Άσκηση

Δίνεται το σύστημα συνεχούς χρόνου,

$$\ddot{x}+\dot{x}^{3}+x^{7}-x^{6}(\sin x)^{2}=0$$

Να μελετηθεί η ευστάθεια του σημείου $(x=0,\dot{x}=0)$ χρησιμοποιώντας κατάλληλη συνάρτηση Lyapunov.

Άσκηση

Δίνεται το σύστημα συνεχούς χρόνου,

$$\dot{x}_1=2x_1+a_{12}x_2+x_1x_2^2+g_1(x_2)$$

$$\dot{x}_2=a_{21}x_1-1.5x_2+x_2^3+g_2(x_1)$$

Να δειχθεί ότι τοσύστημα δεν έχει οριακό κύκλο.

Άσκηση

Δίνεται τό σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$\dot{x}_1 = 3x_1-7x_2+6x_1x_2^2-15x_2^4$$

$$\dot{x}_2=-35x_1-2x_2^3+5x_2^5-16x_1^4$$

Έχει οριακό κύκλο?

Άσκηση

$$\dot{x}_2=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-6\\ 5\end{bmatrix}\varphi(\sigma),\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\sigma=x_1+x_2,\quad 0\le\varphi(\sigma)\cdot\sigma\le k\cdot\sigma^2,\quad k\ge 0$$

Νά βρεθεί η μέγιστη τιμή του k, ώστε να έχουμε "absolute" ευστάθεια γιά κάθε τέτοιο φ.

Άσκηση

Δίνεται,

$$x_{k+1} = 3x_k + 2u_k + 2w_k \quad , \quad k = 0,1,2$$

$$y_k = 2x_k + v_k \quad \text{(μετρήσεις)}$$

$$J = x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_0^2 + \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_0^2$$

όπου $x_0, v_0, v_1, v_2, w_0, w_1, w_2$ ανεξάρτητες, Gaussian $(0,1)$

Να βρεθούν τα $u_k = \gamma_k(y_0, \dots, y_k)$ που ελαχιστοποιούν $E[J]$.

Άσκηση

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2(x_1 + 3)$$

$$\dot{x}_2 = u(x_1 + 3).$$

Νά ευρεθή νόμος ελέγχου $u = k \cdot x_1$ (δηλαδή κάποιο $k \in R$) τέτοιο ώστε τό $(0,0)$ νά είναι σημείο ισορροπίας ασυμπτωτικά ευσταθές). Επίσης νά εκτιμηθούν τά όρια έλξεως

Άσκηση

Δίνεται το σύστημα διακριτού χρόνου,

$$x(k+1) = (-1)^k x(k) + u(k), \qquad k = 0,1,2,3$$

Για δεδομένα x_0 και M, θεωρούμε

$$J = (x(4) - M)^2 + r(u(0)^2 + u(1)^2 + u(3)^2)$$

Να βρεθεί το $min\ J$ εάν $u(k) \in \{-1, 1\}$.

Άσκηση

Θεωρήστε το σύστημα

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi(\sigma)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x, \qquad 0 \le \varphi(\sigma) \cdot \sigma \le k \cdot \sigma^2$$

Να βρεθεί το μέγιστο k ώστε να έχουμε “absolute” ευστάθεια για κάθε τέτοιο φ.

Άσκηση

Σχεδιάστε ἕνα Model Reference Adaptive Control σύστημα γιά τό: $\dot{y} = au$, ὅπου $a(>0)$ εἶναι ἄγνωστο, μέ νόμο ἐλέγχου $u = K(r-y)$ ὅπου τό K μεταβάλλεται καί τό Reference Model (πρότυπο) ἔχει συνάρτηση μεταφορᾶς $\frac{1}{1+2s}$

Άσκηση

$x_{k+2} = (-1)^{k+1} \alpha \cdot x_{k+1} + (-1)^{k} \beta x_k + w_k \quad , k = 0, 1, 2, \ldots$

$\{w_k\}$: Gaussian, $E(w_k) = 0$, $E(w_k^2) = 1$, ανεξάρτητα.

Εκτιμήστε τα α και β με την αρχή των ελαχίστων τετραγώνων και βρείτε τον αναγωγικό τύπο

Άσκηση

Να ευρεθούν ικανές συνθήκες για τις συναρτήσεις f κ g έτσι ώστε το $(0,0)$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το: $\ddot{x} + f(x)\cdot\dot{x} + g(x) = 0$, με Liapunov συνάρτηση: $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x g(z)dz$

Άσκηση

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)(x_1(t) + 3)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t)(x_1(t) + 3)$$

Να υπολογισθούν τα σημεία ισορροπίας και να μελετηθεί η ευστάθεια παίρνοντας σαν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την $V = \frac{1}{2}(x_1^2(t) + x_2^2(t))$.

Άσκηση

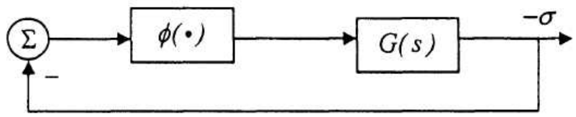
Δίνεται το σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 - 7x_2 + 8x_1x_2^2 - 15x_2^4$$
$$\dot{x}_2 = -35x_1 - 2x_2 + 5x_2^5 - 16x_1^4$$

Να δειχθεί ότι δεν έχει οριακό κύκλο.

Άσκηση

Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων



όπου $G(s) = \dfrac{s+1.5}{(s+1)(s+2)}$ και $0 \le \varphi(\sigma)\cdot\sigma \le k\cdot\sigma^2$

Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές κατά το θεώρημα του Popov.

Άσκηση Ένα στοχαστικό σύστημα διακριτού χρόνου έχει $x(k) = 1$ ή 2, $u(k) = 0$ ή 1, καί $p_{ij}(u(k)) = P(x(k+1)=j \mid x(k)=i, u(k))$, δίνεται από:

$P_{11}(0) = \frac{1}{7}$, $P_{11}(1) = \frac{4}{7}$, $P_{21}(0) = \frac{2}{7}$ $P_{21}(1) = \frac{3}{7}$.

$g(x(k), u(k))$, δίνεται από: $g(1,0) = 5$, $g(1,1) = 3$, $g(2,0) = 6$, $g(2,1) = 7$. ($k = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ο χρόνος). Να βρεθεί το βέλτιστο u^* γιά ελαχιστοποίηση του (average infinite cost): $\lim \frac{1}{N} E \sum_{k=0}^{N} g(x(k), u(k))$

Άσκηση

Θεωρείστε

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2(x_1+3)$$
$$\dot{x}_2 = u$$

Να βρεθεί νόμος ελέγχου $u = \alpha x_1 + \beta x_1^2$ τέτοιος ώστε το $(0,0)$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Επίσης, να εκτιμηθούν τα όρια έλξης για το u που έχει επιλεγεί.

Άσκηση

$$x_{k+1} = 3x_k + u_k + w_k \qquad k = 0, 1,$$
$$y_k = 2x_k + v_k \quad (\text{μετρήσεις})$$
$$J = x_2^2 + x_1^2 + x_0^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_0^2$$
x_0, v_0, v_1, w_0, w_1: ανεξ. Gaussian $(0,1)$

Να ευρεθούν $u_k = \gamma_k(y_0, \ldots, y_k)$ τα οποία ελαχιστοποιούν $E[J]$

Άσκηση

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \varphi(\sigma), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = x_1 + x_2, \quad 0 \le \varphi(\sigma)\cdot\sigma \le k\cdot\sigma^2, \quad k > 0$$

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του k ώστε να έχουμε "absolute" ευστάθεια για κάθε τέτοιο φ.

Άσκηση

Θεωρήστε

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 (x_1 + 3)$$
$$\dot{x}_2 = u$$

Να βρεθεί νόμος ελέγχου $u = \alpha x_1 + \beta x_1^2$ τέτοιος ώστε το $(0,0)$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Επίσης, να εκτιμηθούν τα όρια έλξης για το u που έχει επιλεγεί.

Άσκηση

Ένα στοχαστικό σύστημα διακριτού χρόνου έχει $x(k) = 1$ ή 2, $u(k) = 0$ ή 1, $P_{ij}(u(k)) = P(x(k+1)=j \,/\, x(k)=i,\ u(k))$, δίνεται από:

$P_{11}(0) = 1/8$, $P_{11}(1) = 5/8$, $P_{21}(0) = 6/8$, $P_{21}(1) = 2/8$.

$g(x(k), u(k))$ δίνεται από: $g(1,0) = 5$, $g(1,1) = 3$, $g(2,0) = 6$, $g(2,1) = 7$. [$k = 0,1,2,\ldots$ χρόνος]

Να ευρεθή το βέλτιστο u^* για ελαχιστοποίηση του (average infinite cost) $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} E \sum_{k=0}^{N} g(x(k), u(k))$

Άσκηση

Δίνεται τό σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 - 7x_2 + 8x_1x_2^2 - 15x_2^4$$

$$\dot{x}_2 = -35x_1 - 2x_2 + 5x_2^5 - 16x_1^4$$

Νά δειχθῆ ὅτι δέν ἔχει ὁριακό κύκλο.

Άσκηση

Δίνεται,

$$x_{k+1} = 3x_k + 2u_k + 2w_k \quad , \quad k = 0,1,2$$

$$y_k = 2x_k + v_k \quad \text{(μετρήσεις)}$$

$$J = x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_0^2 + \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_0^2$$

όπου $x_0, v_0, v_1, v_2, w_0, w_1, w_2$ ανεξάρτητες, Gaussian $(0,1)$

Να βρεθούν τα $u_k = \gamma_k(y_0, \dots, y_k)$ που ελαχιστοποιούν $E[J]$.

Άσκηση

Θεωρήστε το διακριτό σύστημα:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k)(1 - x_2(k))$$

$$x_2(k+1) = x_1(k)$$

α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας.

β) Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας χρησιμοποιώντας την πρώτη μέθοδο Lyapunov (γραμμικοποίηση).

Άσκηση

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \varphi(\sigma), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = x_1 + x_2, \quad 0 \le \varphi(\sigma)\cdot\sigma \le K\cdot\sigma^2, \quad K \geq 0$$

Να βρεθῆ ἡ μέγιστη τιμή τοῦ K ὥστε νά ἔχουμε "absolute" εὐστάθεια γιά κάθε τέτοιο φ.

Άσκηση

Εστω η ακόλουθη περιγραφή μιας διεργασίας

$$G(p) = \frac{b}{p^2 + p}$$

όπου b είναι χρονομεταβλητή παράμετρος. Το σύστημα ελέγχεται από τον αναλογικό ρυθμιστή

$$u(t) = K\,[\omega(t) - y(t)]$$

Το ιδεώδες πρότυπο είναι

$$G(p) = \frac{1}{1 + p + p^2}$$

Σχεδιάσατε νόμο προσαρμοστικού ελέγχου με τη μέθοδο Gradient που να δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Άσκηση

Ένα στοχαστικό σύστημα διακριτού χρόνου έχει $x(k) = 1$ ή 2, $u(k) = 0$ ή 1, $P_{ij}(u(k)) = P(x(k+1)=j / x(k)=i, u(k))$, δίνεται από:

$P_{11}(0) = 1/8$, $P_{11}(1) = 5/8$, $P_{21}(0) = 6/8$, $P_{21}(1) = 2/8$.

$g(x(k), u(k))$ δίνεται από: $g(1,0)=5$, $g(1,1)=3$, $g(2,0)=6$, $g(2,1)=7$. [$k = 0, 1, 2, \ldots$ χρόνος]

Να ευρεθεί το βέλτιστο u^* για να ελαχιστοποιήσει του (average infinite cost) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} E \sum_{k=0}^{N} g(x(k), u(k))$.

Άσκηση

Θεωρήστε το σύστημα

$$x_1 = -x_0 - u_0 - 2w_0$$
$$x_2 = x_1 + u_1 + w_1$$

όπου τα w_0 και w_1 είναι ανεξάρτητα Gaussian με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση ένα. Να βρεθούν τα $u_0 = f_0(x_0)$ και $u_1 = f_1(x_1)$ που ελαχιστοποιούν το $E(J)$, όπου

$$J = x_2^2 + x_1^2 + x_0^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_0^2)$$