Εξέταση στα Μη Γραμμικά Συστήματα

Ονοματεπώνυμο Σπουδαστή:

Αριθμός Μητρώου:

Θέμα 1ο(Μονάδα 1.5). Έστω τα διανυσματικά πεδία

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 + x_1^2 + x_2 \\ 1 + x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ f_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τα οποία ορίζονται στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Να ελεγχθεί αν η $\Delta = span\{f_1, f_2\}$ είναι involutive.

Θέμα 2ο(Μονάδα 1.5). Έστω το ακόλουθο σύστημα:

$\dot{x}_1 = x_1^3 - (1 + x_2)x_1^3 - x_1,$

$\dot{x}_2 = x_1^4.$

Τι συμπεράσματα προκύπτουν χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ και το θεώρημα του LaSalle σχετικά με την ευστάθεια του σημείου $(0, 0)$;

Θέμα 3ο(Μονάδα 1.5). Δίνεται το ακόλουθο σύστημα:

$\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2 + x_2,$

$\dot{x}_2 = x_2 - x_1^2 - x_1^2 x_2.$

Να βρεθεί μία περιοχή η οποία περιλαμβάνει το $(0, 0)$ και η οποία δεν μπορεί να περιέχει οριακό κύκλο.

Θέμα 4ο(Μονάδες 2). Να σχεδιαστεί ελεγκτής της μορφής $u = u(x_1, x_2)$ που καθιστά το σημείο ισορροπίας (0,0) του συστήματος $\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2$, $\dot{x}_2 = 3x_2 + u$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θέμα 5ο(Μονάδες 2.5). Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$. Να βρεθεί το ελάχιστο $k_c > 0$ ώστε αν ισχύει $u = -\phi(y)$, όπου u, y η είσοδος και η έξοδος του συστήματος, με τη φ να ανήκει στον τομέα $[k, \infty]$ να έχουμε ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου για οποιοδήποτε $k > k_c$.

Υπόδειξη: Να θεωρήσετε πρώτα το γεωμετρικό τόπο ριζών του υπό έλεγχο συστήματος.

Θέμα 6ο(Μονάδες 2.5). Θεωρείστε το παρακάτω σύστημα:

$\dot{x}_1 = x_2,$

$\dot{x}_2 = \theta u + \delta,$

$y = x_1$

με θ, δ άγνωστες αλλά σταθερές παραμέτρους.

Αν γνωρίζουμε ότι $\theta \geq \theta_0$, όπου $\theta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, να βρεθεί ελεγκτής ώστε για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες του υπό έλεγχο συστήματος και οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων, τόσο οι μεταβλητές κατάστασης όσο και η είσοδος να είναι φραγμένες και επιπλέον η έξοδος y να τείνει στο 0 καθώς $t \to \infty$.

Διάρκεια εξέτασης: 3:00′
Όλες οι απαντήσεις πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες.
Καλή Επιτυχία.