r|$. Είναι δυνατόν να έχουμε ένα βέλτιστο $u(t)$ του οποίου η απόλυτη τιμή να είναι αυστηρά μικρότερη του ένα σε κάποιο διαστημα της μορφής (t_1, t_2);

Άσκηση: Εάν

$$\Phi(t,\tau) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-4(t-\tau)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad x(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

να βρεθεί το $\dot{x}(2)$

Άσκηση: Δίνεται το σύστημα διακριτού χρόνου

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0$$
$$y(k) = Cx(k)$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

α1) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος για $m_1 = 0, \quad m_2 = 1$.

α2) Έστω $m_3 = m_4 = 1$. Υπάρχει ακολουθία εισόδων, $u(k)$, που μεταφέρουν το $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ στο $\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}^T$;

β) Θεωρήστε τώρα το σύστημα συνεχούς χρόνου

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} -0.007 & -0.007 \end{pmatrix} x(t)$$

Ελέγξτε την παρατηρησιμότητα του διανύσματος κατάστασης αυτού του συστήματος.

Άσκηση: Δίνεται το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t)$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι επιθυμητό να μετατοπισθούν οι πόλοι του συστήματος στις θέσεις $\mu_1 = -1.8 + 2.4j, \quad \mu_2 = -1.8 - 2.4j$ μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης. Να βρεθεί ο νόμος ανατροφοδότησης κατάστασης της μορφής

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

όπου $\hat{x}(t)$ είναι η εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης που παράγεται από ένα παρατηρητή πλήρους τάξης. Ο παρατηρητής, τον οποίο πρέπει επίσης να υπολογίσετε, έχει την ιδιότητα:

$\left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\| \to 0$ όπως το e^{-8t} καθώς το $t \to \infty$.

Άσκηση: Να μελετηθεί η τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια του

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2 + 7x_1^2 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + (x_1 + x_2)^3$$
$$\dot{x}_3 = x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_3^3(1 + x_1^2)$$

γύρω από το (0,0,0).

Άσκηση:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -2\cdot b \\ 6 & -2\cdot b \\ -8 & 2\cdot b^2 \\ -6 & 2\cdot b^2 \\ 0 & -2\cdot(b-2) \end{bmatrix}$$

Για ποιές τιμές του b, το $\dot{x} = A\cdot x + B\cdot u$ είναι ελέγξιμο

Άσκηση: Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)^3 - 2x_2(t)^5 + 3x_2(t) + u(t)$$

όπου προτείνεται

$$u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$$

με k_1, k_2 πραγματικούς αριθμούς. Να βρεθούν κατάλληλα k_1 και k_2 τέτοια ώστε το σημείο (0,0) να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (τοπικά).

Σημ. Μια υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι η $V(x(t)) = x_1(t)^2 + x_2(t)^2$

Άσκηση: Έστω

$$\dot{x} = a \cdot x + u^2 \cdot x, \qquad x(0) = 1, \qquad J = \int_0^1 (u^4 + x^4)dt$$

Να διατυπωθεί η Αρχή του Pontryagin για $\min_u J$

Άσκηση: Δίνεται η περιγραφή,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$$

Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες τέτοιες ώστε δεδομένης μιας οποιασδήποτε τροχιάς $x(t), \quad t \geq 0$, να υπάρχει κατάλληλο $u(t)$ που την παράγει.

Άσκηση: Θεωρήστε το διακριτό σύστημα

$$x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + x_2(k)^2$$
$$x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k)$$

όπου $0 \angle \alpha \angle 1, \quad 0 \angle \beta \angle 1$

α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας.

β) Για αυτό το ερώτημα θεωρήστε ότι $\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{3}$. Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας με τη μέθοδο της γραμμικοποίησης.

Άσκηση: Δίνεται το σύστημα,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix} x(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Να σχεδιαστεί παρατηρητής πλήρους τάξης που να κάνει το λάθος της εκτίμησης να πηγαίνει στο μηδέν σαν το $e^{-2t}\eta\mu(3t)$.
2. Κάποιος θέλει να χρησιμοποιήσει μόνο την εκτίμηση $\hat{x}_1$ του παρατηρητή του ερωτήματος (1) και αποφασίζει να χρησιμοποιήσει το κομμάτι του παρατητητή που έχει το $\dot{\hat{x}}_1$ και να βάλει το x_2 στη θέση του $\hat{x}_2$. Θα βρεί καλή εκτίμηση για το x_1;