

## Εξέταση στα Μη Γραμμικά Συστήματα

Όνοματεπώνυμο Σπουδαστή:

Αριθμός Μητρώου:

**Θέμα 1<sup>ο</sup>** (Μονάδα 1). Δίνεται το ακόλουθο σύστημα:

$$\dot{x}_1 = 1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2$$

Να δείξετε ότι δεν παρουσιάζει οριακό κύκλο.

**Θέμα 2<sup>ο</sup>** (Μονάδες 2). Για το σύστημα  $\dot{x}_1 = -x_1^2 + x_2$ ,  $\dot{x}_2 = x_2 + u$ , να σχεδιαστεί ελεγκτής της μορφής  $u = u(x_1, x_2)$  που καθιστά το σημείο  $(0, 0)$  ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

**Θέμα 3<sup>ο</sup>** (Μονάδες 2.5). Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x}_1 = \phi(x_1 + x_2) + x_2$$

$$\dot{x}_2 = \phi(x_1 + x_2) + u$$

Αν είναι γνωστό ότι η  $\phi$  ανήκει στον τομέα  $[-L, 0]$ , και για το  $L$  γνωρίζουμε ότι  $L > 0$ , να βρεθεί ελεγκτής που καθιστά το σημείο  $(0, 0)$  ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

**Θέμα 4<sup>ο</sup>** (Μονάδες 2.5). Δίνεται το ακόλουθο σύστημα:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3(1 + x_3^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_3(1 + x_3^2)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_3 + (1 + x_1^2)u$$

$$y = x_1 + x_2$$

I. Να βρεθεί ο σχετικός βαθμός του συστήματος.

II. Να βρεθεί ελεγκτής της μορφής  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  που καθιστά το σημείο  $(0, 0, 0)$  ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

III. Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο, τοπικά ελέγξιμο και τοπικά ελέγξιμο στο  $(0, 0, 0)$ .

**Θέμα 5<sup>ο</sup>** (Μονάδες 3). Έστω ότι επιθυμούμε να ελέγξουμε τη στάθμη των υδάτων δύο δεξαμενών, η πρώτη εκ των οποίων έχει σταθερή εισροή  $I$ , και η δεύτερη βρίσκεται χαμηλότερα από την πρώτη.

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται δύο συνεχώς ελεγχόμενες ηλεκτροβαλβίδες και σύστημα σωληνώσεων ώστε το νερό από την πρώτη να πηγαίνει στη δεύτερη και από εκεί να απορρέει.

Με βάση την αρχή του Bernoulli και αγνοώντας τον χρόνο που χρειάζεται το νερό για να φτάσει από την πρώτη στη δεύτερη δεξαμενή το σύστημα περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\dot{h}_1 = I - u_1 A \sqrt{2gh_1}, \quad u_1 \in [0, 1]$$

$$\dot{h}_2 = u_1 A \sqrt{2gh_1} - u_2 A \sqrt{2gh_2}, \quad u_2 \in [0, 1].$$

I. Αν τα  $A$  και  $I$  είναι γνωστά να βρεθεί ελεγκτής της μορφής  $(u_1, u_2) = u(r_1, r_2)$  ώστε το  $(r_1, r_2)$  να αποτελεί σημείο ισορροπίας. Να προσδιοριστεί για ποια  $r_1, r_2$  υπάρχουν κατάλληλα  $u_1, u_2$  και να ελεγχθεί αν το  $(r_1, r_2)$  είναι ευσταθές, ασυμπτωτικά ευσταθές και ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

II. Στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι τα ύψη των δύο δεξαμενών είναι πεπερασμένα και ίσα με  $H_1$  και  $H_2$ , να εξετάσετε αν ο παραπάνω ελεγκτής μπορεί να οδηγήσει σε υπερχειλίση κάποια από τις δύο δεξαμενές. Αν ναι, να σχεδιάσετε ελεγκτή της μορφής  $(u_1, u_2) = u(r_1, r_2, h_1, h_2)$  ώστε να μην υπάρχει τέτοια περίπτωση.

III. Αν η σταθερά  $A$  δεν είναι γνωστή με απόλυτη ακρίβεια, σχεδιάστε κατάλληλο ελεγκτή ώστε να μπορεί κάποιος χειριστής της διάταξης να αλλάζει το ύψος του νερού στις δύο δεξαμενές. Μπορείτε να υποθέσετε ότι η επιθυμητή στάθμη αλλάζει αρκετά αργά.

Διάρκεια εξέτασης: 3:00'

Όλες οι απαντήσεις πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες.

Καλή Επιτυχία.